



Zeno Martini (admin), Roronoa Lillo (lillo)

ESERCIZI EE-1

30 October 2012

Abstract

Questo articolo, insieme ad altri che seguiranno, raccoglie gli esercizi presenti nel mio vecchio [Corso di Elettrotecnica di base](#), che [lillo](#) ed io stiamo "rivisitando" per i motivi specificati nell'[abstract](#) dell'articolo di apertura.

Bipoli fondamentali

Per le nozioni teoriche fare riferimento ai seguenti articoli

- [Elettrotecnica Elementare EE-1: Tensione e corrente](#)
- [EE-2: Bipoli fondamentali](#)

Resistore

Esercizio 1.1

I dati di targa di una vecchia lampada ad incandescenza erano 100 W, 220 V. Il filamento di tungsteno, era lungo 10 cm e misurando la sua resistenza a 0°C si trovava un valore di 39 Ω. Determinare la sezione del filamento, la temperatura di funzionamento, il consumo in joule per un funzionamento di 8 h, il costo relativo sapendo che quello di 1 kWh era di 0,2 euro.

Resistenza alla temperatura di funzionamento:

$$R_t = \frac{U^2}{P} = \frac{(220)^2}{100} = 484 \Omega$$

Calcolo della temperatura di funzionamento, sapendo che il coefficiente di temperatura α del tungsteno vale $4,8 \times 10^{-3} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$:

$$t = \frac{(R_t - R_0)}{\alpha R_0} = \frac{(484 - 39)}{(4,8 \times 10^{-3}) \times 39} = 2377 \text{ } ^\circ\text{C}$$

Consumo per 8 ore:

$$W = 100 \times 8 = 800 \text{ Wh} = 0,8 \text{ kWh} = 2,88 \times 10^6 \text{ J}$$

Costo:

$$C = 0,8 \times 0,2 = 0,16 \text{ €}$$

Sezione del filamento:

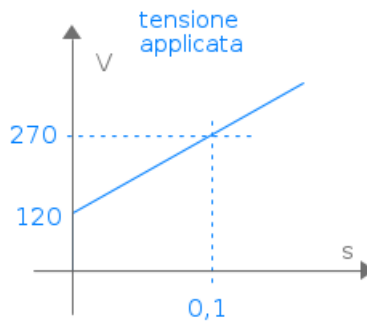
$$S = \frac{\rho l}{R_0} = \frac{0,051 \times 0,1}{39} = 0,13 \times 10^{-3} \text{ mm}^2$$

Condensatore

Esercizio 1.2

Ad un condensatore inizialmente scarico $Q_i = 0$, costituito da due armature di 2 m^2 piane e parallele separate da un isolante di spessore $0,5 \text{ mm}$, la cui costante dielettrica relativa è 50 , è applicata, per 2 secondi, una tensione che parte da 120 V e cresce ad una velocità costante di $1500 \frac{\text{V}}{\text{s}}$.

Calcolare il valore della corrente di carica dopo l'istante iniziale e l'energia immagazzinata dopo i 2 secondi.



La costante dielettrica relativa è il rapporto tra la costante assoluta dell'isolante e quella del vuoto:

$$\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}$$

La capacità del condensatore risulta:

$$C = \epsilon_r \epsilon_0 \frac{A}{d} = \frac{50 \times (8,85 \times 10^{-12}) \times 2}{0,5 \times 10^{-3}} = 1,77 \times 10^{-6} \text{ F} = 1,77 \text{ } \mu\text{F}$$

Cerchiamo adesso di calcolare l'intensità di corrente di carica:

$$I = C \frac{dV}{dt}$$

dove la variazione di tensione risulta essere lineare, e questo ci permette di sostituire la derivata con il rapporto $\frac{V}{s}$:

$$I = C \frac{dV}{dt} = C \frac{V}{s} = (1,77 \times 10^{-6}) \times 1500 = 2,66 \times 10^{-3} \text{ A} = 2,66 \text{ mA}$$

Calcoliamo adesso la tensione ai capi del condensatore dopo 2 secondi:

$$\begin{aligned} U &= U_0 + t \frac{dV}{dt} = U_0 + t \frac{V}{s} = \\ &= 120 + (2 \times 1500) = 3120 \text{ V} = 3,12 \text{ kV} \end{aligned}$$

Possiamo ora quantificare l'energia elettrostatica:

$$W_c = 0,5 C U^2 = 0,5 \times 1,77 \times (3,12)^2 = 8,61 \text{ J}$$

Si noti che la carica finale sul condensatore è:

$$Q_f = C U = 1,77 \times 3,12 = 5,52 \text{ mC}$$

mentre la carica trasportata dalla corrente costante è:

$$Q_I = I t = 2,66 \times 2 = 5,32 \text{ mC}$$

la differenza di 0,2 mC è quella trasportata dall'impulso di corrente che si ha nell'istante iniziale, quando la tensione passa da 0 a 120 V in un tempo nullo (gradino).

Induttore

Esercizio 1.3

In un solenoide in aria di $N = 10000$ spire, di lunghezza $l = 2 \text{ m}$, di sezione $A = 10 \text{ cm}^2$ l'intensità di corrente passa dal valore di 1 A al valore di 11 A in 10 millisecondi con un variazione costante.

Calcolare la tensione ai capi del solenoide ed il valore dell'energia magnetica.

Per rispondere alle due domande è necessario calcolare il coefficiente di autoinduzione L. Essendo la permeabilità dell'aria, uguale a quella del vuoto si ha:

$$L = \mu_0 N^2 \frac{A}{l} = (4\pi \times 10^{-7}) \times 10^8 \times \frac{10^{-3}}{2} = 2\pi \times 10^{-2} \text{ H}$$

La velocità di crescita della corrente è costante e vale:

$$\frac{di(t)}{dt} = \frac{I_{finale} - I_{iniziale}}{t} = \frac{11 - 1}{10^{-2}} = 1000 \text{ A/s}$$

La tensione $U_{AB}(t)$ ai capi del solenoide, considerando che sia A il terminale in cui entra la corrente, è costante per quell'intervallo di tempo, e vale:

$$U_{AB} = L \frac{di(t)}{dt} = (2\pi \times 10^{-2}) \times 1000 = 20\pi = 62,8 \text{ V}$$

Energia magnetica finale:

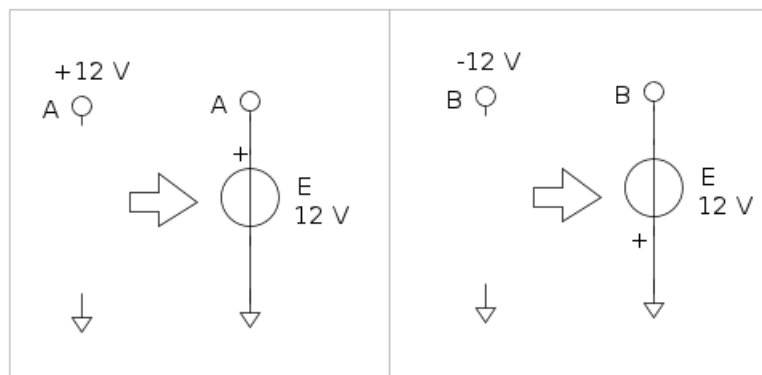
$$W_m = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2} \times (2\pi \times 10^{-2}) \times 11^2 = 3,8 \text{ J}$$

Capitolo 2: Reti

NOTA: Per le nozioni teoriche fare riferimento al seguente articolo

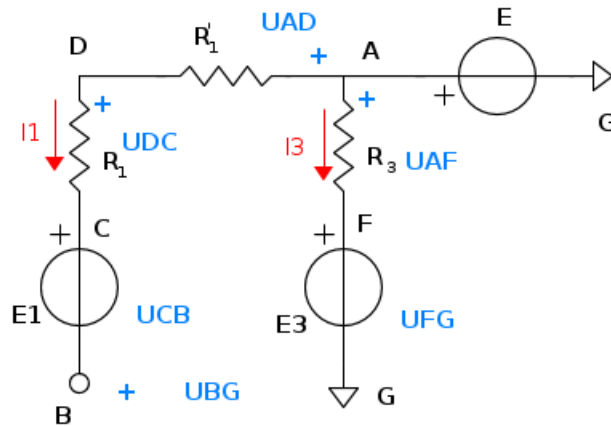
[EE-3: Reti](#)

Nota Spesso, specie in elettronica per evitare eccessive linee, i circuiti vengono disegnati indicando il potenziali di nodi e terminali di rami che sembrano aperti. I punti suddetti sono il polo di un generatore ideale di tensione che ha l'altro polo collegato al riferimento, e f.e.m. pari al potenziale del punto. Quindi si hanno le seguenti corrispondenze



Esercizio 2.1

Nel circuito di figura:



Determinare la tensione tra B e G ed il valore di E. Dati:

$$\begin{aligned}
 R_1 &= R'_1 = R_3 = 100 \, \Omega \\
 E_1 &= 50 \, \text{V} \\
 E_3 &= 100 \, \text{V} \\
 I_1 &= 2 \, \text{A} \\
 I_3 &= 1 \, \text{A}
 \end{aligned}$$

Applicando la legge di Ohm generalizzata si ha che:

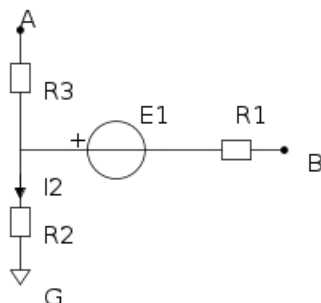
$$\begin{aligned}
 U_{BG} &= -U_{CB} - U_{DC} - U_{AD} + U_{AF} + U_{FG} = \\
 &= -E_1 - R_1 I_1 - R'_1 I_1 + R_3 I_3 + E_3 = \\
 &= -50 - (2 \times 100) - (2 \times 100) + (1 \times 100) + 100 = -250 \, \text{V}
 \end{aligned}$$

Infine il valore del generatore di tensione ideale **E**:

$$E = U_{AG} = R_3 I_3 + E_3 = (100 \times 1) + 100 = 200 \, \text{V}$$

Esercizio 2.2

Con riferimento alla figura



$$R_1 = 30 \, \Omega; R_2 = 20 \, \Omega; R_3 = 15 \, \Omega;$$

$$E_1 = 30 \, \text{V}; I_2 = 3 \, \text{A}; V_B = 60 \, \text{V}$$

Calcolare V_A .

Indicando con C il nodo di connessione dei tre rami si ha per definizione

$$V_A = U_{AC} + V_C$$

che è la risposta alla domanda, note che siano U_{AC} e V_C .

La tensione U_{AC} per la legge di Ohm è data da $U_{AC} = R_3 I_3$

avendo posto I_3 entrante dal nodo A.

Per la KCL nel nodo C, l'intensità I_3 si ricava da

$$I_3 + I_1 - I_2 = 0$$

avendo indicato con I_1 la corrente in R_1 entrante in C.

Applicando la legge di Ohm generalizzata, I_1 si ricava dalla

$$U_{BC} = V_B - V_C = E_1 - R_1 I_1$$

Per la legge di Ohm, per la definizione di d.d.p. e per la definizione di riferimento o zero ground, V_C si ricava dalla

$$U_{CG} = V_C = R_2 I_2$$

Sostituendo i valori numerici e ripercorrendo a ritroso le formule scritte si ottiene il risultato ($V_A = 30 \, \text{V}$)

Generatore reale di tensione

Esercizio 2.3

Un generatore la cui potenza di cortocircuito è di $10 \, \text{kW}$ e la cui tensione a vuoto è di $50 \, \text{V}$, alimenta una resistenza di $5 \, \Omega$.

Calcolare la corrente erogata ed il suo rendimento.

Resistenza interna del generatore:

$$R_i = \frac{E^2}{P_{cc}} = \frac{50^2}{10^4} = 0,25 \Omega$$

Mediante la legge di Ohm per un circuito chiuso si ha che:

$$I = \frac{E}{R_i + R} = \frac{50}{0,25 + 5} = 9,52 \text{ A}$$

Conoscendo la corrente è immediatamente calcolabile la tensione sul carico:

$$U = RI = 5 \times 9,52 = 47,6 \text{ V}$$

Valutiamo adesso la potenza erogata, ovvero quella realmente assorbita dal carico:

$$P_U = UI = 47,6 \times 9,52 = 453 \text{ W}$$

Mentre ora quella generata, che comprende la perdite sulla resistenza interna:

$$P_g = EI = 50 \times 9,52 = 476 \text{ W}$$

Infine il rendimento elettrico:

$$\eta = \frac{P_U}{P_g} = \frac{453}{476} = 0,952$$

Esercizio 2.4

Un generatore reale e lineare di tensione eroga una corrente di 0,4 A quando il carico resistivo è $R = 1 \Omega$, ed 0,22 A con un carico di 2Ω .

Calcolare la sua potenza di cortocircuito ed il rendimento nel primo caso.

Essendo l'espressione della potenza di cortocircuito la seguente:

$$P_{cc} = EI_{cc} = \frac{E^2}{R_i}$$

è necessario determinare R_i ed E .

La tensione sul carico resistivo, è data da:

$$U = E - R_i I$$

Si ha dunque, nel primo caso:

$$0,4 \times 1 = E - R_i (0,4)$$

mentre nel secondo caso:

$$0,22 \times 2 = E - R_i (0,22)$$

Sottraendo la prima equazione dalla seconda, si ottiene:

$$0,04 = (0,18) R_i$$

Quindi:

$$R_i = \frac{0,04}{0,18} = 0,22 \Omega$$

$$E = (0,4 \times 1) + (0,4 \times 0,22) = 0,488 \text{ V}$$

$$P_{cc} = \frac{E^2}{R_i} = \frac{0,488^2}{0,22} = 1,07 \text{ W}$$

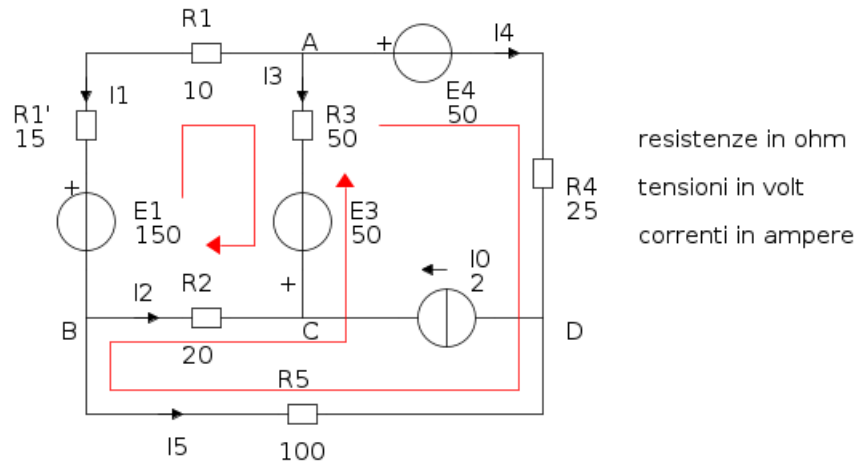
Infine, il rendimento dato da $\frac{P_u}{P_g}$ può anche essere calcolato come $\frac{U}{E}$ essendo comune la I per le due potenze, quindi:

$$\eta = \frac{U}{E} = \frac{0,4}{0,488} = 0,82$$

Circuiti complessi

Esercizio 2.5

Risolvere la rete di figura



con i due principi di Kirchhoff

Applicando KCL ai nodi A,B,D rispettivamente si ha:

$$\begin{cases} -I_1 - I_3 - I_4 = 0 \\ I_1 - I_2 - I_5 = 0 \\ I_4 + I_5 = I_0 \end{cases}$$

Ignorando il generatore di corrente ed applicando KVL alle due maglie indicate dal verso di percorrenza disegnato in rosso si ha

$$\begin{cases} -(R_1 + R'_1)I_1 - R_2I_2 + R_3I_3 = E_1 + E_3 \\ -R_3I_3 + R_4I_4 + R_2I_2 - R_5I_5 = -E_3 - E_4 \end{cases}$$

Sostituendo i valori numerici si ha il sistema

$$\begin{cases} I_1 = -I_3 - I_4 \\ I_1 - I_2 - I_5 = 0 \\ I_4 + I_5 = 2 \\ -25I_1 - 20I_2 + 50I_3 = 200 \\ -50I_3 + 25I_4 + 20I_2 - 100I_5 = -100 \end{cases}$$

che risolto, a esempio con il metodo di sostituzione, fornisce i valori delle correnti

$$\begin{cases} I_1 = -I_3 - I_4 \\ I_1 - I_2 - I_5 = 0 \\ I_4 + I_5 = 2 \\ -25I_1 - 20I_2 + 50I_3 = 200 \\ -50I_3 + 25I_4 + 20I_2 - 100I_5 = -100 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -I_3 - I_4 - I_2 - I_5 = 0 \\ I_4 + I_5 = 2 \\ -20I_2 + 75I_3 + 25I_4 = 200 \\ -50I_3 + 25I_4 + 20I_2 - 100I_5 = -100 \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_4 = 2 - I_5 \\ -95I_2 - 50I_4 - 75I_5 = 200 \\ 75I_4 + 70I_2 - 50I_5 = -100 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -95I_2 - 25I_5 = 300 \\ 70I_2 - 125I_5 = -250 \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_2 = -\frac{60+5I_5}{19} \\ -14 \times 60 - 70I_5 - 25 \times 19I_5 = -50 \times 19 \end{cases}$$

$$I_5 = \frac{110}{545} = 0,2\text{A}$$

$$I_2 = -3,2\text{A}; I_4 = 1,8\text{A}; I_3 = 1,2\text{A}; I_1 = -3\text{A}$$

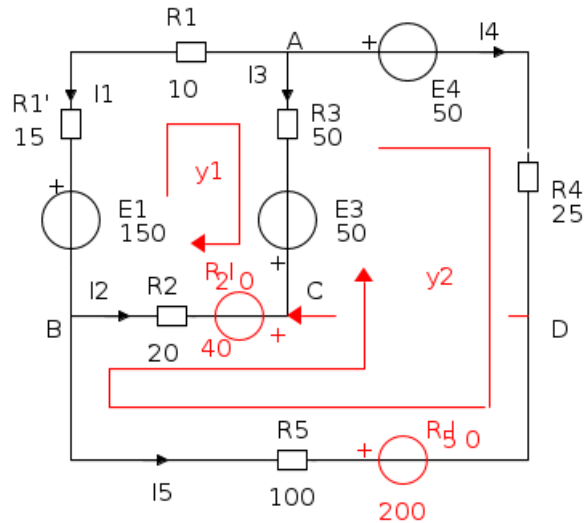
Nota Ci siamo esercitati con il metodo di sostituzione per non arrugginirgli con i passaggi matematici, ma è chiaro che quel che conta come conoscenza elettrotecnica è la scrittura del sistema. La soluzione la si fa fare a chi è più veloce, fa meno fatica e meno errori di noi. Possiamo quindi controllare i nostri risultati con Wolfram Alpha, scrivendo le cinque equazioni nel box di ingresso in questo modo (è stato usato x invece di "i" in quanto la "i" è il simbolo riservato all'unità immaginaria)

[x1=-](#)

[x3-x4;x1-x2-x5=0;x4+x5=2;-25x1-20x2+50x3=200;-50x3+25x4+20x2-10x5=-100](#)

Con il metodo delle correnti di maglia

Possiamo "eliminare" il generatore di corrente assegnando alla stessa un qualsiasi percorso nella rete, ad esempio, attraversi i rami con R_2 ed R_5 . Negli stessi rami, nelle due maglie che rimangono, è come se comparissero due generatori di tensione di valore pari al prodotto della corrente per le rispettive resistenze.



Si determinano allora le due correnti di maglia con il sistema

$$\begin{cases} (R'_1 + R_1 + R_2 + R_3) y_1 - (R_2 + R_3) y_2 = E_1 + E_3 - R_2 I_0 \\ -(R_2 + R_3) y_1 + (R_4 + R_5 + R_2 + R_3) y_2 = -E_3 - E_4 - R_5 I_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 95y_1 - 70y_2 = 160 \\ -70y_1 + 195y_2 = 140 \end{cases}$$

Lo si risolve facilmente un sistema così anche con sostituzione, ma usiamo ancora Wolfram Alpha, [y1-70y2=160;195y2-70y1=140](#) per trovare

$$y_1 = 3; y_2 = 1,8 \text{ quindi}$$

$$I_1 = y_1 = 3 \text{ A}; I_2 = -y_1 + y_2 - I_0 = -3,2 \text{ A}; I_3 = y_1 - y_2 = 1,2 \text{ A}$$

$$I_4 = y_2 = 1,8 \text{ A}; I_5 = I_0 - y_2 \text{ A}$$

Metodo dei potenziali di nodo

Assumendo nullo il potenziale di C, per i nodo A,B e D si hanno le equazioni

$$\begin{aligned} (G_1 + G_3 + G_4) V_A - G_1 V_B - G_4 V_D &= G_1 E_1 - G_3 E_3 + G_4 E_4 \\ -G_1 V_A + (G_1 + G_2 + G_5) V_B - G_5 V_D &= -G_1 E_1 \\ -G_4 V_A - G_5 V_B + (G_4 + G_5) V_D &= -I_0 - G_4 E_4 \end{aligned}$$

con

$$G_1 = \frac{1}{R_1 + R'_1}; G_2 = \frac{1}{R_2}; G_3 = \frac{1}{R_3}; G_4 = \frac{1}{R_4}; G_5 = \frac{1}{R_5}$$

quindi sostituendo i valori

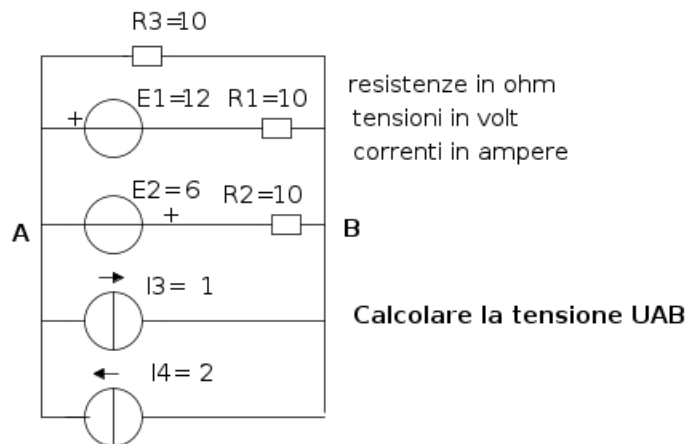
$$\begin{cases} 0,1V_A - 0,04V_B - 0,04V_D = 7 \\ -0,04V_A + 0,1V_B - 0,01V_D = -6 \\ -0,04V_A - 0,01V_B + 0,05V_D = -4 \end{cases}$$

Risolto con Wolfram Alpha

[\$0.11x-0.04y-0.04z=7;-0.04x+0.1y-0.01z=-6;-0.04x-0.01y+0.05z=-4\$](#)

$V_A = x = 8,6 \text{ V}; V_B = y = -62,2 \text{ V}; V_D = z = -86,1 \text{ V}$

Esercizio 2.6: Millman



E' una rete binodale: per trovare la tensione basta applicare Millman

$$\sum_a GE = \frac{E_1}{R_1} - \frac{E_2}{R_2} = 1,2 - 0,6 = 0,6 \text{ A}$$

$$\sum_a I_0 = I_4 - I_3 = 2 - 1 = 1 \text{ A}$$

$$\sum G = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = 0,1 + 0,1 + 0,1 = 0,3 \text{ S}$$

$$U_{AB} = \frac{\sum_a GE + \sum_a I_0}{\sum G} = \frac{0,6 + 1}{0,3} = 3,33 \text{ V}$$

Estratto da "<http://www.electroyou.it/mediawiki/index.php?title=UsersPages:Admin:esercizi-ee>"