



Zeno Martini (admin)

CONDENSATORI E SIMMETRIA

13 September 2009

Abstract

Come anticipato nella conclusione dell'articolo "Lecture di Elettrostatica n. 3" analizzeremo qui la formula proposta da [Bruno Valente](#) per calcolare la **tensione tra due armature qualsiasi con carica diversa**. Vedremo che esso dipende unicamente dalla **struttura geometrica delle armature** e vedremo come calcolarlo.

La formula proposta è

$$U = \frac{Q_1 \cdot (1 - K) - K \cdot Q_2}{C} [1]$$

dove U è la tensione tra le armature, C la loro capacità, Q_1 e Q_2 le cariche su di esse.

Teoria

La linearità dell'equazione di Laplace consente di affermare che i potenziali delle armature sono combinazioni lineari delle cariche su di esse.

Si può perciò scrivere:

$$\begin{aligned} V_1 &= p_{11} \cdot Q_1 + p_{12} \cdot Q_2 \\ V_2 &= p_{21} \cdot Q_1 + p_{22} \cdot Q_2 \end{aligned}$$

dove p_{ij} sono detti

coefficienti di potenziale

definiti operativamente da

$$\begin{aligned}
 p_{11} &= \left. \frac{V_1}{Q_1} \right|_{Q_2=0} \\
 p_{22} &= \left. \frac{V_2}{Q_2} \right|_{Q_1=0} \\
 p_{12} &= \left. \frac{V_1}{Q_2} \right|_{Q_1=0} \\
 p_{21} &= \left. \frac{V_2}{Q_1} \right|_{Q_2=0}
 \end{aligned} \quad [2]$$

Essi sono indipendenti dalla carica, dipendenti cioè unicamente dalla geometria delle armature, nonché dalla costante dielettrica del mezzo interposto che assumeremo essere l'aria, e soddisfano sempre alla **relazione di simmetria**

$$p_{12} = p_{21}$$

il che significa che, una carica Q su di un'armatura determina il potenziale V sull'altra, indipendentemente dall'armatura su cui si trova.

La capacità C può essere dedotta da tali coefficienti.

Ponendo infatti $Q_1 = Q; Q_2 = -Q$ si ha:

$$\begin{aligned}
 V_1 &= (p_{11} - p_{12}) Q \\
 V_2 &= (p_{21} - p_{22}) Q
 \end{aligned}$$

Quindi

$$U = V_1 - V_2 = Q \cdot (p_{11} + p_{22} - 2 \cdot p_{12}) \quad [3]$$

da cui

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{1}{p_{11} + p_{22} - 2 \cdot p_{12}} \quad [4]$$

Dal confronto della [1] con la [3]

eguagliando i coefficienti di Q

$$p_{11} - p_{21} = \frac{1 - K}{C} \rightarrow K = 1 - C \cdot (p_{11} - p_{21})$$

$$K = 1 - \frac{p_{11} - p_{21}}{p_{11} + p_{22} - 2 \cdot p_{12}} = \frac{p_{11} + p_{22} - 2 \cdot p_{12} - p_{11} + p_{21}}{p_{11} + p_{22} - 2 \cdot p_{12}}$$

$$K = \frac{p_{22} - p_{12}}{p_{11} + p_{22} - 2 \cdot p_{12}} [5]$$

oppure, eguagliando i coefficienti di Q_2

$$p_{22} - p_{12} = -\frac{K}{C} \rightarrow K = C \cdot (p_{22} - p_{12}) = \frac{p_{22} - p_{12}}{p_{11} + p_{22} - 2 \cdot p_{12}}$$

In definitiva il K della formula è una funzione dei coefficienti di potenziale, quindi dipende unicamente dalla geometria delle armature.

Osservazione: la struttura è **perfettamente simmetrica** quando

$$p_{11} = p_{22}$$

per cui si ha

$$K = 0.5$$

In tal caso la stessa carica provoca sempre lo stesso potenziale sull'armatura in cui si trova, con l'altra scarica, indipendentemente dall'armatura.

Il problema è allora calcolare i coefficienti di potenziale

Sperimentalmente sono determinabili con le relazioni [1] che li definiscono. Oppure si possono calcolare, sempre mediante le [1] ricorrendo al calcolo numerico mediante calcolatore.

Teoricamente si calcolano con

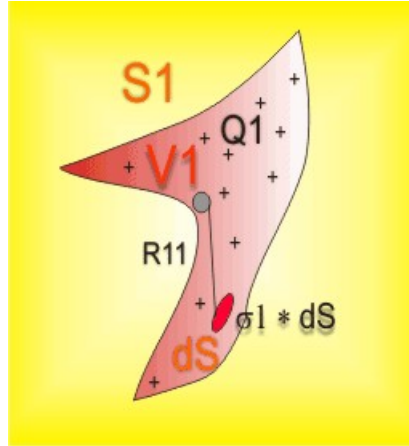
$$p_{ij} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 S_j} \cdot \int_{S_j} \frac{f_j}{R_{ji}} \cdot dS$$

dove

R_{ij} è la distanza tra un qualunque punto dell'armatura i e l'area infinitesima dS dell'armatura j di area S_j .

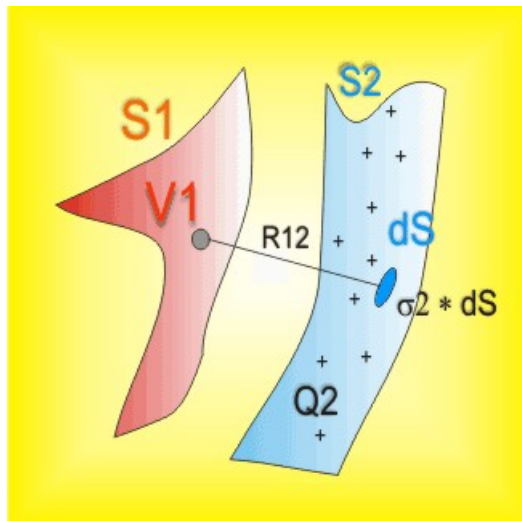
σ_j è la densità effettiva superficiale dell'areola dS dell'armatura j $f_j = \frac{\sigma_j}{\sigma_{media,j}}$

$\sigma_{media,j} = \frac{Q_j}{S_j}$: è la densità di carica superficiale media sull'armatura j



Calcolo di p_{11}

$$p_{11} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 S_1} \cdot \int_{S_1} \frac{f_1}{R_{11}} \cdot dS$$

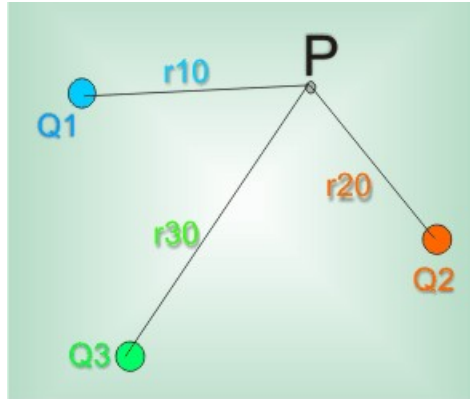


Calcolo di p_{12}

$$p_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 S_2} \cdot \int_{S_2} \frac{f_2}{R_{12}} \cdot dS$$

La dimostrazione

deriva dal fatto che il potenziale in un punto dovuto a più cariche puntiformi è dato dalla somma dei potenziali prodotti in quel punto dalle singole cariche, una conseguenza della linearità dell'equazione di Laplace. Quindi, ad esempio, il potenziale nel punto P dovuto alle tre cariche di figura



tre cariche

$$\text{è dato da } V_P = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 \cdot r_{10}} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 \cdot r_{20}} + \frac{Q_3}{4\pi\epsilon_0 \cdot r_{30}}$$

avendo posto a 0 il potenziale all'infinito.

Per n cariche si avrà

$$V_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{r_{i0}}$$

mentre per una distribuzione superficiale σ , funzione dei punti della superficie, assimilando un'areola dS ad una carica pari a $\sigma \cdot dS$, si avrà

$$V_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_S \frac{\sigma}{r_0} \cdot dS$$

con r_0 pure funzione dei punti della superficie.

Ponendo allora

$$\sigma_{media} = \frac{Q}{S}$$

$$f = \frac{\sigma}{\sigma_{media}}$$

si può scrivere

$$V_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_S \frac{f \cdot \sigma_{media}}{r_0} \cdot dS = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_S \frac{f \cdot \frac{Q}{S}}{r_0} \cdot dS =$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{S} \cdot \int_S \frac{f}{r_0} \cdot dS$$

$$\text{quindi ricavare il coefficiente di potenziale del punto P } p = \frac{V_P}{Q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 \cdot S} \cdot \int_S \frac{f}{r_0} \cdot dS$$

che dipende unicamente dalla geometria della superficie, oltre che dalla costante dielettrica.

Il calcolo, in pratica

Come si vede il calcolo teorico è proibitivo analiticamente. Ma, come al solito ormai, ci viene in soccorso il programma di simulazione FEMM con il quale si possono determinare tutti i parametri che si desiderano.

Mostreremo alcuni esempi in cui, definite le armature, sono dapprima caricate con carica uguale ed opposta per determinare nel modo classico la capacità. Successivamente si carica l'una e si lascia scarica l'altra, determinando i coefficienti di potenziale con le definizioni operative per per essi date inizialmente [1]. Quindi con tali coefficienti si ricalcola la capacità con la [4] ed il K con la [5]

Ecco i risultati dei calcoli effettuali con le

Simulazioni

dell'insostituibile [FEMM](#)

Alle armature sono imposte cariche arbitrarie di 10 nC. Dapprima una opposta

all'altra per determinare il valore della capacità della struttura:

$$C = \frac{Q}{U}$$

$$Q_1 = -Q_2 = Q$$

$$U = V_1 - V_2$$

Quindi alternativamente è imposta la carica positiva di 10 nC ad una armatura mentre l'altra è scarica per determinare i coefficienti di potenziale.

Il calcolo di K è effettuato in due modi con la formula $K = \frac{Q_1 - C \cdot U}{Q_1 + Q_2}$

e l'altro per mezzo dei coefficienti

- Le condizioni al contorno sono imposte tali da simularne l'assenza (Mixed)
- Per ogni situazione viene mostrato l'andamento delle superfici equipotenziali.

Le tabelle mostrano

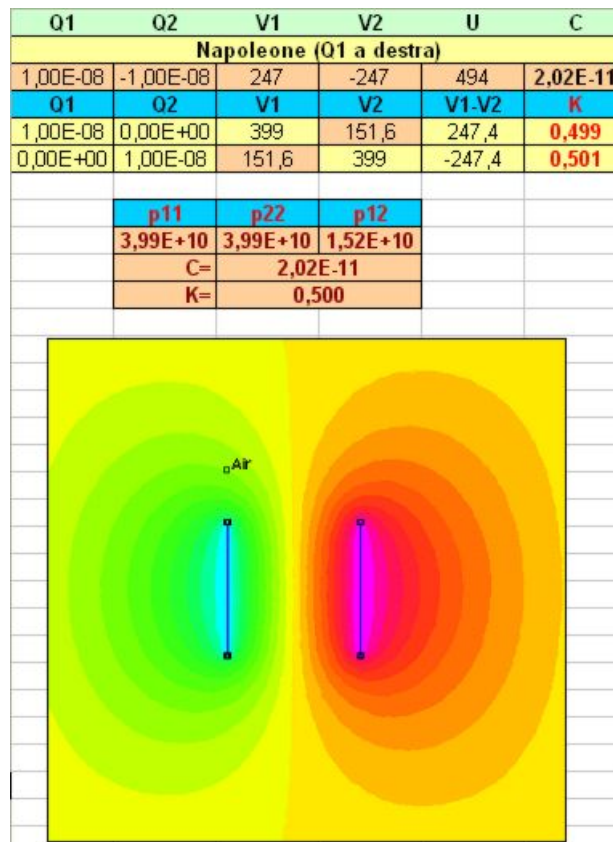
- il calcolo della capacità C nella prima riga (in farad);
- le cariche imposte, Q_1 e Q_2 (in coulomb);
- il potenziale assunto dalle armature V_1 e V_2 (in volt);
- la differenza di potenziale $V_1 - V_2$ (volt);
- il coefficiente K calcolato
- i coefficienti di potenziale

Strutture simmetriche

Armature piane

$$S = 200 \times 1000 \text{ mm}$$

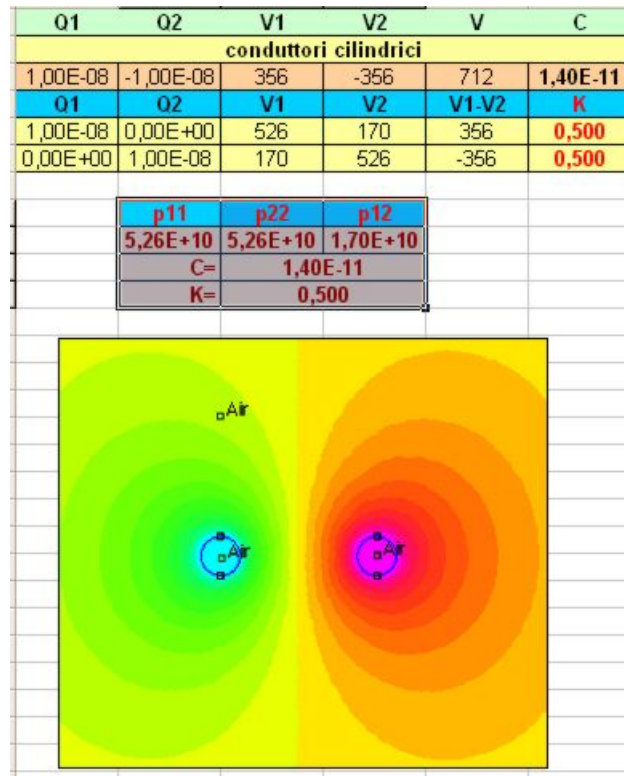
$$d = 200 \text{ mm}$$



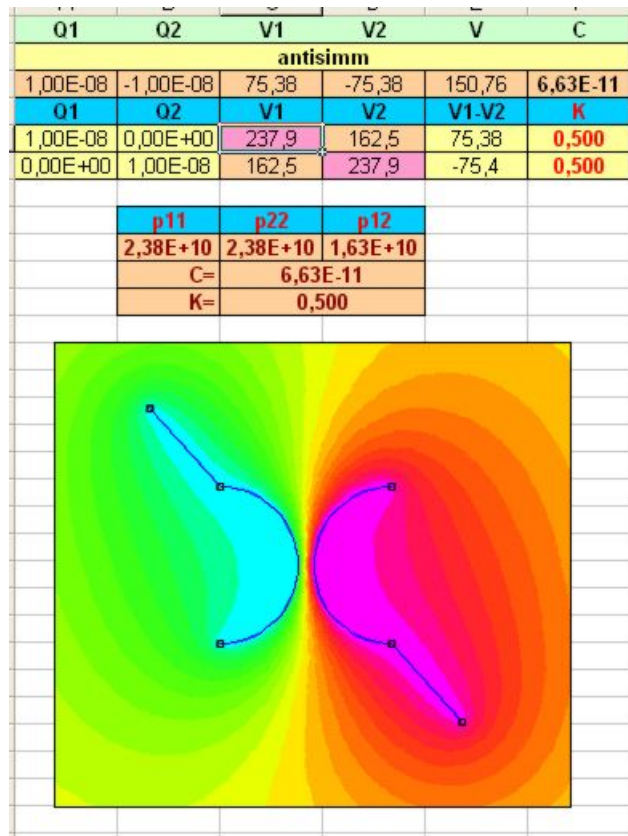
Simm_1

Cilindri paralleli

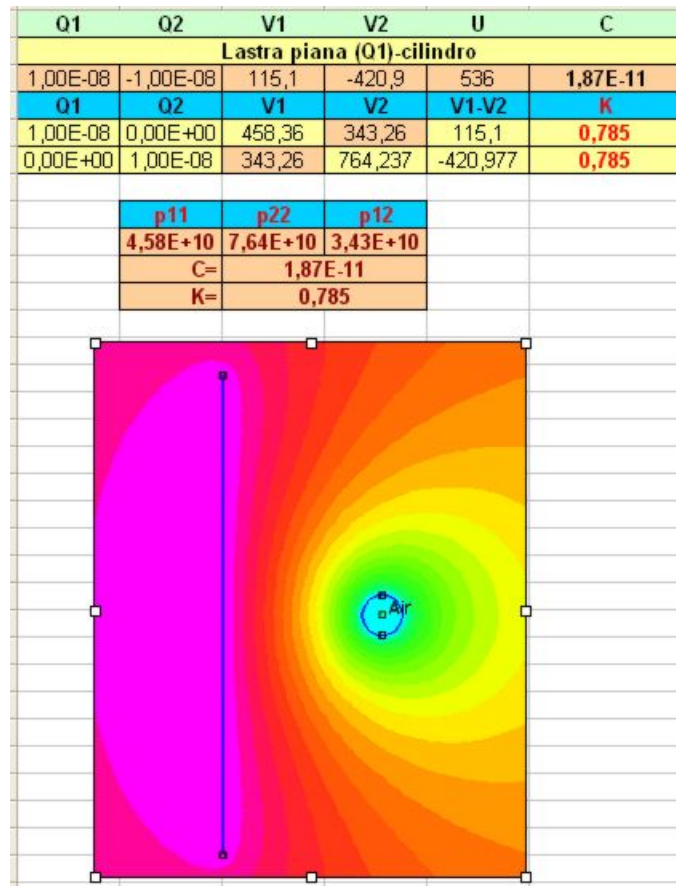
- $L = 1000 \text{ mm}$
- $r = 25 \text{ mm}$
- $D = 200 \text{ mm}$



Simm_2

Semicilindri con lastra piana*Simm_3***Strutture asimmetriche***Cilindro-lastra piana*

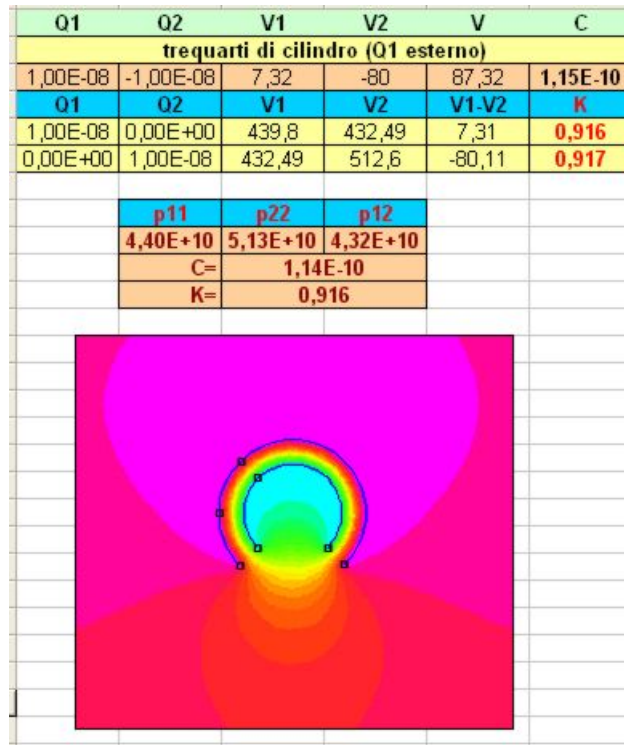
- $L = 1000\text{ mm}$
- $H = 600\text{ mm}$
- $r = 25\text{ mm}$
- $d = 200\text{ mm}$



ASimm_1

tre quarti di 2 cilindri coassiali

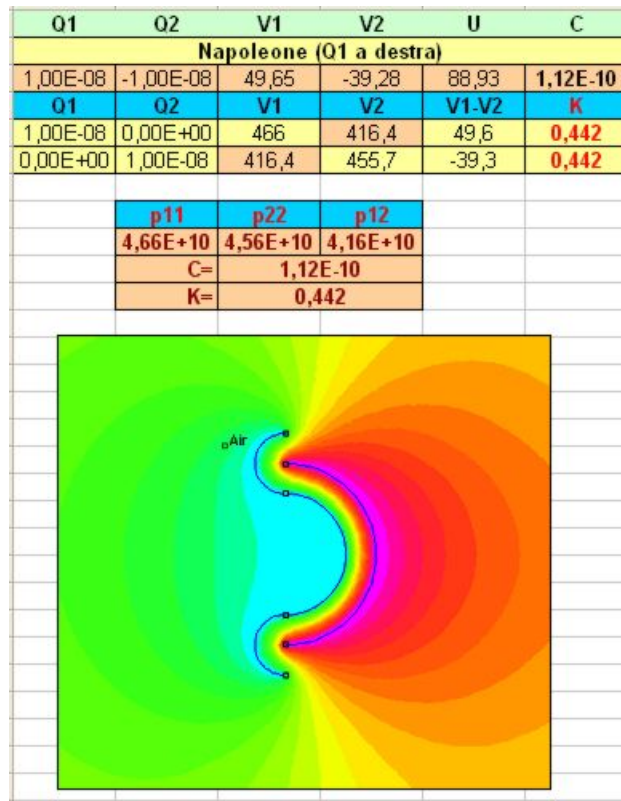
- $L = 1000\text{ mm}$
- $r_1 = 150\text{ mm}$
- $r_2 = 100\text{ mm}$



ASimm_2

Cappello di Napoleone

- $L = 1000\text{ mm}$
- $r_1 = 150\text{ mm}$
- $r_2 = 100\text{ mm}$
- $r_3 = 50\text{ mm}$



ASimm_3

Conclusione

L'intuizione di [Bruno Valente](#) è allora corretta ed il fondamento del suo **coefficiente di simmetria** K è nell'equazione di Laplace.

Esso risulta ricavabile dai coefficienti di potenziale, però, a differenza di questi, *non cambia modificando la scala*, quindi ne definisce la forma.

- $K = 0,5$ indica *armature simmetriche*; la simmetria, quando l'induzione è completa, fa sì che le superfici equipotenziali che circondano un'armatura abbiano identica forma delle superfici equipotenziali che circondano l'altra.
- $K \neq 0,5$ indica *armature dissimetriche*;
- $0,5 < K \leq 1$: l'armatura su cui sta la carica Q_2 influire maggiormente sulla tensione tra le armature e per $k = 1$, totalmente; in tal caso l'armatura con Q_2 è interna all'armatura con Q_1 .
- $0 \leq K < 0,5$ è Q_1 ad influire maggiormente sulla tensione tra le armature; per $k = 0$ totalmente, e l'armatura con Q_1 è interna a quella con Q_2

Riferimenti

- [Wikipedia-coefficienti di potenziale](#)



Elettromagnetismo-Alessandro Bettini

Estratto da "<http://www.electroyou.it/mediawiki/index.php?title=UsersPages:Admin:articolo46>"