



Zeno Martini (admin)

EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI A COEFFICIENTI COSTANTI

28 January 2012

Premessa

Chissà qual è la didattica migliore per un argomento di matematica come questo. Qualche tempo fa per risolvere un'equazione differenziale occorreva faticare molto. Ora si va nel sito di [WolframAlpha](#), si scrive l'equazione, si clicca sul pulsante "=" e si hanno, in pochi secondi, soluzioni analitiche, grafici, e perfino i passaggi, con tante altre informazioni.

Insomma presentare le cose come una volta sembra tempo perso. Però è il tempo che bisogna "perdere", sia per capire ed apprezzare ciò che fa WolframAlpha, sia per accettarne con coscienza i risultati.

Ho preso perciò un testo di matematica classico, lo [Zwirner](#), per questa piccola lezione sulle equazioni differenziali a coefficienti costanti, fondamentali nell'analisi dei circuiti elettrici e dei sistemi fisici in genere. Ovviamente verificando poi gli esercizi con WolframAlpha

Generalità

Il modello matematico di un qualsiasi sistema fisico in regime variabile conduce alla scrittura di una o più equazioni differenziali. Un'equazione differenziale ordinaria è un'equazione che stabilisce un legame tra una funzione incognita $y = y(t)$ di una variabile t , le sue derivate, e la variabile t stessa. L'ordine, n , dell'equazione è quello della derivata più alta. Può essere scritta nella forma

$$F(t, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

Ogni funzione che soddisfa il legame, è detta soluzione o **integrale dell'equazione**. Risolvere l'equazione significa trovare tutte le soluzioni.

L'equazione si dice in **forma normale**, quando è data risolta rispetto alla derivata di ordine maggiore, cioè nella forma

$$y^{(n)} = f(t, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$$

Un'equazione differenziale è **lineare** se la funzione e le sue derivate compaiono con esponente unitario.

La sua espressione generale è

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + a_2(t)y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1}(t)y' + a_n(t)y = g(t)$$

dove i coefficienti $a_i(t)$ ed il termine noto $g(t)$ sono funzioni continue e derivabili in un dato intervallo.

Se $g(t) = 0$ l'equazione si dice omogenea.

Se i **coefficienti** sono **indipendenti da t** , quindi se $a_i(t) = \text{costante}$ con $i = 1, 2, \dots, n$, l'equazione si dice a coefficienti costanti. Sono le più facili da risolvere e per fortuna le più frequenti nei sistemi fisici. O meglio, quelle che capitano più frequentemente quando per il fenomeno sono accettabili le ipotesi che portano a tali equazioni.

Equazioni differenziali lineari omogenee a coefficienti costanti

L'equazione ha questo aspetto

$$y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + y^{(n-2)}(t) + \dots + a_{n-1} y'(t) + a_n y(t) = 0 \quad [1]$$

La variabile t è sempre reale.

I coefficienti a_i possono essere invece numeri complessi.

Le soluzioni possono essere funzioni complesse della variabile reale t .

Consideriamo la funzione

$$y = e^{\lambda t} \text{ con } \lambda = \text{costante}$$

Si ha

$$y' = \lambda e^{\lambda t}, \quad y'' = \lambda^2 e^{\lambda t} \dots y^{(n)} = \lambda^n e^{\lambda t}$$

Sostituendo nell'equazione si ottiene

$$e^{\lambda t} (\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n) = 0$$

Se λ è una radice dell'equazione

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0 \quad [2]$$

la funzione scritta è una soluzione dell'equazione differenziale di partenza.
La [2] è detta equazione caratteristica.

Radici distinte

Se le n radici dell'equazione caratteristica sono distinte

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$$

Le funzioni

$$y_1 = e^{\lambda_1 t}, y_2 = e^{\lambda_2 t} \dots, y_n = e^{\lambda_n t}$$

sono n soluzioni dell'equazione [1]

L'integrale generale della [1] può allora essere scritto nella forma

$$y = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + c_n e^{\lambda_n t} \quad [3]$$

dove le c_i ($i = 1, 2, \dots, n$)
sono costanti arbitrarie complesse.

Radici multiple

Se una radice, λ_x , dell'equazione caratteristica è multipla di ordine r , la funzione

$$y = t^m e^{\lambda_x t}$$

con

$$m \leq r - 1$$

è soluzione della [1]

Quindi se λ_i con ($i = 1, 2, \dots, q$) sono le (radici dell'equazione caratteristica di molteplicità r_i con

$\sum_{i=1}^q r_i = n$ l'integrale generale è dato da

$$y = \sum_{i=1}^q \sum_{k=1}^{r_i-1} c_{ik} t^k e^{\lambda_{ik} t} \quad [4]$$

Coefficienti reali

Se i coefficienti della [1] sono numeri reali, quando l'equazione caratteristica ha come soluzione il numero complesso $\alpha + j\omega$, ha come soluzione anche $\alpha - j\omega$.

Supponendo le due soluzioni di molteplicità r ,

$$y_1 = t^p e^{(\alpha + j\omega)t}, y_2 = t^p e^{(\alpha - j\omega)t}$$

$$p = (1, 2, \dots, r-1)$$

sono soluzioni pure

$$y_a = \frac{y_1 + y_2}{2} = t^p \frac{e^{(\alpha+j\omega)t} + e^{(\alpha-j\omega)t}}{2} = t^p e^{at} \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} = t^p e^{at} \cos \omega t$$

$$y_b = \frac{y_1 - y_2}{2j} = t^p \frac{e^{(\alpha+j\omega)t} - e^{(\alpha-j\omega)t}}{2j} = t^p e^{at} \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} = t^p e^{at} \sin \omega t$$

La combinazione lineare

$$c_1 y_a + c_2 y_b = t^p e^{at} (c_1 \sin \omega t + c_2 \cos \omega t)$$

che è parte dell'integrale generale può essere sostituita dalla

$$y_i = A t^p e^{at} \sin (\omega t + \alpha)$$

con

$$A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$$

$$\alpha = \arctan \frac{c_2}{c_1}$$

Equazioni non omogenee

Se il termine noto $g(t) \neq 0$ la soluzione della [1] si ottiene aggiungendo all'integrale generale della equazione omogenea associata, un integrale qualsiasi $y_p(t)$ (particolare) dell'equazione non omogenea. Quindi

$$y = \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^{r_i-1} c_{ij} t^j e^{\lambda_{ij} t} + y_p(t) \quad [5]$$

L'integrale particolare $y_p(t)$ lo si può trovare ipotizzandolo e verificando che l'equazione sia soddisfatta.

Un metodo più generale è quella della *variazione delle costanti arbitrarie* detto

Metodo di Lagrange

Consiste nell'assumere, per l'integrale cercato, la forma dell'integrale generale dell'omogenea, sostituendo alle costanti arbitrarie funzioni della variabile indipendente.

Si impone quindi che soddisfi alla [1] e che le $n-1$ derivate successive di $y_p(t)$ si possano eseguire come se i coefficienti-funzioni fossero delle costanti.

Questo comporta $n - 1$ condizioni successive cui gli n coefficienti-funzione devono soddisfare. Si impone infine che $y_p(t)$ sia una soluzione della [1], condizione che permette di scrivere l'ennesima condizione che porta al sistema di n equazioni per ricavare gli n coefficienti-funzioni, quindi l'integrale particolare.

Se indichiamo con $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)$ gli integrali dell'omogenea associata, le n condizioni sono (tralasciando di indicare la variabile indipendente t)

$$\begin{aligned}
c'_1 \varphi_1 + c'_2 \varphi_2 + \dots + c'_n \varphi_n &= 0 \\
c'_1 \varphi'_1 + c'_2 \varphi'_2 + \dots + c'_n \varphi'_n &= 0 \\
\dots\dots\dots \\
c'_1 \varphi_1^{(n-2)} + c'_2 \varphi_2^{(n-2)} + \dots + c'_n \varphi_n^{(n-2)} &= 0 \\
c'_1 \varphi_1^{(n-1)} + c'_2 \varphi_2^{(n-1)} + \dots + c'_n \varphi_n^{(n-1)} &= g(x)
\end{aligned}$$

Illustreremo tale metodo con un esempio, ma un altro è il modo di trovare l'integrale particolare nelle equazioni differenziali che descrivono i

Circuiti elettrici

L'equazione differenziale a coefficienti costanti è quella che maggiormente interessa nello studio dei circuiti elettrici. Si ottiene dall'applicazione dei principi di Kirchhoff, ed i coefficienti coinvolgono resistenze, induttanze e capacità che si suppongono costanti.

L'integrale particolare invece si ricava determinando le grandezze a regime con i generatori accesi. L'equazione omogenea si ottiene spegnendo i generatori della rete, cioè aprendo i rami contenenti generatori di corrente, e sostituendo con un cortocircuito i generatori ideali di tensione.

La soluzione dell'omogenea corrisponde all'**evoluzione libera**, cioè all'andamento delle grandezze elettriche determinato dall'energia immagazzinata nei componenti accumulatori: induttori e condensatori.

L'integrale generale, soluzione dell'equazione differenziale cui soddisfa la funzione che rappresenta la grandezza incognita, tensione o corrente, è dunque la somma dell'evoluzione libera $y_l(t)$ e del regime permanente $y_p(t)$.

$$y(t) = y_l(t) + y_p(t)$$

Le costanti arbitrarie di integrazione, che compaiono nell'espressione dell'evoluzione libera, sono univocamente determinate dalle **condizioni iniziali**, quindi dalle correnti negli induttori e dalle tensioni dei condensatori, esistenti all'istante $t=0$; da tali grandezze dipende l'energia presente nel circuito all'istante zero. Tali valori sono quelli determinati dal regime esistente prima dell'istante $t=0$. Le correnti negli induttori non possono infatti cambiare bruscamente, e neppure le tensioni sui condensatori, (principio di continuità) per cui si ha

$$\begin{aligned}
i_L(0^-) &= i_L(0^+) = i_L(0) = i_{L_l}(0) + i_{L_p}(0) \\
v_C(0^-) &= v_C(0^+) = v_C(0) = v_{C_l}(0) + v_{C_p}(0)
\end{aligned}$$

Nelle equazioni precedenti sono note $i_L(0)$ $i_{L_p}(0)$ $v_C(0)$ $v_{C_p}(0)$, quindi permettono di scrivere il sistema di equazioni per ricavare le costanti di integrazione presenti nell'evoluzione libera. Per ulteriori particolari può anche dare un'occhiata all'articolo [Sistemi lineari in regime variabile](#)

Qualche esercizio

Es.1

Trovare l'integrale generale dell'equazione omogenea

$$\frac{d^4 y}{dt^4} - 13 \frac{d^2 y}{dt^2} + 36y = 0$$

Le soluzioni dell'equazione caratteristica sono

$$\lambda^4 - 13\lambda^2 + 36 = 0$$

$$\lambda^2 = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 144}}{2} = \begin{cases} 9 \\ 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = +2; \lambda_2 = -2; \lambda_3 = 3; \lambda_4 = -3$$

L'integrale generale è $y = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t} + c_3 e^{3t} + c_4 e^{-3t}$

che troviamo subito con WolframAlpha, scrivendo

$$y''''(t) - 13y''(t) + 36y(t) = 0$$

Ecco l'integrale generale ([Differential equation solution](#))

Es. 2

Trovare l'integrale generale dell'equazione

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + y(t) = \frac{1}{\sin t}$$

Integrale dell'omogenea associata

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \pm j$$

$$y = c_1 \cos t + c_2 \sin t$$

Integrale particolare

Usando il metodo di Lagrange, l'integrale particolare ha la forma dell'integrale dell'omogenea; quindi ponendo

$$y_p = c_1 \cos t + c_2 \sin t$$

dove c_1 e c_2 sono funzioni di t , si hanno le condizioni

$$c'_1 \cos t + c'_2 \sin t = 0$$

$$-c'_1 \sin t + c'_2 \cos t = \frac{1}{\sin t}$$

Sistema nelle incognite c'_1, c'_2 che può essere risolto con Cramer

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{vmatrix} = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$$

$$c'_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \sin t \\ \frac{1}{\sin t} & \cos t \end{vmatrix}}{\Delta} = -1$$

$$c'_2 = \frac{\begin{vmatrix} \cos t & 0 \\ -\sin t & \frac{1}{\sin t} \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{\cos t}{\sin t}$$

da cui si ricava

$$c_1 = -t$$

$$c_2 = \log |\sin t|$$

$$y_p(t) = -t \cos t + \sin t \log |\sin t|$$

quindi l'integrale generale

$$y(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t - t \cos t + \sin t \log |\sin t|$$

Se si vuol fare più presto, basta scrivere in Wolphram alpha

y''+y=1/sint

ed [il gioco è fatto! ;-\)](#)

Es. 3

Risolvere l'equazione $y''(t) - y'(t) - 2y = 1$

con le condizioni iniziali

$$y'(0) = 1$$

$$y(0) = 0$$

equazione caratteristica

$$\alpha^2 - \alpha - 2 = 0 \rightarrow \alpha_1 = -1 \quad \alpha_2 = 2$$

quindi l'integrale dell'omogenea è

$$y = c_1 e^{\alpha_1 t} + c_2 e^{\alpha_2 t}$$

$$y = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t}$$

Integrale particolare

Ipotizziamo $y_p = K$

$$\text{Sostituendo nell'equazione si ha } y = k \rightarrow \begin{matrix} -2k = 1 \\ k = -\frac{1}{2} \end{matrix}$$

L'integrale generale

è perciò

$$y = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t} - \frac{1}{2}$$

Per le condizioni iniziali

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = \frac{1}{2} \\ c_1 \alpha_1 + c_2 \alpha_2 = 1 \\ c_1 + c_2 = \frac{1}{2} \\ -c_1 + 2c_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

La soluzione è $y = \frac{1}{2} (e^{2t} - 1)$

Ma se si vuol fare più presto, basta scrivere in Wolfram alpha

$$\mathbf{y}''(\mathbf{t}) - \mathbf{y}'(\mathbf{t}) - 2\mathbf{y}(\mathbf{t}) = \mathbf{1}, \mathbf{y}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}, \mathbf{y}'(\mathbf{0}) = \mathbf{1}$$

ed [ecco la soluzione \(Differential Equation solution\)!](#)

ES. 4

Vediamo infine un classico transitorio RLC serie alimentato da un generatore di tensione continua

$$E = 25 \text{ V}$$

$$R = 50 \Omega$$

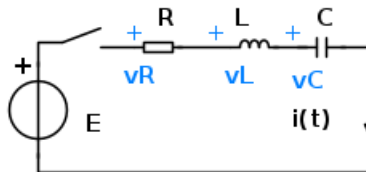
$$L = 100 \text{ mH}$$

$$C = 5 \mu\text{F}$$

condizioni iniziali

$$i_L(0^-) = i_L(0^+) = 0$$

$$v_C(0^-) = v_C(0^+) = 0$$



Per la KVL, alla chiusura del tasto deve essere

$$v_R + v_L + v_C = e(t)$$

quindi

$$L \frac{di}{dt} + Ri + v_c = E$$

derivando primo e secondo membro e dividendo per L si ha

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{L} \frac{dv_c}{dt} = 0$$

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = 0$$

si ha

$$\frac{R}{L} = \frac{50}{2 \times 100 \times 10^{-3}} = 500 \frac{1}{s}$$

$$\frac{1}{LC} = \frac{1}{100 \times 10^{-3} \times 5 \times 10^{-6}} = 2 \times 10^6 (\text{rad/s})^2$$

dunque

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + 500 \frac{di}{dt} + 2 \times 10^6 i = 0$$

che è già un'equazione omogenea. L'integrale generale è dunque uguale all'evoluzione libera.

In essa occorre determinare le costanti A e φ imponendo le condizioni iniziali.

La corrente nulla impone

$$i(0) = 0 \Rightarrow A \sin \varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 0$$

La tensione ai capi del condensatore è

$$v_C(t) = E - Ri(t) - L \frac{di}{dt}$$

$$v_C(t) = 25 - 50Ae^{-250t} \sin(250\sqrt{31}t) -$$

$$-0,1A [-250e^{-250t} \sin(250\sqrt{31}t) + e^{-250t} 250\sqrt{31} \cos(250\sqrt{31}t)]$$

quindi imponendo la condizione iniziale di condensatore scarico possiamo ricavare A

$$v_C(0) = 25 - A25\sqrt{31} = 0$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{31}}$$

La cche corrisponde a scrivere il sistema di corrente ha dunque l'espressione

$$i(t) = \frac{e^{-250t} \sin(250\sqrt{31}t)}{\sqrt{31}}$$

mentre quella della tensione sul condensatore è

$$v_C(t) = 25 - \frac{25}{\sqrt{31}} e^{-250t} \sin(250\sqrt{31}t) - 25 \cos(250\sqrt{31}t)$$

Come al solito, digitando con WolframAlpha

$$\mathbf{10^{(-1)}i'(t)+50i(t)+v(t)=25,i(t)=5*10^{(-6)}*v'(t),i(0)=0,v(0)=0}$$

che significa scrivere il sistema costituito dalle equazioni differenziali del primo ordine corrispondenti alla KVL ed alla relazione di definizione del condensatore, corredate delle condizioni iniziali, si sarebbe fatto molto prima :).

E se si vogliono tracciare i grafici basta scrivere

$$\mathbf{t \sin(250 \sqrt{31} t)/\sqrt{31}, t=0 \text{ to } t=0.01}$$

per la corrente e

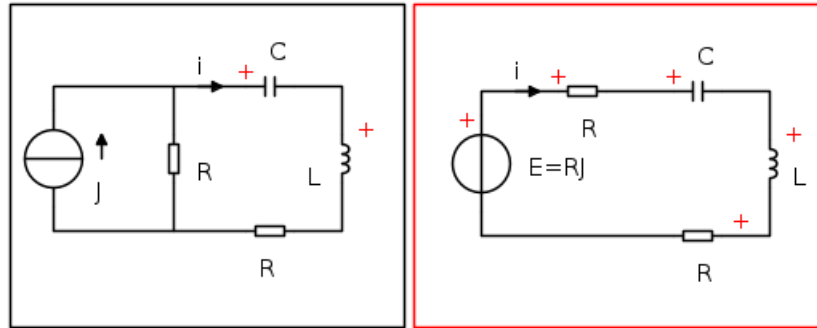
$$\mathbf{25-25 e^{(-250 t)} \cos(250 \sqrt{31} t)-(25 e^{(-250 t)} \sin(250 \sqrt{31} t))/\sqrt{31} \text{ from } t=0 \text{ to } 0.01}$$

per la tensione.

NB: per fare prima si clicca sulle espressioni in precedenza ottenute, e poi si definisce l'intervallo desiderato per il tempo con **from t=0 to t=0.01**, in questo caso

Es. 5

Determinare la tensione sul condensatore e la tensione ai capi del generatore di corrente, quando la sua corrente si inverte



$$j(t) = \begin{cases} J_0, & \text{per } t < 0 \\ -J_0, & \text{per } t > 0 \end{cases} \quad J_0 = 1A$$

$$R = 1\Omega; L = 10 \text{ mH}; C = 1 \text{ mF}$$

Sostituendo il generatore reale di corrente con l'equivalente di tensione si ottiene il circuito nel riquadro rosso.

La KVL fornisce

$$Li'(t) + 2Ri(t) + v(t) = -RJ(t) \text{ con}$$

$$i(t) = Cv'(t)$$

Le condizioni iniziali forniscono

$$v(0) = RJ$$

$$i(0) = 0$$

Sostituendo i valori

$$10^{-2}i'(t) + 2i(t) + v(t) = -1$$

$$i(t) = 10^{-3}v'(t)$$

Quindi, per trovare la tensione sul condensatore, $v(t)$ oltre alla corrente $i(t)$ basta scrivere in WolframAlpha

$$\underline{10^{(-2)}i'(t) + 2i(t) + v(t) = -1, i(t) = 10^{(-3)}v'(t), i(0) = 0, v(0) = 1}$$

La tensione ai capi del generatore di corrente è

$$v_j(t) = -1 - i(t)$$

Già che ci siamo vediamo tutti i grafici:

- [della corrente](#)
- [della tensione sul condensatore](#)
- [della tensione ai capi del generatore di corrente](#)

Conclusione

Non è certo una scoperta, ma disponiamo di strumenti di calcolo di una potenza inimmaginabile qualche decennio fa. Sono strumenti che non potrebbero esistere senza la teoria ed i metodi di calcolo messi a punto dai matematici molto prima. Hanno catturato l'intelligenza di passate generazioni, ma non sono in grado di sostituirla, né di fare a meno di quella di chi li usa. Insomma non è ancora giunto il momento di abbandonare lo studio tradizionale e chissà se mai giungerà. Lo si deve affrontare con una coscienza diversa, questo sì, sapendo che si possono concentrare gli sforzi di apprendimento su ciò che è più importante per la comprensione dei fenomeni fisici che le equazioni differenziali cercano di interpretare.

Bibliografia



Lezioni di Analisi matematica - Giuseppe Wirner ed. Cedam 1969

