



Zeno Martini (admin)

MACCHINA ELETTRICA ELEMENTARE

19 June 2009

Accoppiamento magnetico

Una qualsiasi macchina elettrica si basa sull'**accoppiamento magnetico** tra almeno due circuiti elettrici o tra un circuito elettrico ed un magnete.

Nelle macchine rotanti un insieme di circuiti o di magneti è in movimento rispetto ad altri circuiti.

L'accoppiamento è dato dal **flusso magnetico che si concatena con i circuiti**, cioè, qualitativamente almeno, dalle linee magnetiche che attraversano la superficie delimitata dai conduttori che costituiscono gli avvolgimenti.

Il flusso può essere variabile per due ragioni:

- 1 - la variazione delle correnti che lo producono
- 2 - il movimento relativo dei circuiti.

Un flusso variabile provoca, nel circuito cui si concatena, una forza elettromotrice, regolata dalla legge di [**Faraday-Neumann-Lenz**](#), che si oppone alla causa che l' ha generata.

La f.e.m. indotta può essere

- di tipo trasformatore (variazione delle correnti nei circuiti induttori);
- di tipo mozionale (movimento relativo tra circuiti induttori e circuiti indotti).

E' al secondo tipo che si deve la trasformazione di potenza elettrica in meccanica nei motori elettrici (o viceversa, nei generatori). Alle fem trasformatrice è attribuibile solo un trasferimento di potenza elettrica.

Quanto detto si traduce, per ogni circuito, in una relazione matematica, che è la scrittura del secondo principio di Kirchhoff, fra le tre grandezze elettromagnetiche:

- $u(t)$: tensione applicata
- $i(t)$: corrente nel circuito
- $\lambda(t)$: flusso magnetico concatenato con il circuito

$$u(t) = Ri(t) + \frac{d\lambda(t)}{dt}$$

con

R: resistenza del circuito

L'operazione di derivata è in genere, per comodità di scrittura, sostituita dall'operatore

$$s = \frac{d}{dt}$$

per cui l'espressione precedente assume questa forma

$$u(t) = Ri(t) + s\lambda(t)$$

L'espressione è, di per sé, abbastanza semplice. Ma non c'è un solo circuito da esaminare in una macchina, ma più circuiti tra loro interagenti per accoppiamento magnetico. Le cose perciò si complicano rapidamente, per cui non si deve risolvere una sola equazione differenziale, ma un sistema di equazioni differenziali. L'innocuo λ , simbolo che rappresenta il flusso concatenato, nasconde una espressione complicata. Esso è infatti la somma algebrica del flusso prodotto dallo stesso circuito (flusso di autoinduzione) e di quello prodotto dalle correnti circolanti negli altri circuiti (flussi di mutua induzione). Indicando con L_{kk} il coefficiente di autoinduzione del circuito k e con L_{kj} il coefficiente di mutua induzione tra il circuito k ed il circuito j , considerando n circuiti, il flusso concatenato con il circuito k sarà dato da:

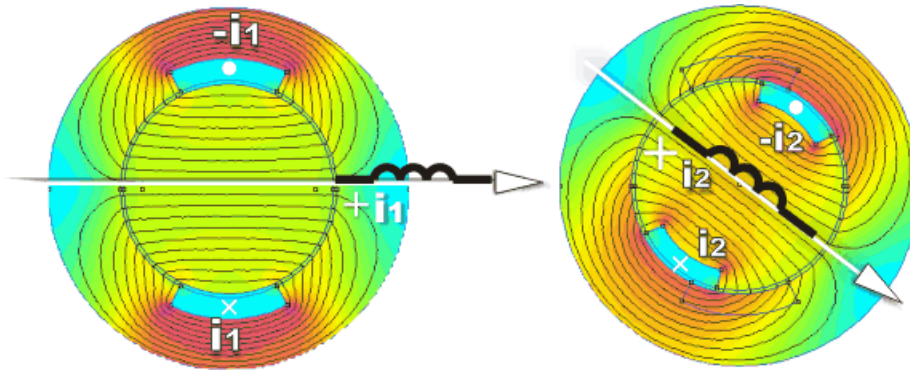
$$\lambda_k = L_{k1}i_1 + L_{k2}i_2 + \dots + L_{kk}i_k + L_{k+1}i_{k+1} + \dots + L_{kn}i_n$$

L'espressione precedente non è solo complessa per il numero di termini da considerare, ma anche per il fatto che i coefficienti di auto e mutua induzione, dipendono dalla configurazione che assume il circuito magnetico al variare della posizione dei circuiti.

Macchina bipolare elementare

E' costituita da uno statore, corona cilindrica in materiale magnetico, e da un rotore, cilindro coassiale pure in materiale magnetico, separato dallo statore da una corona cilindrica di aria: il traferro. Alloggiati in cavità diametralmente opposte, della periferia interna di statore ed esterna di rotore, percorsi rispettivamente dalle correnti i_1 , ed i_2 , stanno i conduttori che, in serie tra loro, costituiscono, rispettivamente, l'avvolgimento di statore, fisso, e di rotore, mobile. Gli avvolgimenti sono schematizzati in figura come solenoidi rettilinei, usando il simbolo

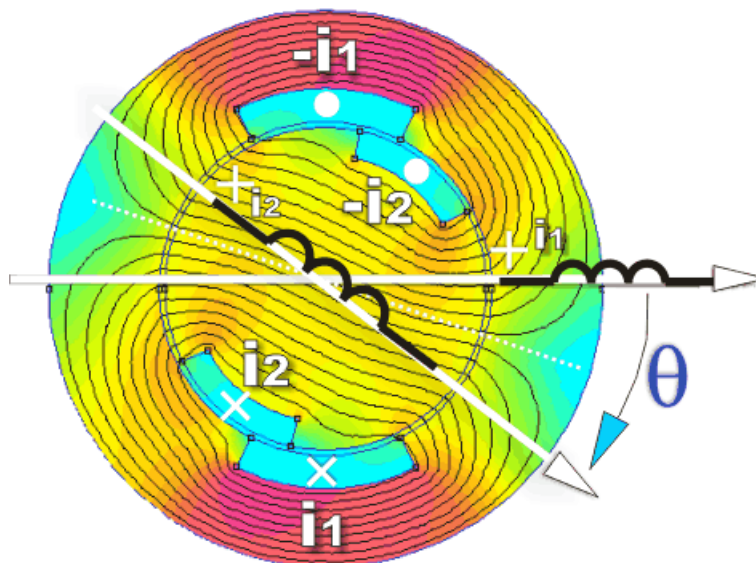
dell'induttanza. Il + indica il terminale da cui entra la corrente per dar luogo ad un campo positivo, indicato dalla freccia sull'asse. La crocetta sui conduttori indica corrente entrante; il punto, corrente uscente. Nella figura i campi prodotti dall'avvolgimento di statore e di rotore, sono rappresentati separatamente, mediante le linee. (Le immagini sono ricavate utilizzando [FEMM](#)).



Campi di statore e di rotore

Nella figura seguente sono rappresentati i due avvolgimenti che agiscono contemporaneamente dando luogo al campo magnetico risultante di cui sono rappresentate le linee, e, a tratteggio l'asse.

L'asse del campo magnetico prodotto dall'avvolgimento di statore, che pensiamo fisso, forma, con l'asse del campo magnetico di rotore, un angolo θ . Tale angolo varia nel tempo con la rotazione del rotore.



Macchina bipolare elementare

Equazioni elettriche

Le equazioni dei due circuiti sono:

$$\begin{aligned}u_1 &= R_1 i_1 + s\lambda_1 \\ u_2 &= R_2 i_2 + s\lambda_2\end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= L_{11} i_1 + L_{12} i_2 \\ \lambda_2 &= L_{21} i_1 + L_{22} i_2\end{aligned}$$

Trascurando la disuniformità introdotta dalle cavità in cui sono alloggiati i conduttori, la configurazione del circuito magnetico "visto" da un avvolgimento non cambia con la rotazione del rotore. Ciò equivale a considerare costanti i coefficienti di autoinduzione L_{11} ed L_{22}

Il coefficiente di mutua induzione invece varia. Considerando $L_{12} = L_{21} = M$ si può porre

$$M = L_d \cos \delta$$

1. $\delta = p\theta$: angolo elettrico
2. p : coppie polari dell'avvolgimento
3. θ : angolo meccanico tra gli assi
4. L_d :coefficiente di mutua induzione corrispondente al massimo accoppiamento, che si ha quando gli assi magnetici sono coincidenti.

L'angolo θ dipende dal tempo, per cui, indicando con Ω la velocità, costante, di rotazione, sarà

$$\Omega = \frac{d}{dt}\theta = s\dot{\theta} = \frac{s\dot{\delta}}{p} = \frac{\omega}{p} = \frac{2\pi f}{p}$$

- Ω : velocità angolare (rad / s)
- $\omega = s\dot{\delta} = \frac{d}{dt}\delta$: pulsazione elettrica (rad / s)
- f : frequenza (Hz)

Sarà allora

$$\begin{aligned}
 s\lambda_1 &= \frac{d}{dt} (L_{11}i_1 + Mi_2) = L_{11}\frac{d}{dt}i_1 + M\frac{d}{dt}i_2 + i_2\frac{d}{dt}L_{12} = \\
 &= L_{11}\frac{d}{dt}i_1 + M\frac{d}{dt}i_2 + i_2\frac{d}{dt}(L_d \cos \delta) = \\
 &= L_{11}\frac{d}{dt}i_1 + M\frac{d}{dt}i_2 - i_2L_d \sin \delta \frac{d\delta}{dt} = \\
 &= L_{11}\frac{d}{dt}i_1 + M\frac{d}{dt}i_2 - i_2L_d \sin(p\theta) p \frac{d\theta}{dt} = \\
 &= L_{11}si_1 + Msi_2 - i_2s\theta p L_d \sin(p\theta) = \\
 &= L_{11}si_1 + Msi_2 - i_2p\Omega L_d \sin(p\theta) = \\
 &= L_{11}si_1 + Msi_2 - i_2\omega L_d \sin \delta
 \end{aligned}$$

dividendo per l'operatore S

$$\lambda_1 = L_{11}i_1 + L_d \cos(p\theta) i_2 - i_2\theta p L_d \sin(p\theta)$$

ed analogamente

$$\lambda_2 = L_{22}i_2 + L_d \cos(p\theta) i_1 - i_1\theta p L_d \sin(p\theta)$$

Le equazioni dei due circuiti diventano

$$\begin{aligned}
 u_1 &= R_1i_1 + s(L_{11}i_1 + L_d \cos(p\theta) i_2 - i_2\theta p L_d \sin(p\theta)) \\
 u_2 &= R_2i_2 + s(L_{22}i_2 + L_d \cos(p\theta) i_1 - i_1\theta p L_d \sin(p\theta))
 \end{aligned}$$

quindi

$$\begin{aligned}
 u_1 &= (R_1 + sL_{11}) i_1 + L_d \cos(p\theta) si_2 - \Omega p L_d \sin(p\theta) i_2 \\
 u_2 &= (R_2 + sL_{22}) i_2 + L_d \cos(p\theta) si_1 - \Omega p L_d \sin(p\theta) i_1
 \end{aligned}$$

posto

$$\begin{aligned}
 E_{t1,2} &= L_d \cos(p\theta) si_2 = L_d \cos(p\theta) \frac{d}{dt}i_2 \\
 E_{t2,1} &= L_d \cos(p\theta) si_1 = L_d \cos(p\theta) \frac{d}{dt}i_1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E_{m1,2} &= -\Omega p L_d \sin(p\theta) i_2 = -\omega L_d \sin \delta i_2 \\
 E_{m2,1} &= -\Omega p \cdot L_d \sin(p\theta) i_1 = -\omega L_d \cdot \sin \delta i_1
 \end{aligned}$$

le prime due sono forze elettromotrici *trasformatoriche*, cioè prodotte da un circuito nell'altro accoppiato, per effetto della variazione della corrente; le seconde due sono forze elettromotrici *mozionali* proporzionali alla velocità relativa tra i due circuiti. Si ha

$$\begin{aligned}
 u_1 &= (R_1 + sL_{11}) i_1 + E_{t1,2} + E_{m1,2} \\
 u_2 &= (R_2 + sL_{22}) i_2 + E_{t2,1} + E_{m2,1}
 \end{aligned}$$

Coppia e potenza

La coppia meccanica può essere ricavata derivando rispetto all'angolo θ , e cambiando di segno, l'espressione dell'energia magnetica immagazzinata espressa in funzione dei flussi e dell'angolo, e considerando costanti i flussi, o derivando, sempre rispetto all'angolo θ , l'espressione della coenergia espressa in funzione delle correnti e dell'angolo ([Coppie e forze per macchine elettriche](#)).

Se tra forze magnetomotrici e flussi magnetici le relazioni sono lineari, il che significa considerare costante la permeabilità dei materiali magnetici, per il modello in esame, le induttanze L_{11} ed L_{12} e la mutua induttanza L_d , sono costanti.. L'ipotesi di linearità è praticamente verificata finché si può trascurare, nel percorso di una linea magnetica, la tensione magnetica nel ferro rispetto a quella del traferro.

L'espressione dell'energia magnetica immagazzinata nei due circuiti mutuamente accoppiati, uguale a quella della coenergia per l'ipotesi di linearità ammessa, è data da

$$W_\lambda = W'_\lambda = \frac{1}{2}L_{11}i_1^2 + \frac{1}{2}L_{22}i_2^2 + M i_1 i_2 = \\ = \frac{1}{2}L_{11}i_1^2 + \frac{1}{2}L_{22}i_2^2 + L_d \cos(p\theta) i_1 i_2$$

L'unico termine dipendente dall'angolo di rotazione è il terzo; derivando rispetto ad esso si ottiene la coppia agente

$$C = \frac{dW'_\lambda}{d\theta} = -L_d i_1 i_2 p \sin(p\theta)$$

Il segno negativo della coppia indica che essa agisce nel senso di far diminuire l'angolo meccanico tra gli assi magnetici, cioè tende ad allinearli.

La potenza meccanica è

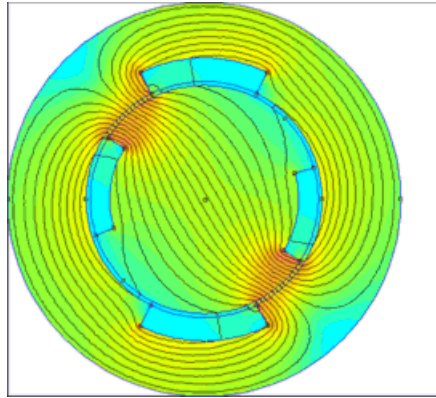
$$P_{mecc} = C\Omega = -L_d i_1 i_2 \Omega p \sin(p\theta) = \\ = -\omega L_d i_1 i_2 \sin(p\theta) = E_{m2,1} i_2 = E_{m1,2} i_1$$

espressione che mostra come la potenza elettrica che si trasforma in meccanica è il prodotto delle forze elettromotrici mozionali per la corrente nei rispettivi avvolgimenti.

Le forze elettromotrici mozionali sono dunque i termini dello scambio di potenza tra il sistema elettrico e quello meccanico.

Esercizi

Tracciare l'andamento della coppia

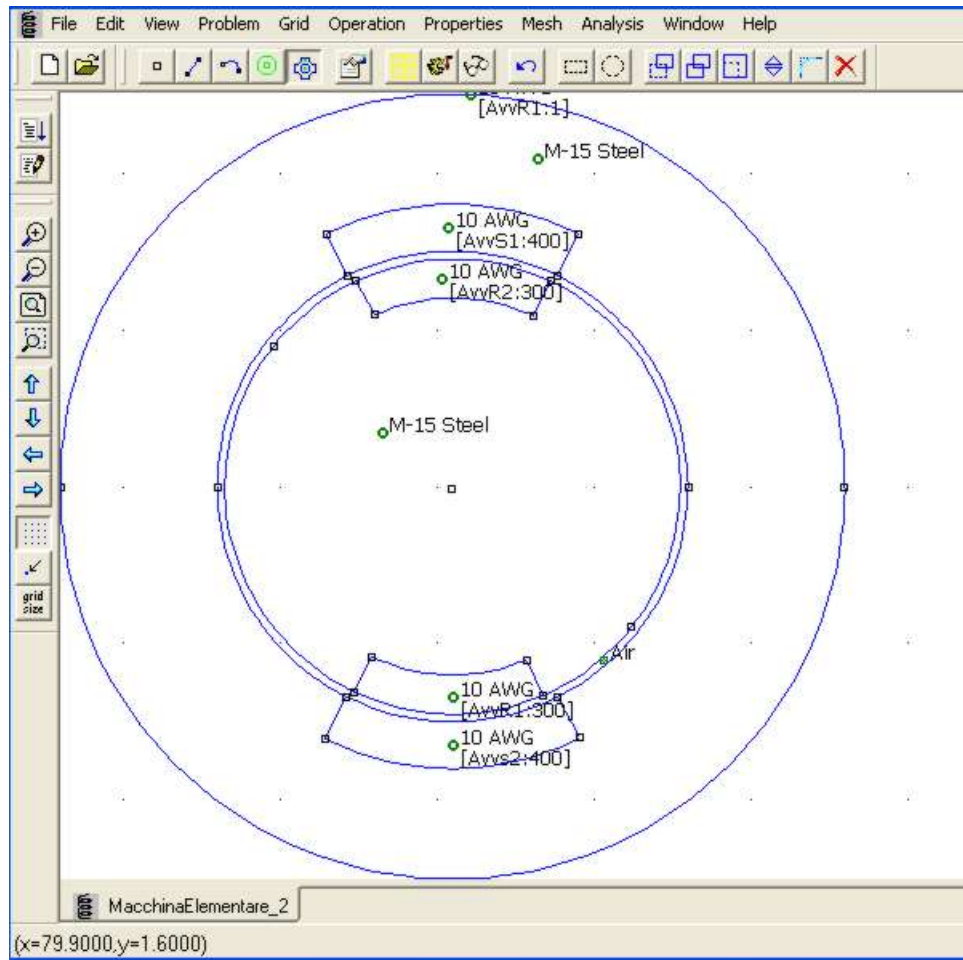


mel.gif

per una rotazione completa della macchina elementare che ha le seguenti caratteristiche:

- Avvolgimento di statore: 400 spire percorse da corrente costante di 10 A, (con AWG 10).
- Avvolgimento di rotore con 300 spire percorse da corrente costante di 10 A (con AWG 10).
- Diametro di statore: 50 cm. Diametro di rotore: 29 cm. Lunghezza 50 cm.
- Acciaio M-15.

Eseguiamo la simulazione con [FEMM](#).



Calcoliamo la coenergia dopo ogni angolo di rotazione di 5° .

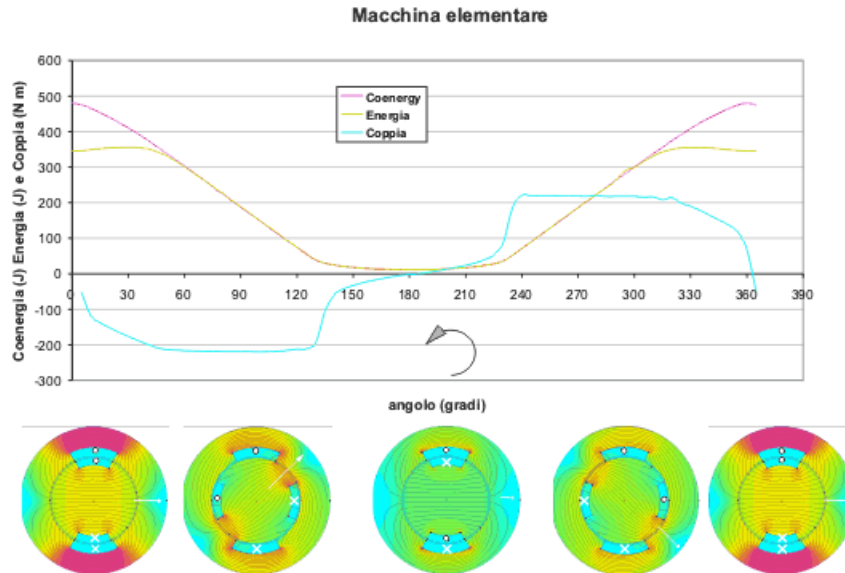
Eseguiamo il rapporto tra l'incremento della coenergia e l'angolo di rotazione espresso in radianti: si ottiene la coppia media agente per quella rotazione parziale.

A partire dalla configurazione iniziale la coppia è negativa, cioè agisce in senso contrario alla rotazione, quindi in senso orario; tale rimane per mezzo giro.

Al successivo mezzo giro, la coppia diventa positiva.

La coppia media per una rotazione completa è nulla.

La configurazione iniziale è dunque quella di equilibrio ed il rotore assumerà e manterrà quella posizione mantenendo costanti le correnti.



Nota: Il file FEMM ed il foglio di calcolo sono scaricabili da [qui](#)

Calcolare la coppia media

supponendo continua la corrente di rotore ed alternata quella di statore.

Se le correnti nei due avvolgimenti sono continue, la coppia media per ogni rotazione completa, o per qualsiasi angolo multiplo di $\frac{2\pi}{p}$ è nulla, come si è visto nel precedente esercizio.

Per ottenere coppia, motrice o resistente, occorre che almeno un avvolgimento sia alimentato con corrente alternata.

Per semplicità di calcolo, immaginiamo un generatore ideale di corrente alternata che alimenta l'avvolgimento di statore:

$$i_1 = I_1 \cos \omega_1 t$$

ed uno ideale di corrente continua per l'avvolgimento di rotore:

$$i_2 = I_2$$

Sia costante la velocità di rotazione del rotore Ω . Quindi l'angolo tra gli assi magnetici varia secondo la legge:

$$\theta = \Omega t + \alpha$$

La coppia varia nel tempo:

$$C(t) = -L_d I_1 \cos \omega_1 t I_2 p \sin (p(\Omega t + \alpha))$$

Posto

$$\omega_2 = \Omega \cdot p$$

$$\beta = p \cdot \alpha$$

si ha:

$$C(t) = -L_d I_1 \cos \omega_1 t I_2 p \sin (\omega_2 t + \beta)$$

e, sfruttando scomposizioni trigonometriche:

$$C(t) = -\frac{p}{2} L_d I_1 I_2 (\sin ((\omega_1 + \omega_2) t + \beta) + \sin ((\omega_1 - \omega_2) t + \beta))$$

Anche in tal caso la coppia media è nulla per una rotazione completa se $\omega_1 \neq \pm \omega_2$

Nel caso invece in cui sia $\omega_1 = \pm \omega_2$ (il che significa rotazione oraria od antioraria alla stessa velocità $\Omega = \frac{\omega_1}{p}$) si ha:

$$C(t) = -\frac{p}{2} L_d I_1 I_2 (\sin (2\omega_1 t + \beta) + \sin \beta)$$

il cui valore medio è

$$C = -\frac{p}{2} L_d I_1 I_2 \sin \beta$$

Bibliografia & links

- [Faraday's Law & Lenz's Law](#)



Macchine Elettriche- Fitzgerald-Kingsley-Kusko

Appendice

[rini](#), che ringrazio

ha migliorato il primo esercizio dotandolo dello script lua, che è di seguito riportato, che consente di automatizzare tutte le operazioni di calcolo e di calcolare immediatamente anche la coppia.

Il file FEMM e lo script associato sono scaricabili da [qui](#)

```
showconsole()
clearconsole()
print("                posizione [deg] Coppia [N m]      W [J]      W' [J]")

--gruppi da impostare nel disegno del motore
-- 1 rotore
-- 2 statore

incremento=5 --[deg]

for n=0,360,incremento do
    mi_saveas("temp.fem")      --in questo modo lavoro su un file temporaneo
    mi_analyze()               --e l'equivalente della rotellina
    mi_loadsolution()           --carico la soluzione nel postprocessor
    mo_groupselectblock(1)      --seleziono il gruppo 1 (cioè il rotore)
    f=mo_blockintegral(22)      -- coppia
```

```
mo_groupselectblock(2)
W=mo_blockintegral(2)      -- Energia magnetica del sistema
W1=mo_blockintegral(17)    -- Coenergia magnetica del sistema

mo_clearblock() -- deseleziona tutto
print("      ",n,f,W,W1)
--mo_showdensityplot(-1,0,0.7,1.4,"bmag")
--mo_savebitmap("pippo"..n.."..bmp")
mo_close()
mi_selectgroup(1)
mi_moverotate(0,0,incremento)
end
```

- Si apre in FEMM il file **ModificaElementare_rini_1.femm**.
- Quindi con *File > Open LUA Script* si apre il file **ruota.lua**
- Show console: mostra la console e una sorta di prompt dove inserire il codice e dove vengono visualizzati i dati di interesse;
- clearconsole non fa altro che pulire la console di FEMM
- Mo_savebitmap serve per salvare degli screenshot delle immagini ed è utile per realizzare filmati od animazioni. In tal caso occorre eliminare le lineette "--" dalle istruzioni, inserendo al posto di "pippo" il nome che si desidera

L'istruzione **print** stampa i dati di calcolo nella finestra console che possono poi essere trasferiti sul foglio elettronico per tracciare i grafici.

Estratto da "<http://www.electroyou.it/mediawiki/index.php?title=UsersPages:Admin:articolo29>"