



Zeno Martini (admin)

QUATTRO 'PICCOLI' ESERCIZI DI FISICA (MECCANICA CLASSICA)

2 July 2009

Introduzione

Non sono rare, nel forum, le richieste di studenti per la **soluzione di esercizi** di vario genere. E' nostra abitudine cercare di aiutare (se ne siamo capaci) non fornendo subito la soluzione, ma instaurando un colloquio per svolgere insieme l'esercizio. Didatticamente la riteniamo un'operazione molto più utile perché ci si rende meglio conto dei ragionamenti e delle leggi.

Gli esercizi risolti possono essere riordinati in un articolo da inserire in [ElectroYou](#).

A volte lo studente collabora, a volte no. Altre, si "volatilizza", poiché, più che a capire, è interessato ad un **domanda** e... **fuggi, se non fanno tutto il lavoro per te** (diciamo noi). Altre ancora riappare dopo lunghe pause: o siamo noi troppo impazienti, o non ha l'ADSL.

Gli esercizi possono essere comunque nel frattempo risolti e pubblicati lo stesso (è un gioco che ci piace).

Ecco il [thread di riferimento](#) dei quattro esercizi di cui, in questo articolo, propongo la soluzione (anche per far giudicare al lettore in quale situazione ci si trovi nel caso specifico)

Problema 1:

Una massa $M_1 = 1.5 \text{ kg}$ si trova su un piano liscio inclinato di $\alpha = 30^\circ$ rispetto al piano orizzontale.

M_1 è collegata ad una seconda massa $M_2 = 2.5 \text{ kg}$ da una fune ideale che passa attraverso una carrucola.

- *Calcolare la tensione della fune*
- *Calcolare il tempo impiegato dalla massa M_2 a raggiungere il suolo sapendo che inizialmente si trova ad un'altezza $H = 1,0 \text{ m}$*

Soluzione proposta

Innanzitutto rappresentiamo graficamente la situazione.

Nella fig. 1 sono rappresentate tutte le forze agenti.

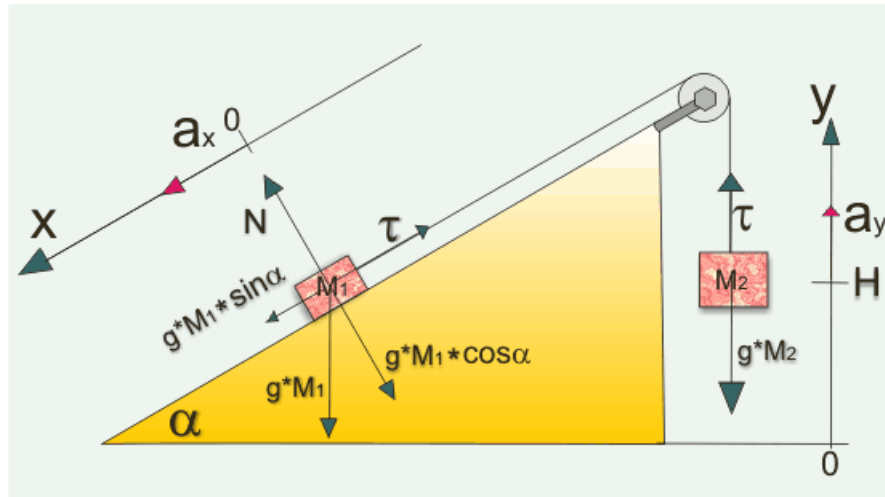


fig.1

Sulla massa M_1 agiscono:

- la forza peso $M_1 \cdot g$ la cui componente parallela al piano è: $F_1 = M_1 \cdot g \sin \alpha$;
- la reazione vincolare perpendicolare al piano inclinato (vincolo liscio), uguale e contraria alla componente del peso in quella direzione: $N = M_1 \cdot g \cos \alpha$;
- la tensione del filo τ , parallela al piano, agente in senso opposto alla componente del peso.

Indicando con a_x l'accelerazione della massa M_1 diretta secondo l'asse x parallelo al piano inclinato, per la seconda legge della dinamica scriveremo:

$$M_1 \cdot a_x = F_1 - \tau = M_1 \cdot g \cdot \sin \alpha - \tau = 1,5 \cdot 9,8 \cdot \sin 30^\circ - \tau = 7,35 - \tau$$

Sulla massa M_2 agiscono:

- la forza peso $F_2 = M_2 \cdot g$, agente secondo l'asse verticale y
- la tensione del filo τ , agente sempre secondo l'asse y, in senso opposto al peso

Indicando con a_y la sua accelerazione diretta secondo l'asse y, sempre per la seconda legge della dinamica si scriverà:

$$M_2 \cdot a_y = \tau - M_2 \cdot g = \tau - 2,5 \cdot g = \tau - 24,5$$

Considerando la fune inestensibile le due accelerazioni sono uguali. Dunque poniamo $a_x = a_y = a$

Quindi avremo

$$a_y = a = \frac{\tau - M_2 \cdot g}{M_2} = \frac{\tau - 24,5}{2,5} = \frac{\tau}{2,5} - 9,8$$

Sostituendo nella prima otterremo un'equazione la cui incognita è la tensione della fune:

$$M_1 \cdot \left(\frac{\tau - M_2 \cdot g}{M_2} \right) = M_1 \cdot g \cdot \sin \alpha - \tau$$

$$\tau \cdot \frac{M_1}{M_2} + \tau = M_1 \cdot g \cdot \sin \alpha + M_1 \cdot g$$

$$\tau \cdot \left(1 + \frac{M_1}{M_2} \right) = g \cdot M_1 \cdot (1 + \sin \alpha)$$

$$\tau = \frac{M_1 \cdot M_2}{M_1 + M_2} \cdot g \cdot (1 + \sin \alpha) = \frac{1,5 \cdot 2,5}{4} \cdot 9,8 \cdot 1,5 = 13,8 \text{ N}$$

Ora è possibile calcolare l'accelerazione comune alle due masse

$$a_y = a = \frac{\tau}{M_2} - g = \frac{M_1}{M_1 + M_2} \cdot g \cdot (1 + \sin \alpha) - g$$

$$a = g \cdot \frac{M_1 \cdot \sin \alpha - M_2}{M_1 + M_2} = 9,8 \cdot \frac{1,5 - 2,5}{4} = -4,2875 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

L'accelerazione è negativa, quindi diretta verso il basso.

Scrivendo l'equazione del moto secondo y, tenendo conto che la velocità iniziale è nulla, che la distanza dal suolo è H e che la sua accelerazione è a, imponendo che il punto di arrivo sia y=0, si ricava il tempo impiegato dalla massa a raggiungere il suolo:

$$y = y_0 + v_{0y} \cdot t + \frac{1}{2} a_y \cdot t^2$$

$$v_{0y} = 0, y_0 = H, y = 0$$

↓

$$0 = H + \frac{g}{2} \cdot \frac{M_1 \cdot \sin \alpha - M_2}{M_1 + M_2} \cdot t^2$$

$$t = \sqrt{-\frac{2H \cdot (M_1 + M_2)}{g \cdot (M_1 \cdot \sin \alpha - M_2)}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 4}{17,15}} = 0,676 \text{ s}$$

Discussione

Se $M_1 \cdot \sin \alpha = M_2$ non c'è movimento se la velocità iniziale è nulla e la tensione del filo è pari al peso di M_2 .

Se $M_1 \cdot \sin \alpha > M_2$, l'accelerazione diventa positiva ed il movimento è verso l'alto; conseguentemente non ha soluzione l'equazione che calcola il tempo necessario ad M_2 a raggiungere il suolo: il radicando diventa infatti negativo.

Problema 2:

Un blocco fermo di massa $m = 0,2 \text{ kg}$ è appeso tramite un filo inestensibile al soffitto. Una seconda massa $M = 0,5 \text{ kg}$ viene lanciata contro il blocco con una velocità orizzontale, subendo un urto completamente anelastico. Subito dopo l'urto le due masse hanno una velocità anch'essa orizzontale pari a $V = 2,5 \frac{m}{s}$.

- Calcolare la velocità con cui M ha urtato m .
- Calcolare l'altezza massima raggiunta dalle due masse rispetto alla posizione iniziale.

Soluzione proposta

Schematizziamo il problema nella fig. 2, che mostra tre situazioni:

- $-t$: prima dell'urto
- 0 : urto anelastico
- t : massima altezza raggiunta

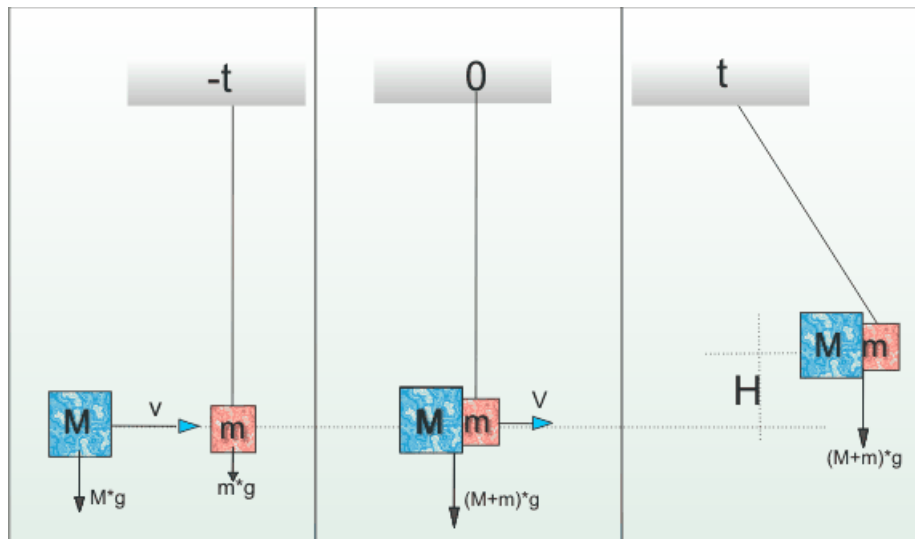


fig. 2

Applicando la conservazione del momento della quantità di moto, rispetto al punto di sospensione del filo, indicando con v la velocità della massa M abbiamo:

$$M \cdot v \cdot L = (M + m) \cdot V \cdot L$$

$$v = V \cdot \left(1 + \frac{m}{M}\right) = 2,5 \cdot 1,4 = 3,5 \frac{m}{s}$$

L'energia cinetica posseduta dalle due masse dopo l'urto è

$$\frac{1}{2} \cdot (M + m) \cdot V^2 = \frac{1}{2} \cdot 0,7 \cdot 6,25 = 2,19 J$$

Per la conservazione dell'energia meccanica l'energia cinetica si trasforma in energia potenziale, per cui avremo

$$\frac{1}{2} \cdot (M + m) \cdot V^2 = (M + m) \cdot g \cdot H$$

$$\Downarrow$$

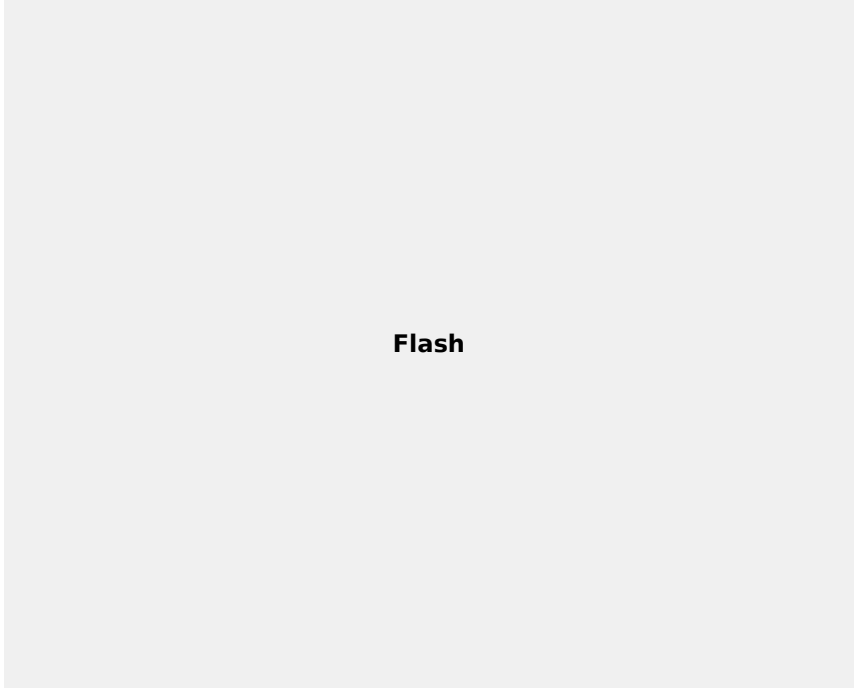
$$H = \frac{V^2}{2g} = \frac{6,25}{2 \cdot 9,8} = 0,64 m$$

Discussione

Il sistema fisico considerato è noto come **pendolo balistico**, anche se, nel caso dell'esercizio, le masse che collidono sono dello stesso ordine di grandezza, mentre nel pendolo balistico il proiettile ha una massa nettamente inferiore.

Si è applicato il teorema della conservazione del momento della quantità di moto in quanto il sistema delle due masse non è isolato. Esiste la reazione vincolare del filo che genera un impulso che determina una variazione della quantità di moto. Il momento dell'impulso rispetto al centro di sospensione è invece nullo. Ad ogni modo il risultato non è diverso se si applica la conservazione della quantità di moto poiché la reazione vincolare agisce perpendicolarmente alla velocità, quindi provoca una variazione della quantità di moto secondo l'asse perpendicolare: tant'è che le due masse si alzano, acquistano dunque velocità verso l'alto. In [Wikipedia](#) ad esempio si dice che viene applicata la conservazione della quantità di moto *trascurando l'azione di eventuali forze esterne nel corso del percorso*.

Ecco una comunque, per chi desiderasse entrare nei dettagli del pendolo balistico, lezione esemplare del prof. **Walter Lewin**



Flash

([in questa pagina il testo in inglese](#))

Problema 3:

Un blocco di massa $m = 2.5 \text{ kg}$ può scorrere su un piano inclinato di $\alpha = 45^\circ$ sull'orizzontale. Il blocco si trova inizialmente fermo a contatto con una molla a riposo di costante elastica $k = 100 \frac{\text{N}}{\text{m}}$.

Sia $n=0.4$ il coefficiente di attrito dinamico tra il blocco ed il piano.

Lasciato libero di muoversi il blocco comprime la molla.

- Calcolare la massima compressione della molla.
- Calcolare l'energia dissipata durante la compressione.

Soluzione proposta

Nella fig. 3 rappresentiamo la situazione mettendo in evidenza tutte le forze in gioco:

- **Forza elastica:** $F = -k \cdot x$ (asse x parallelo al piano inclinato ed orientato nel senso del moto; origine nel punto di riposo della molla; la forza ha dunque intensità pari a $k \cdot x$ ed è orientata in senso opposto all'asse x).
- **Forza peso:** $F_P = m \cdot g$;

- **Reazione vincolare:** $N = m \cdot g \cos \alpha$: perpendicolare al piano inclinato, vincolo liscio;
- **Forza di attrito:** $F_a = n \cdot N$;

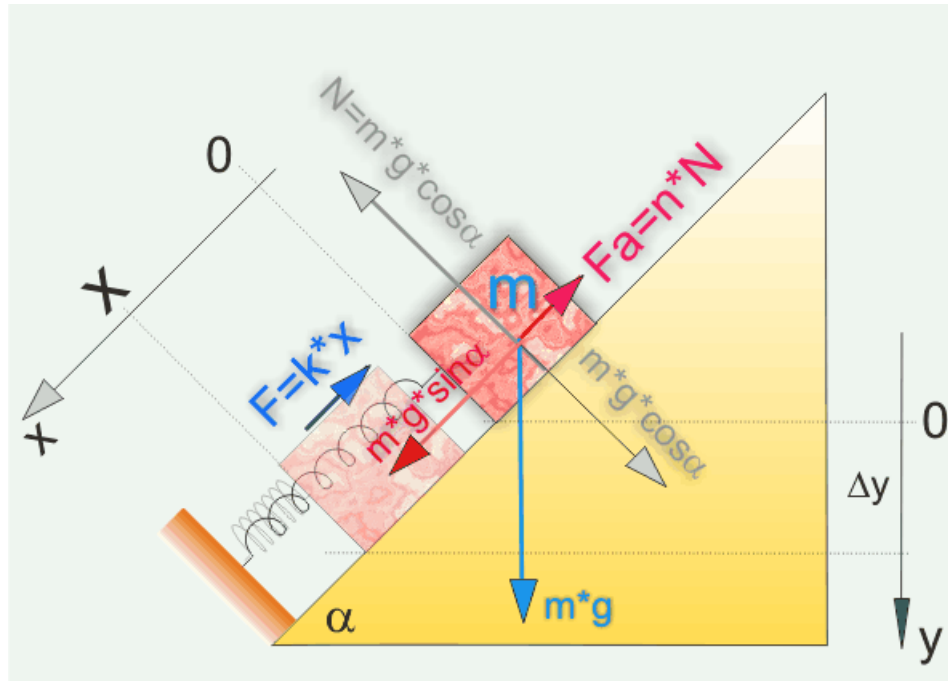


fig.3

La massima compressione della molla si ha quando l'energia in essa immagazzinata è uguale alla variazione dell'energia potenziale della massa, diminuita del lavoro necessario per vincere l'attrito

$$\frac{1}{2}k \cdot x^2 = m \cdot g \cdot \Delta y - F_a \cdot x$$

$$\Delta y = x \cdot \sin \alpha$$

$$F_a = n \cdot N = n \cdot m \cdot g \cdot \cos \alpha$$

$$\frac{1}{2}k \cdot x^2 = m \cdot g \cdot x \cdot \sin \alpha - n \cdot m \cdot g \cdot \cos \alpha \cdot x$$

$$\frac{1}{2}k \cdot x = m \cdot g \cdot \sin \alpha - n \cdot m \cdot g \cdot \cos \alpha = m \cdot g \cdot (\sin \alpha - n \cdot \cos \alpha)$$

$$x = \frac{2 \cdot m \cdot g \cdot (\sin \alpha - n \cdot \cos \alpha)}{k} = \frac{2 \cdot 2,5 \cdot 9,8 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 0,4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{100} =$$

$$= 0,49 \cdot 0,707 \cdot 0,6 = 0,208m$$

L'energia persa durante la compressione corrisponde al lavoro della forza d'attrito

$$\begin{aligned} W_d &= F_a \cdot x = m \cdot g \cdot n \cdot \cos \alpha \cdot \frac{2 \cdot m \cdot g \cdot (\sin \alpha - n \cdot \cos \alpha)}{k} = \\ &= \frac{2 \cdot m^2 \cdot g^2 \cdot n \cdot (\cos \alpha \cdot \sin \alpha - n \cdot \cos^2 \alpha)}{k} \\ &= \frac{2 \cdot 6,25 \cdot 96,04 \cdot 0,4}{100} \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,6 = 1,44J \end{aligned}$$

Discussione

Nella posizione di massima compressione la molla esercita una forza $F = k \cdot x = 100 \cdot 0,208 = 20,8 \text{ N}$

La forza è contrastata dalla componente del peso secondo l'asse x $F_x = m \cdot g \cdot \sin \alpha = 2,5 \cdot 9,8 \cdot 0,707 = 17,3 \text{ N}$

La differenza tra le due forze è $F - F_x = 3,5 \text{ N}$. Se supera la forza di attrito statico la massa si sposta di nuovo verso l'alto.

La forza di attrito statico si calcola come quella dell'attrito dinamico ed in genere è superiore. In questo caso la forza di attrito dinamico è già superiore per cui la massa rimane nella posizione raggiunta: $F_a = n \cdot m \cdot g \cdot \cos \alpha = 0,4 \cdot 2,5 \cdot 9,8 \cdot 0,707 = 6,9 \text{ N}$

Problema 4:

Un blocco di massa $m_1 = 3.0 \text{ Kg}$ si muove su un piano orizzontale liscio ed è trainato da una forza $F = 10 \text{ N}$. Sopra il blocco è posta una massa $m_2 = 0.5 \text{ Kg}$; fra il blocco e la massa esiste attrito con coefficiente pari a $n = 0.6$.

- Calcolare l'accelerazione del sistema nell'ipotesi che m_2 non si muova rispetto a m_1 .
- Calcolare la forza massima applicabile a m_1 affinché i due blocchi continuino a muoversi insieme.

Soluzione proposta

Rappresentiamo la situazione in fig. 4

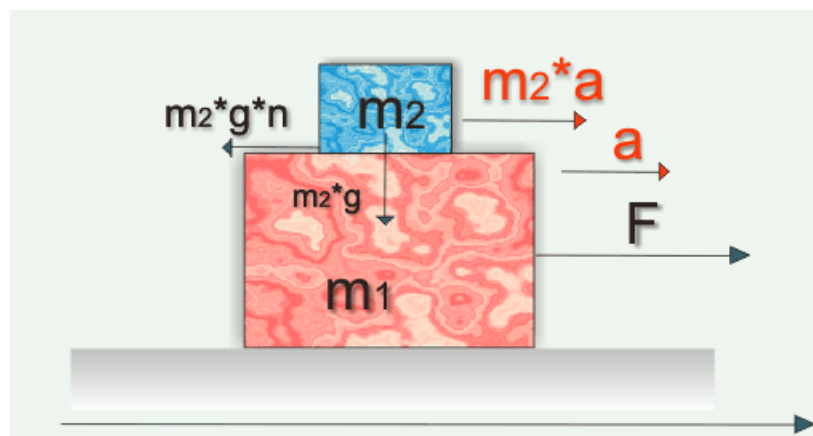


fig. 4

Poiché sotto l'azione della forza F di 10 N i due blocchi si muovono uniti, l'accelerazione di entrambi è data da

$$a = \frac{F}{m_1 + m_2} = \frac{10}{3,5} = 2,857 \frac{m}{s^2}$$

La massima forza che si può applicare affinché i corpi rimangano uniti è quella per la quale l'accelerazione determina sulla massa m_2 una forza inferiore alla forza di attrito. Deve cioè essere

$$m_2 \cdot a \leq m_2 \cdot g \cdot n$$

quindi

$$a \leq g \cdot n = 9,8 \cdot 0,6 = 5,88 \frac{m}{s^2}$$

La forza massima applicabile è perciò

$$F_{max} = (m_1 + m_2) \cdot a = 3,5 \cdot 5,88 = 20,6 \text{ N}$$

Estratto da "<http://www.electroyou.it/mediawiki/index.php?title=UsersPages:Admin:articolo39>"