



Zeno Martini (admin)

LETTURE DI ELETTROSTATICA - PRIMA PARTE

10 August 2009

Introduzione

I **fenomeni elettrostatici** sono stati osservati fin dall'antichità, tant'è che elettricità deriva, come noto, dal nome greco dell'**ambra**. L'**elettrotecnica**, cioè la tecnica per sfruttare i fenomeni elettromagnetici, ha poco più di due secoli di vita. I fenomeni elettrostatici non sono certo scomparsi, com'è logico, ma, per un elettrotecnico, sembrano, come dire, relegati in secondo piano, come se servissero solo a ricordare le origini. Il **condensatore** ne è il componente-fulcro, ed una recente discussione nel forum mi ha costretto ad un ripasso dell'elettrostatica, che ho pensato di riassumere in qualche articolo. Questo è il primo.

Elettrostatica: cosa studia

E' opportuno comprendere di cosa ci si occupa con precisione. Consultando un dizionario, troviamo ciò che ci aspettiamo: l'**elettrostatica** è la parte dell'elettrologia relativa ai fenomeni cui danno luogo le **cariche elettriche in quiete** (Devoto-Oli). Però non è una definizione soddisfacente e richiede senz'altro precisazioni sulle cariche elettriche di cui si parla e sulla loro quiete.

Abbiamo ormai una discreta conoscenza della materia e sappiamo che essa è costituita da atomi, a loro volta costituiti da particelle elettricamente cariche, i **protoni** e gli **elettroni**, e di particelle neutre, i **neutroni**. I fenomeni elettrici sono dovuti alle particelle cariche, in particolare gli elettroni, cui convenzionalmente è stata attribuita una carica negativa. Carica che, in valore assoluto, è perfettamente identica a quella del protone. Non c'è ancora alcuna dimostrazione sulla necessità di questa uguaglianza, però è una delle ipotesi su cui si basa l'attuale teoria dell'elettromagnetismo, verificata sperimentalmente fino alla quindicesima cifra significativa. I protoni sono concentrati nel nucleo dell'atomo, insieme ai neutroni che permettono loro di stare insieme; il nucleo occupa un volume che possiamo assimilare ad un cubetto di lato $l_n = 10^{-14} m$.

Gli elettroni che completano l'atomo, sono in numero esattamente uguale a quello dei protoni, per cui l'atomo è elettricamente neutro. Sono piccolissimi (il volume occupato da un elettrone è stimato in un cubetto di lato $4 \cdot 10^{-18} m$) e si muovono vorticosamente attorno al nucleo, ma non si riesce a stabilire con precisione in quale posizione siano. Delle loro traiettorie si può solo determinare la probabilità, che definisce un volume entro cui l'elettrone ha la possibilità di trovarsi. Si parla infatti di **orbitali** e non di orbite. Il volume occupato dagli orbitali di un atomo, quindi il volume di un atomo è dell'ordine di un cubetto di lato $l_a = 10^{-10} m$. L'insieme degli orbitali di un atomo forma come una nuvoletta attorno al nucleo.

Grossomodo allora in un metro cubo di materia ci sono $n_a = \frac{1}{(10^{-10})^3} = 10^{30}$ atomi.

L'elettrostatica non si occupa dei fenomeni elettrici interni all'atomo, dove le cariche presenti sono tutt'altro che in quiete, ma si occupa delle cariche nette che possono assumere aggregati di un enorme numero di atomi, fondamentalmente per migrazione di elettroni da un aggregato ad un altro. Si occupa, dunque, delle proprietà medie possedute tali aggregati, nell'ipotesi che tali proprietà medie si mantengano costanti nel tempo o lentamente variabili.

Si dice allora che l'elettrostatica si occupa delle cariche a livello macroscopico.

Il livello microscopico è il livello atomico.

Il punto elettrostatico o, con più precisione, il volume infinitesimo dell'elettrostatica, è senz'altro un volume piccolissimo come accesso per i normali strumenti di misura, ma enormemente maggiore del volume di un atomo, in modo che in esso ci siano moltissimi atomi. Tanto per esemplificare potremmo considerare tale un cubetto di lato pari ad un millesimo di millimetro. In esso infatti ci sono $n = n_a \cdot V = 10^{30} \cdot (10^{-6})^3 = 10^{12}$ atomi

Definizioni, concetti, teoremi

- L'unità di misura della carica elettrica nel sistema internazionale (SI) è il **coulomb**: C
- Le cariche elettriche producono nello spazio che le circonda un campo elettrico.

Il **campo elettrico** in un punto è la forza che agisce sull'unità di carica positiva posta in quel punto. Si misura perciò in $\frac{\text{N}}{\text{C}}$

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$

- Il campo elettrico prodotto da una **carica puntiforme** Q in un punto, è proporzionale alla carica, inversamente proporzionale al quadrato della distanza dalla carica, diretto secondo la congiungente carica-punto, uscente dalla carica se positiva, entrante se negativa

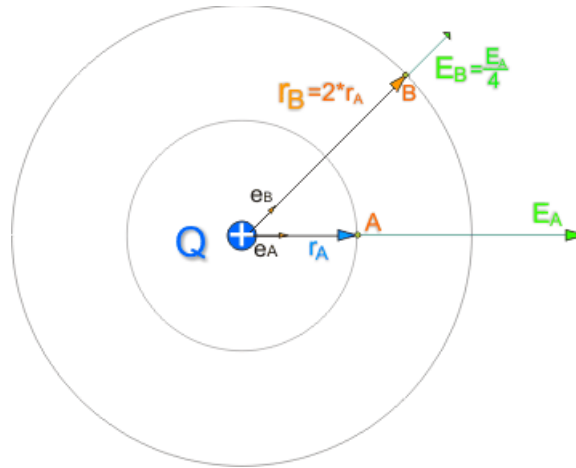
$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon \cdot r^2} \cdot \vec{e}$$

$$\vec{e} = \frac{\vec{r}}{r}$$

\vec{r} vettore congiungente carica e punto, orientato come la forza

\vec{e} **versore** della congiungente

ϵ costante dielettrica del mezzo che occupa la spazio



Campo elettrico di una carica puntiforme

- il campo elettrico è **conservativo**, cioè il lavoro per spostare una carica da un punto ad un altro dipende solo dal punto di partenza e da quello di arrivo. E' perciò definibile per ogni punto, a meno di una costante, un potenziale, V . La differenza di potenziale tra il punto di partenza e quello di arrivo, detta tensione elettrica, rappresenta il lavoro delle forze del campo per spostare l'unità di carica positiva.

$$U_{AB} = \frac{L_{AB}}{Q} = V_A - V_B$$

L'unità di misura del potenziale è il **volt**: $V = \frac{J}{C}$

Nota: generalmente si pone uguale a zero il potenziale dell'infinito: $V_\infty = 0$ per cui il potenziale di un punto può essere interpretato come il lavoro fatto dalle forze del campo per portare la carica unitaria infinitamente distante da quel punto.

- Il campo elettrico è il **gradiente** del potenziale, cambiato di segno. Il gradiente del potenziale è un vettore le cui componenti secondo gli assi coordinati, sono costituite dalle derivate parziali del potenziale rispetto a ciascun asse:

$$\vec{E} = -\text{grad}V$$

$$\text{grad}V = \vec{i} \cdot \frac{\partial V}{\partial x} + \vec{j} \cdot \frac{\partial V}{\partial y} + \vec{k} \cdot \frac{\partial V}{\partial z} = \nabla V$$

Ricordiamo che ∇ (**nabla**) è un operatore definito da

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \cdot \vec{k}$$

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ sono i versori degli assi cartesiani x, y, z

La precedente definizione fornisce un nuovo modo, il più usato, per esprimere l'unità di misura del campo elettrico, (che non ha comunque un nome proprio): $\frac{V}{m}$

- La **divergenza** del campo elettrico in un punto è uguale alla densità di carica diviso la costante dielettrica

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon}$$

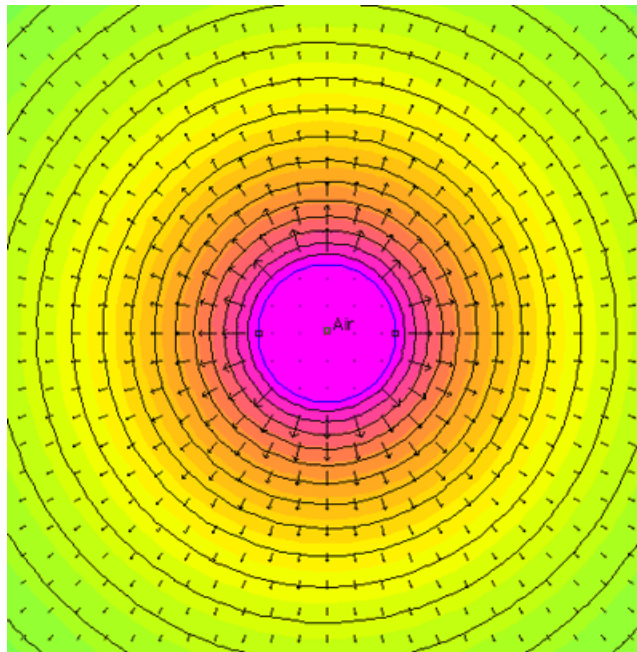
che, in coordinate cartesiane diventa:

$$-\nabla \cdot \vec{E} = \nabla \cdot \text{grad}V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

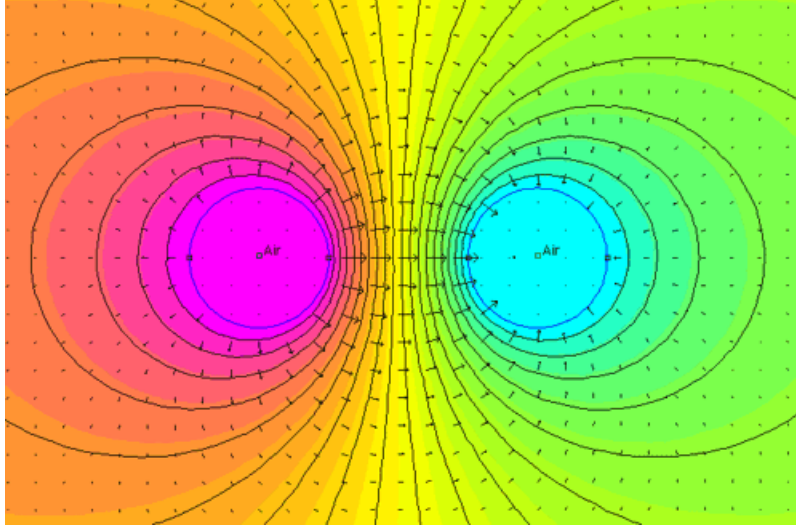
che assume il nome di **equazione di Poisson**

Essa permette di determinare la funzione potenziale nota la distribuzione di carica, quindi in pratica di determinare in ogni punto il campo elettrico. L'integrazione dell'equazione in genere non è possibile eseguirla esplicitamente. Metodi numerici con l'ausilio di adeguato software su computer consentono però di ottenere una rappresentazione grafica del campo.

Vengono tracciate le superfici equipotenziali e le linee di forza del campo, che hanno origine nelle cariche positive (*sorgenti*) e finiscono nelle cariche negative (*pozzi*), sono ad esse perpendicolari. Ecco ad esempio due campi tracciati con **FEMM**



Carica Q distribuita su una superficie sferica



Carica $+Q$ e $-Q$ distribuite su due superfici sferiche

Dove le linee equipotenziali sono più fitte, il campo è più intenso (**FEMM** rappresenta il campo con frecce proporzionali al suo valore)

Se $\rho = 0$ l'equazione diventa

$$\nabla^2 = 0$$

nota come **equazione di Laplace**. Le soluzioni dell'equazione di Laplace sono dette **funzioni armoniche**. Esse sono completamente definite in una regione se se ne conosce il valore sul contorno che delimita la regione. Se della funzione si conosce la derivata in direzione perpendicolare al contorno, la funzione è nota a meno di una costante. Il valore di una funzione armonica in un punto è la media dei valori che la funzione assume nei punti di una sfera concentrica con il punto, per cui i massimi ed i minimi della funzione sono localizzati sul contorno.

- L'equazione di Poisson è la forma puntuale assunta dal **teorema di Gauss** che dice:

il flusso del campo elettrico che attraversa una superficie chiusa è uguale alla carica in essa racchiusa diviso per la costante dielettrica

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon}$$

- Il prodotto del campo elettrico per la costante dielettrica è denominato *spostamento elettrico* ed ha le dimensioni di una densità di carica superficiale: $\frac{C}{m^2}$

$$\vec{D} = \epsilon \cdot \vec{E}$$

- Il **rotore** di un gradiente è nullo. Quindi

$$rot \vec{E} = \nabla \times \vec{E} = 0$$

(NB: per saperne di più sul rotore dare un'occhiata a [questo trd](#))

Il campo elettrico (statico) si dice perciò *irrotazionale* che è una formulazione diversa di campo conservativo anche se, l'irrotazionalità è solo una [condizione necessaria](#), ma non sufficiente per affermare che un campo è conservativo.

Conservazione della carica

La teoria dell'elettromagnetismo, di cui l'elettrostatica fa parte, si basa sul principio di conservazione della carica elettrica.

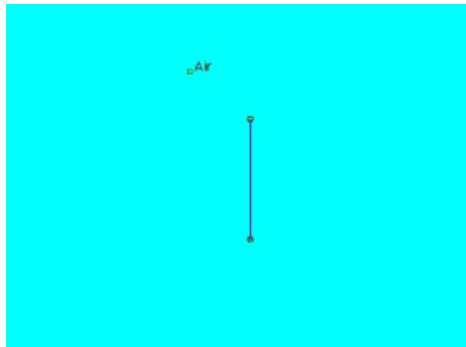
Quando si considera un corpo elettricamente carico, non bisogna pensare che la carica sia venuta dal nulla.

Essa è stata invece separata da un altro corpo che ha assunto carica opposta. Se il corpo da cui la carica è stata separata non compare esplicitamente nel problema che stiamo affrontando, occorre ipotizzare che la carica che manca sia infinitamente distante, ma mai pensare che non esista.

La separazione delle cariche genera nello spazio interposto un campo elettrico.

Può (forse...) essere utile un'immagine di questo tipo. Ogni carica positiva è legata ad una carica negativa uguale. Quando sono intimamente vicine, all'esterno non c'è nulla, ma quando vengono separate, la "colla" che le tiene legate, diventa "visibile" trasformandosi in "fili" che continuano a collegarle diffondendosi in tutto lo spazio: questi "fili" sono le linee di forza del campo elettrico.

L'animazione seguente mostra come "la colla-campo", appaia e si diffonda nello spazio mantenendo il collegamento tra due lastre, cariche con cariche uguali ed opposte, che si allontanano



Anche nei processi studiati dalla **fisica delle particelle** la carica si conserva.

E' stata dimostrata l'esistenza di antimateria, ad esempio, caratterizzata dall'aver protoni ed elettroni di carica opposta a quella della materia.

- L'elettrone positivo dell'antimateria, detto positrone, fa sparire un elettrone della materia dando origine a due fotoni privi di carica elettrica.

- Un fotone può materializzarsi in un elettrone ed un positrone.
- Un neutrone si può scomporre in un protone, un elettrone ed un neutrino (neutro elettricamente).

Numeri e confronti

I valori

delle cariche e delle masse delle particelle elementari sono:

$$e = -1,602 \cdot 10^{-19} C$$

$$p = +1,602 \cdot 10^{-19} C$$

$$n = 0 C$$

$$m_e = 9,109 \cdot 10^{-31} kg$$

$$m_p = 1,672 \cdot 10^{-27} kg$$

$$m_n = 1,674 \cdot 10^{-27} kg$$

$$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{Nm}: \text{costante dielettrica del vuoto}$$

Forza elettrica e forza gravitazionale

- Due cariche, Q_1 e Q_2 distanti d si attraggono (se opposte) si respingono (se dello stesso segno) con una forza che ha la direzione della congiungente data da

$$F_{el} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{d^2}$$

E' la **legge di Coulomb** formalmente analoga alla **legge di gravitazione di Newton**,

$$F_{grav} = \gamma \cdot \frac{M_1 \cdot M_2}{d^2}$$

$$\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2} \text{ costante di gravitazione}$$

con la differenza che la forza gravitazionale è sempre attrattiva.

Interessante il confronto tra le due forze. Immaginiamo l'interazione tra un protone ed un elettrone.

Il rapporto tra forza elettrica e forza gravitazionale vale

$$\frac{F_{el}}{F_{grav}} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \cdot \gamma \cdot m_e \cdot m_p} = 10^{39}$$

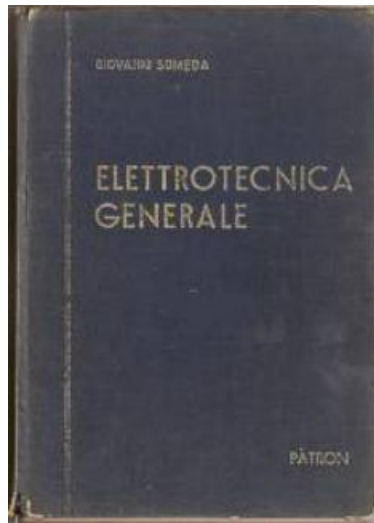
Il fatto che i corpi materiali materiali siano neutri, giustifica la considerazione della sola forza di gravitazione a livello cosmico.

Tra l'altro che i corpi siano neutri è una garanzia del fatto che, oltre ad essere in egual numero, le cariche elementari positiva e negativa, abbiano valore assoluto perfettamente identico. Se non lo fosse si manifesterebbe una forza di repulsione tra i corpi e basterebbe una piccolissima differenza, per una forza enormemente maggiore della gravitazione. Tanto per fare un esempio: due sfere di ferro da 1 kg distanti un metro si attirano per gravitazione con una forza pari a γN . Se la carica del protone fosse maggiore di un miliardesimo di quella dell'elettrone, le sfere, entrambe positive, si respingerebbero con una forza $F = 1,8 \cdot 10^7 N$. Ognuna di esse è infatti costituita da $1,1 \cdot 10^{25}$ atomi ed ogni atomo ha 26 protoni (ed altrettanti elettroni).

Bibliografia di riferimento



Elettromagnetismo-Alessandro Bettini



Elettrotecnica generale - Giovanni Someda

Estratto

da

"<https://www.electroyou.it/mediawiki/index.php?title=UsersPages:Admin:articolo44>"