

Sebastiano Goddi (sebago)

L'INVESTIGATORE BOEGAS E LO STRANO CASO DELLE CANNUCCE (2)

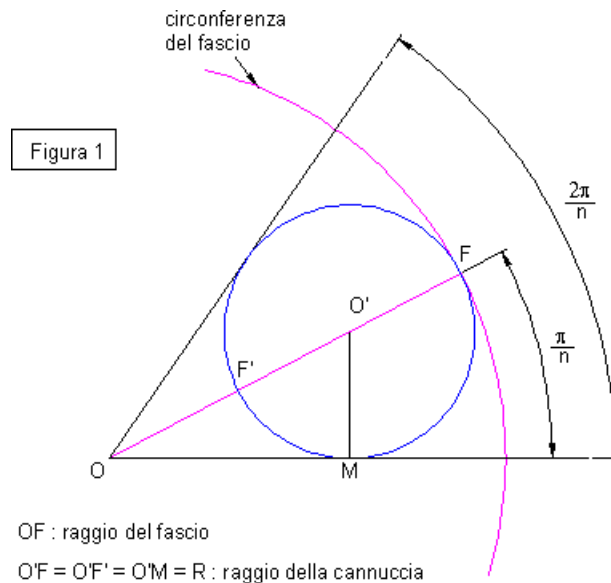
18 May 2009

[\(...Alla prima parte...\)](#)

Terza puntata

Lo spazio vuoto e il fasci..no del miele

“... Fine pasto. Mi sto sbafando un po' di sebadas al miele e decido di ridare battaglia. Ora, guardando la Figura 1,



il segmento OF' vale:

$$OF' = OF - FF' = R_F - 2 \cdot R = 3 \cdot R - 2 \cdot R =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}\right) \cdot R - 2 \cdot R = R \cdot \left(\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)} - 1\right)$$

e perciò **nello spazio vuoto interno** per $n = 6$ si ha:

$$OF' = R \cdot \left(\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)} - 1\right) = R \cdot \left(\frac{1}{0,5} - 1\right) = R \cdot (2 - 1) = R$$

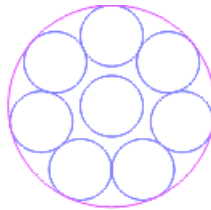
ci sta un'altra cannuccia (la settima, appunto)!!!

Mi accorgo che aumentando il numero delle cannucce, una cosa simile accade tutte le

volte che OF' (che rappresenta il raggio dello spazio vuoto interno) assume un valore pari o superiore a quello di un fascio precedentemente esaminato: in tal caso il fascio teorico (quello con le cannucce tutte sul bordo) in realtà contiene tante cannucce in più quante ne può accogliere il fascio dello spazio vuoto interno, il cui raggio è appunto OF' . Come risolvere?

Sono sempre più confuso ma riprendo tutto in mano, salvando il salvabile (ossia la casistica fino a 7 cannucce), e provo a fare un ricoprimento (da qualche parte ho letto che si chiama “pacchettizzazione”) della sezione del bicchiere partendo dal bordo:

- per 8 cannucce



$$R_F = 3,304 \cdot R$$

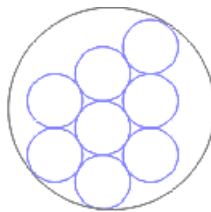
Infatti R_F sarebbe quello della formuletta per $n = 7$ ma in realtà ce ne stanno 8 perché il raggio dello spazio vuoto OF' vale

$$OF' = R_F - 2 \cdot R = R \cdot \left(\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)} - 1 \right) = 1,3048 \cdot R$$

Vale a dire: abbastanza per contenere un'altra cannucchia ma non sufficiente per due: in questo caso infatti avrei avuto bisogno di un coefficiente 2, anziché 1,3048.

Con una pacchettizzazione dal centro peggiorerei il risultato in modo evidente:

- per 8 cannucce (con pacchettizzazione dal centro):

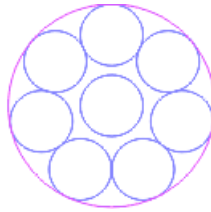


$$R_F = 3,6943 \cdot R$$

Sembrerebbe che sia meglio continuare dal bordo.

Sembrerebbe. Ma più guardo le due figure con otto cannucce e più sento qualcosa di stonato.

Ci sono! Riprendo la figura con 8 cannucce:

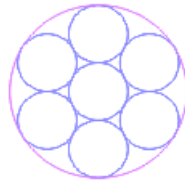


in questa figura la cannuccia “centrale” dovrebbe fare la “solitaria” e le altre dovrebbero fare il “girotondo” tutto attorno. Ma quando mai! Bello in teoria, sì, ma in pratica...

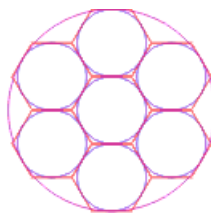
Al bar di Malvas, poi, l'unico cerchio che si vede è quello dei clienti un po' brilli che si mettono a cantare....

Insomma, mi pare più realistico considerare un raggruppamento delle cannuccie a partire dal centro.

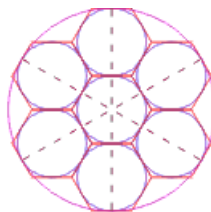
Riprendo allora la configurazione con 7 cannuccie e la guardo ben bene:



e mentre mi lecco le ultime gocce di miele dalle dita vedo:



che assomiglia a un bel favo !!! E non solo.

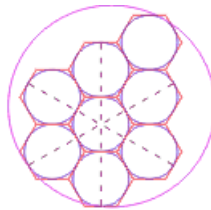


Noto anche che:

1. la configurazione presenta 3 assi di simmetria in corrispondenza ai punti di tangenza delle circonferenze delle cannucce con la circonferenza del fascio;
2. per aggiungere una cannuccia, basta prendere la sua circonferenza e considerarla inscritta in un esagono e poi posizionare il tutto in uno qualunque degli spazi vuoti;
3. l'aggiunta di una successiva cannuccia-esagono potrà avvenire in un adiacente spazio vuoto simmetrico, in modo da minimizzare l'ingombro.

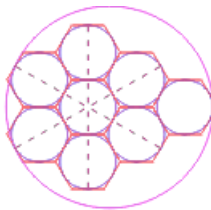
Infatti mi ricordo di aver sentito dire che il ricoprimento ottimale di un cerchio con poligoni regolari si ottiene con gli esagoni. Quindi:

- per 8 cannucce

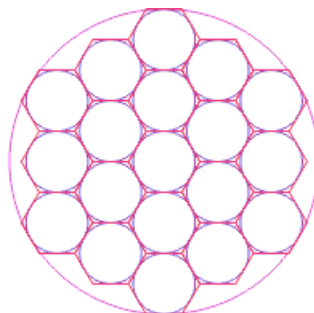


$$R_F = 3,6943 \cdot R$$

Del resto il risultato sarebbe lo stesso per qualunque altra posizione della cannuccia negli spazi racchiusi dagli assi di simmetria (la figura interna, semplicemente, ruota):



Continuo per inerzia ad aggiungere cannuccie-esagoni fino a circondare completamente il gruppo iniziale di 7 cannucce e arrivo così ad un fascio di 19 cannucce:

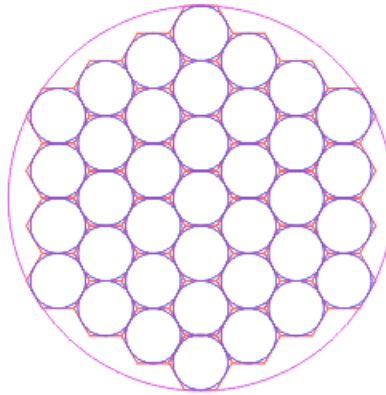


dove risulta che $R_F = 5 \cdot R$!!!

Ma guarda un po', anche stavolta (come nel caso di 7 cannucce dove risultava $R_F = 3 \cdot R$) salta fuori un valore di raggio del fascio che è un multiplo intero, anch'esso dispari, del raggio della singola cannuccia.

Come un bambino che ha scoperto dove sono nascoste le caramelle, continuo ad aggiungere le cannucce-esagoni su tutto il bordo esterno.

Alla fine arrivo a:



fascio di 37 cannucce dove risulta che $R_F = 7 \cdot R$

Sembro un invasato e aggiungo cannucce-esagoni fino a:

fascio di 61 cannucce dove risulta che $R_F = 9 \cdot R$

Questa è proprio curiosa.

Provo a stilare una piccola tabellina, per cannucce tutte uguali e di raggio R

N° cannucce	Raggio del fascio R_F
1	$1 \cdot R$
7	$3 \cdot R$
19	$5 \cdot R$
37	$7 \cdot R$
61	$9 \cdot R$

E, come se non bastasse, noto anche che:

N° cannucce	sviluppo equivalente
1	1
7	$1 + 6 \cdot 1$
19	$1 + 6 \cdot 1 + 6 \cdot 2$

37	$1 + 6 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + 6 \cdot 3$
61	$1 + 6 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + 6 \cdot 3 + 6 \cdot 4$

Basta così, è troppo. Intendo dire che sono troppe le sebadas al miele che ho sbafato: tutto preso dal problema non mi sono accorto che gli spicchi in cui le avevo divise andavano paurosamente assottigliandosi in proporzione inversa al numero crescente di cannuce. Nella pseudodieta che seguo devo aver sfornato di qualche gigacaloria e adesso dovrò stare a stecchetto per qualche giorno.

Decido comunque di fermarmi a 61 cannuce, anche perché in quella topaia del bar di Malvas i clienti sono così pochi che non le consumerebbero neppure in un anno.

Dopo una super dose di magnesia, spengo tutto e vado a farmi una passeggiata. Salto la cena e riprendo domani. ..."

Quarta puntata

C.F.G.

Un Bos con la testa appesantita e con la pancia ballonzolante si diresse al bar di Malvas, sperando di trovare un po' di sollievo nella cricca dei soliti amici.

Appena lo videro entrare, gli chiesero:

« Ehilà, Bos, ma che cosa hai mangiato, un panino con balena? »

« Ne avevo l'intenzione - rispose per stare allo scherzo - ma non potevo scongelarla per me soltanto ».

Malvas - con un sogghigno mal celato - pensò: "eh, lo so io cos'ha ingoiato".

Bos, che aveva notato il faccino finto-innocente di Malvas, girò al largo dal bancone e andò a sedersi in un angolo del locale, vicino a un vecchietto rinsecchito come una pergamena.

« Posso ? », chiese rispettosamente Bos.

« Prego, prego », rispose il vecchio, e tese la mano per presentarsi « Piacere, sono Carlo Federico, professore di matematica. Lei se non sbaglia è il signor Boegas »

Bos, colto di sorpresa per l'inusuale esordio, non ebbe di meglio che chiedere:

« Salve, prof., come va ? », chiese Bos.

« Bene, bene. Parla più forte, però, a volte sono sordo come una campana »

"Strano - pensò Bos - mi sembrava che ci sentisse benissimo. Mah, sarà l'età che fa di questi scherzi".

« Anche lei da queste parti ? », continuò Bos.

« Si ogni tanto ci vengo, solo che qualche volta non riesco a trovare le coordinate per arrivare »

"Boh, ma come parla questo...", si chiese Bos sempre più perplesso.

Cercando di tirar su la chiacchierata, aggiunse:

« E a scuola, che ambiente c'è ? »

« Eh, sempre più complesso, tutto funziona sulla base di moduli e a volte mi trovo sfasato », rispose il prof., aggiungendo: « Ma l'importante, caro Boegas, è progredire, ricordatelo bene. E' la progressione che spesso risolve un problema ».

"Non c'è che dire - pensò Bos - non è serata. Prima quel problema delle cannuce e ora questi discorsi sconclusionati. Sarà meglio berci su".

« Ehi, Malvas, portaci due bicchieri di carignano ».

Rapidissimo, Malvas arrivò con un vassoio. « Ecco qua », disse, « ma da quando in qua ti metti a bere da solo e con due bicchieri alla volta, per giunta ? »

« Ma che vai cianciando », rispose Bos indispettito « uno è per me e l'altro per il prof. »

E così dicendo si voltò per indicarlo ma... incredibile! Il prof. era letteralmente sparito.

Sbiancando a vista d'occhio, Bos ingollò i due bicchieri tutti d'un fiato, pagò e scappò in tutta fretta a casa e si cacciò a letto.

Dire che il sonno fu agitato è un eufemismo. La notte fu tutta un incubo, con esagoni e api giganti che lo costringevano a tracciare fasci di cerchi che, una volta ricoperta una superficie, esplodevano come fuochi artificiali.

La mattina, con un umore più nero del solito, andò in ufficio e non trovò nessuno. Alice aveva preso una settimana di ferie e lui se n'era dimenticato. "Poco male", pensò, "se non altro lei e le sue amiche non mi romperanno le scatole con le loro chiacchiere di rinnovamento tecnologico".

Piano piano stava tornando il buonumore e ripensò ai fatti della sera prima. Certo che era stata proprio una stranezza: avrebbe potuto giurare che il prof. c'era davvero. Forse era stato un sogno ad occhi aperti, ogni tanto pativa di queste stranezze.

E che nome poi: Carlo Federico. Quasi da imperatore mitteleuropeo.

E che razza di discorsi: la campana, le coordinate. E la complessità, i moduli e lo sfasamento. E quell'avvertimento finale sulla progressione.

Non c'era alcun dubbio: aveva sognato ad occhi aperti.

"Non c'è che dire", pensò Bos, "sto rimbecillendo a vista d'occhio. Però, cos'è che aveva detto alla fine, prima di sparire? Aveva parlato di progressioni...mmh.

Provo a ritirare fuori le ultime tabelle e le metto insieme:

Raggio del fascio R_F	N° cannuce	sviluppo equivalente
1	$1 \cdot R$	1
7	$3 \cdot R$	$1 + 6 \cdot 1$
19	$5 \cdot R$	$1 + 6 \cdot 1 + 6 \cdot 2$
37	$7 \cdot R$	$1 + 6 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + 6 \cdot 3$
61	$9 \cdot R$	$1 + 6 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + 6 \cdot 3 + 6 \cdot 4$

Fisso innanzitutto l'attenzione sulla colonna a sinistra. E quella più abbordabile perché il coefficiente moltiplicativo (quello che, moltiplicato per il raggio della

singola cannuccia, mi fa ottenere il raggio del fascio) è formato da numeri dispari. Niente di più facile allora fare un'altra tabellina:

k	(2·k+1)	Raggio del fascio $R_F = 2 \cdot (k + 1) \cdot R$	N° cannucce	sviluppo equivalente
0	1	$1 \cdot R$	1	1
1	3	$3 \cdot R$	7	$1 + 6 \cdot 1$
2	5	$5 \cdot R$	19	$1 + 6 \cdot 1 + 6 \cdot 2$
3	7	$7 \cdot R$	37	$1 + 6 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + 6 \cdot 3$
5	9	$9 \cdot R$	61	$1 + 6 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + 6 \cdot 3 + 6 \cdot 4$

Ora passo all'ultima colonna e la elaboro in questo modo:

k	(2·k+1)	Raggio del fascio $R_F = 2 \cdot (k + 1) \cdot R$	N° cannucce	sviluppo equivalente
0	1	$1 \cdot R$	1	1
1	3	$3 \cdot R$	7	$1 + 6 \cdot (1)$
2	5	$5 \cdot R$	19	$1 + 6 \cdot (1 + 2)$
3	7	$7 \cdot R$	37	$1 + 6 \cdot (1 + 2 + 3)$
5	9	$9 \cdot R$	61	$1 + 6 \cdot (1 + 2 + 3 + 4)$

Da una rapida analisi risulta evidente che, generalizzando, per il termine di ordine k si avrebbe:

	Raggio del fascio $R_F =$ $(2 \cdot k + 1) \cdot R$	N° cannuccie n
k (2·k+1)	$2 \cdot (k + 1) \cdot R$	$1 + 6 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + 6 \cdot 3 + 6 \cdot 4 + \dots + 6 \cdot k =$ $= 1 + 6 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + \dots + k) =$ $= 1 + 6 \cdot \left[(1 + k) \cdot \frac{k}{2} \right] =$ $= 1 + 3 \cdot [(1 + k) \cdot k] =$ $= 1 + 3 \cdot (k + k^2)$

Nella seconda riga dell'ultima colonna infatti c'è una bella progressione aritmetica di ragione 1 e di k termini, la cui somma si può calcolare con una formuletta che qualcuno (chissà chi era, non riesco proprio a ricordarmelo) aveva scoperto

$$S_k = 0,5 \cdot (a_1 + a_k) \cdot a_k$$

Tutto ringalluzzito, metto ora in relazione le ultime due colonne, ma prima ricavo **k** in funzione del rapporto **m** fra raggio del fascio e raggio della singola cannuccia $\frac{R_F}{R} = m = 2 \cdot k + 1 \rightarrow k = \frac{m - 1}{2}$ e sostituendo nell'ultima riga dell'ultima colonna

ottengo:

$$n = 1 + 3 \cdot (k + k^2) = 1 + 3 \cdot \left[\frac{m-1}{2} + \left(\frac{m-1}{2} \right)^2 \right] =$$

$$= 1 + 3 \cdot \left(\frac{m-1}{2} + \frac{m^2-2m+1}{4} \right) = 1 + \frac{3}{4} \cdot (m^2 - 1)$$

con riferimento al primo e ultimo membro, ricavo il *rapporto m in funzione del numero e raggio delle cannuce*:

$$\frac{3}{4} \cdot (m^2 - 1) = n - 1$$

da cui

$$(m^2 - 1) = \frac{4}{3} \cdot (n - 1) = \frac{4}{3} \cdot n - \frac{4}{3}$$

e ancora

$$m^2 = \frac{4}{3} \cdot n - \frac{4}{3} + 1 = \frac{4}{3} \cdot n - \frac{1}{3} = \frac{4 \cdot n - 1}{3}$$

e infine, sostituendo per m la sua espressione:

$$R_F = \sqrt{\frac{4 \cdot n - 1}{3}} \cdot R$$

Collaudo la formula per i casi esaminati (quelli dei ricoprimenti “perfetti” con cannuce-esagoni)

$$n = 1 \rightarrow R_F = \sqrt{\frac{4 \cdot 1 - 1}{3}} \cdot R = 1 \cdot R$$

$$n = 7 \rightarrow R_F = \sqrt{\frac{4 \cdot 7 - 1}{3}} \cdot R = 3 \cdot R$$

$$n = 19 \rightarrow R_F = \sqrt{\frac{4 \cdot 19 - 1}{3}} \cdot R = 5 \cdot R$$

$$n = 37 \rightarrow R_F = \sqrt{\frac{4 \cdot 37 - 1}{3}} \cdot R = 7 \cdot R$$

$$n = 61 \rightarrow R_F = \sqrt{\frac{4 \cdot 61 - 1}{3}} \cdot R = 9 \cdot R$$

FUNZIONA !!!

Ora il problema è adattare la formula anche per valori intermedi di cannuce. Immagino che ci sarà da smanettare: ho già notato che anche per $n=6$ il raggio del fascio deve essere $R_F = 3 \cdot R$ e con questa formula i conti non tornerebbero. Per adesso però sono sufficientemente soddisfatto e me la svigno di corsa perché ho un appuntamento con un agnello agli asparagi al quale non posso mancare (e al diavolo la dieta...). ...”



Continua...

Estratto da "<http://www.electroyou.it/mediawiki/index.php?title=UsersPages:Admin:articolo2>"