



Zeno Martini (admin)

ESERCIZI RANDOM DI Elettrotecnica

16 January 2014

Premessa

Un discreto numero di utenti di Electroyou è costituito da studenti, i quali spesso chiedono aiuto per la risoluzione di esercizi. Generalmente sono svolti nel forum, preferibilmente con una interazione didattica tra l'esperto o gli esperti disponibili e lo studente.

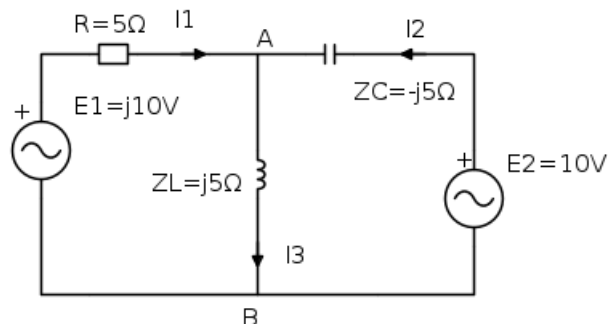
Pensavo, tempo fa, quando mi illudevo ancora che questo sito fosse apprezzato per il suo intento formativo, di raccogliarli ed organizzarli in modo da poter essere parte di un testo di Elettrotecnica di base, generato proprio dalla mia attività internettiana.

Poi le cose vanno diversamente da come si sogna, sia perché l'impresa presenta obiettive difficoltà, sia perché intervengono fattori esterni che rallentano, se non fermano, lo sviluppo del sito, sia perché molti legami instauratisi si sfaldano e c'è sempre chi arriva ad insegnarti cosa fare e come farlo, liquefacendo la passione originaria, ma fondamentalmente perché manca la determinazione necessaria, e probabilmente anche la capacità per portarla a termine.

Beh, insomma, tutta la pappardella iniziale vuol essere una premessa (magari con un messaggio subliminale) per giustificare il titolo di questo articolo in cui riporto alcuni degli esercizi raccolti dal forum.

Es. 1

Nel circuito di figura calcolare le correnti nei rami.



Con Millman

$$\bar{E}_1 = j10 \text{ V}$$

$$\bar{E}_2 = 10 \text{ V}$$

$$R = 5 \Omega$$

$$\dot{Z}_L = j5 \Omega$$

$$\dot{Z}_C = -j5 \Omega$$

$$\bar{V}_{AB} = \frac{\frac{\bar{E}_1}{R} + \frac{\bar{E}_2}{Z_C}}{\frac{1}{R} + \frac{1}{Z_L} + \frac{1}{Z_C}} = \frac{\frac{j10}{5} + \frac{10}{-j5}}{\frac{1}{5} + \frac{1}{j5} + \frac{1}{-j5}} = j20 \text{ V}$$

$$\bar{I}_3 = \frac{j20}{j5} = 4 \text{ A}$$

$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{E}_1 - \bar{V}_{AB}}{R} = \frac{j10 - j20}{5} = -j2 \text{ A}$$

$$\bar{I}_2 = \bar{I}_3 - \bar{I}_1 = 4 + j2 \text{ A}$$

Con sovrapposizione degli effetti

Solo E_1

$$\bar{V}_R = \frac{(\bar{E}_1 \cdot \dot{Z}_R)}{(\dot{Z}_R + \frac{(\dot{Z}_L \cdot \dot{Z}_C)}{(\dot{Z}_L + \dot{Z}_C)})} = \frac{(\bar{E}_1 \cdot \dot{Z}_R) \cdot (\dot{Z}_L + \dot{Z}_C)}{(\dot{Z}_R \cdot (\dot{Z}_L + \dot{Z}_C) + (\dot{Z}_L \cdot \dot{Z}_C))} =$$

$$= \frac{(\bar{E}_1 \cdot \dot{Z}_R) \cdot 0}{(\dot{Z}_R \cdot 0 + (\dot{Z}_L \cdot \dot{Z}_C))} = 0 \text{ V}$$

$$\bar{I}'_1 = \frac{\bar{V}_R}{R} = 0 \text{ A}$$

$$\bar{E}_1 - R \cdot \bar{I}'_1 - \bar{V}_L = \bar{E}_1 - \bar{V}_L = 0$$

$$\bar{V}_L = j10 \text{ V}$$

$$\bar{V}_C = -\bar{V}_L$$

$$\bar{I}'_3 = \frac{\bar{V}_L}{Z_L} = 2 \text{ A}$$

$$\bar{I}'_2 = \frac{\bar{V}_C}{Z_L} = -2 \text{ A}$$

Solo E_2

$$\bar{V}_C = \frac{(\bar{E}_2 \cdot Z_C)}{(Z_C + (Z_R \cdot Z_L))} = \frac{(\bar{E}_2 \cdot Z_C) \cdot (Z_R + Z_L)}{(Z_C \cdot (Z_R + Z_L) + (Z_R \cdot Z_L))}$$

$$= \frac{(10 \cdot -j5) \cdot (5 + j5)}{(-j5 \cdot (5 + j5) + (5 \cdot j5))} = \frac{-j250 + 250}{25} = 10 - j10 \text{ V}$$

$$\bar{E}_2 - \bar{V}_C - \bar{V}_L = 0 \text{ V}$$

$$\bar{V}_L = \bar{E}_2 - \bar{V}_C = 10 - 10 + j10 = j10 \text{ V}$$

$$\bar{V}_R = -\bar{V}_L$$

$$\bar{I}_3'' = \frac{\bar{V}_L}{Z_L} = \frac{j10}{j5} = 2 \text{ A}$$

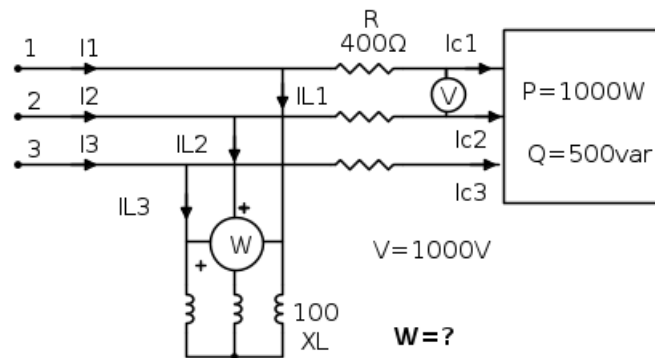
$$\bar{I}_1'' = \frac{\bar{V}_R}{R} = \frac{-j10}{5} = -j2 \text{ A}$$

$$\bar{I}_1 = \bar{I}_1'' + \bar{I}_1' = -j2 \text{ A}$$

$$\bar{I}_3 = \bar{I}_3' + \bar{I}_3'' = 2 + 2 = 4 \text{ A}$$

Es. 2

Determinare l'indicazione del wattmetro



$$I_C = \frac{S_C}{\sqrt{3}V} = \frac{\sqrt{P^2 + Q^2}}{\sqrt{3}V} = \frac{\sqrt{1000^2 + 500^2}}{\sqrt{3} \times 1000} = 0,646 \text{ A}$$

$$P_R = 3RI_C^2 = 3 \times 400 \times (0,646)^2 = 500 \text{ W}$$

Indicando con V_L la tensione concatenata ai capi della stella di induttanze

$$V_L = \frac{S_L}{\sqrt{3}I_C} = \frac{\sqrt{(P + P_R)^2 + Q^2}}{\sqrt{3}I_C} = \frac{\sqrt{1500^2 + 500^2}}{\sqrt{3} \times 0,646} = 1413 \text{ V}$$

La corrente nelle induttanze vale

$$I_L = \frac{V_L}{\sqrt{3}X_L} = \frac{1413}{\sqrt{3} \times 100} = 8,15 \text{ A}$$

Per l'indicazione del wattmetro occorre calcolare la corrente nella induttanza e lo sfasamento tra il fasore concatenata $\bar{V}_{31}$ ed il fasore $\bar{I}_{2L}$

La corrente detta ritarda di 90 gradi rispetto alla tensione di fase 2 la quale ritarda di 90 gradi rispetto alla tensione $\bar{V}_{31}$

Nel calcolo si è scelta la fase zero il fasore $\bar{E}_{1L}$ e si è considerata diretta la terna delle tensioni

$$\bar{E}_{1L} = \frac{1413}{\sqrt{3}} \angle 0 = 815 \angle 0^\circ \text{V}$$

$$\bar{E}_{3L} = \frac{1413}{\sqrt{3}} \angle 120 = 815 \angle 120 = -407 + j706 \text{V}$$

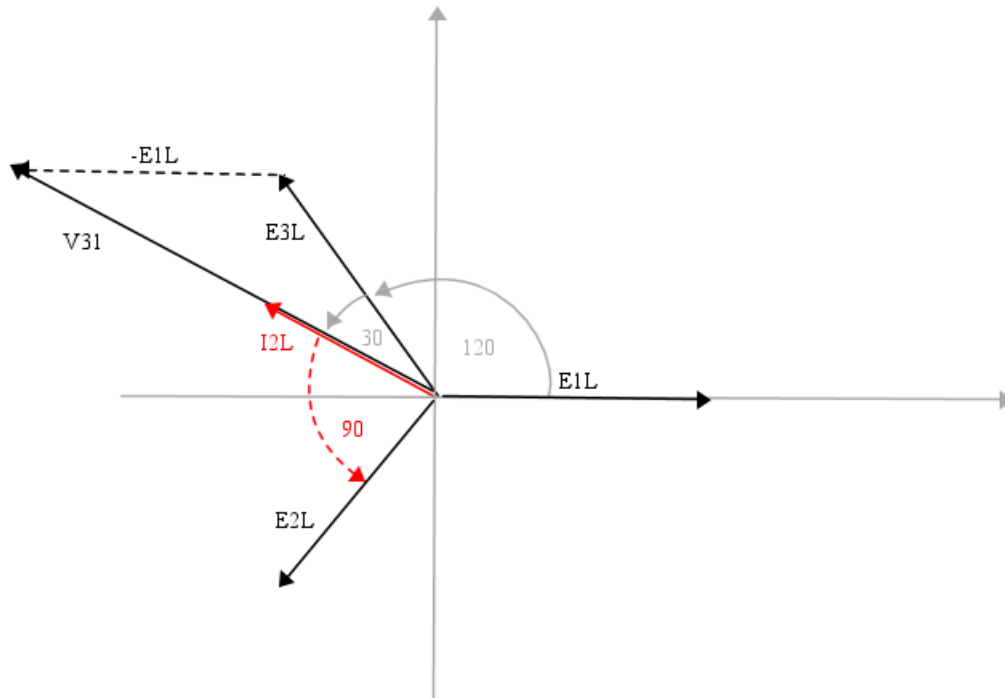
$$\bar{V}_{31L} = \bar{E}_{3L} - \bar{E}_{1L} = -815 - 407 + j706 = -1222 + j706 = 1411 \angle 150^\circ \text{V}$$

$$\bar{I}_{2L} = \frac{\bar{E}_{2L}}{jX_L} = \frac{815 \angle -120}{100 \angle 90} = 8,15 \angle -210$$

$$\angle \bar{V}_{31} \bar{I}_{2L} = 150 + 210 = 360$$

$$W = V_L I_L \cos 360 = 1413 \times 8,15 \times 1 = 11516 \text{W}$$

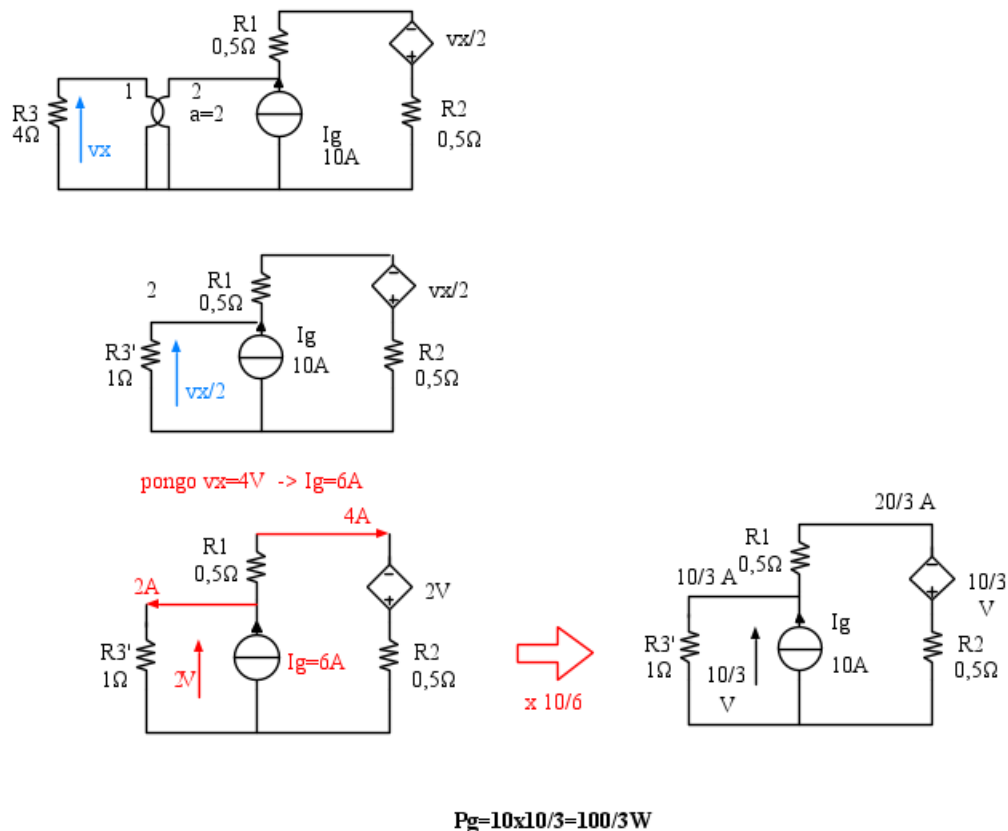
Grafico fasoriale



Es. 3

[Topic di origine](#)

Determinare la tensione V_x



Nel precedente procedimento è stato utilizzato il metodo della falsa posizione che consiste nello scegliere un valore arbitrario ma opportuno per la grandezza cercata (tensione o corrente), che è l'effetto prodotto dal generatore, risalendo quindi al valore del generatore che l'avrebbe prodotto. Si calcola quindi il rapporto tra il valore così trovato e quello dell'effettivo generatore presente. Per tale rapporto vanno moltiplicati i valori di tutte le altre grandezze del circuito in cui si era scelto arbitrariamente il valore della grandezza cercata. Nel caso specifico si è scelto $V_x = 4 V$ trovando che il generatore di corrente agente dovrebbe avere in tal caso una corrente di 10 A. Il generatore effettivo ha però una corrente di 6 A per cui il valore di V_x che con la scelta arbitraria era di 2 V, varrà $V_x = 2 \times \frac{10}{6} = \frac{10}{3} V$

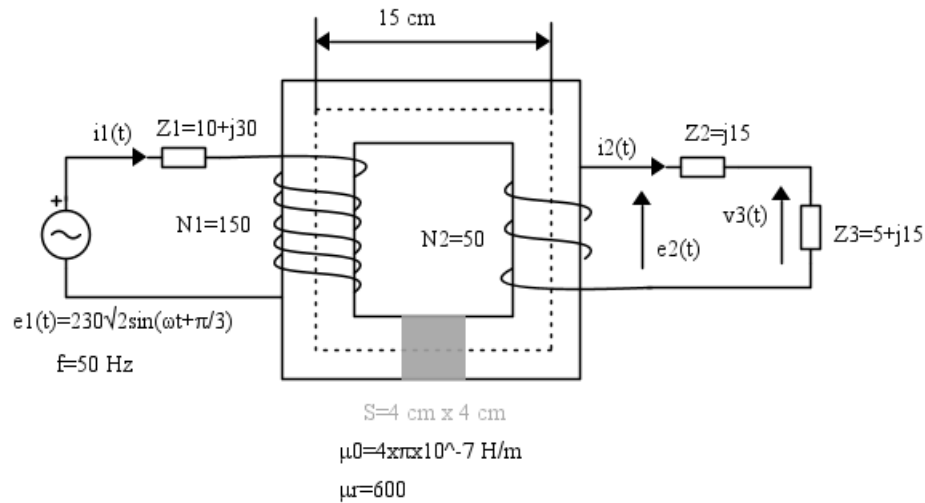
- NB: sul metodo usato e sulla sua estensione si veda il [magistrale articolo di PietroBaima](#)

Es. 4

Nel seguente circuito determinare

1. $i_1(t)$, $i_2(t)$, $e_2(t)$, $v_3(t)$
2. potenza attiva e reattiva del generatore
3. potenza attiva e reattiva totale delle impedenze $\dot{Z}_1$, $\dot{Z}_2$, $\dot{Z}_3$

Il trasformatore non ha perdite di alcun tipo, né flussi dispersi



Metodo che utilizza il circuito equivalente del trasformatore

la riluttanza del circuito magnetico del trasformatore è

$$\mathfrak{R} = \frac{4l}{\mu S} = \frac{4 \times 15 \times 10^{-2}}{4\pi 10^{-7} \times 600 \times 16 \times 10^{-4}} = 4,97 \times 10^5 \text{ H}^{-1}$$

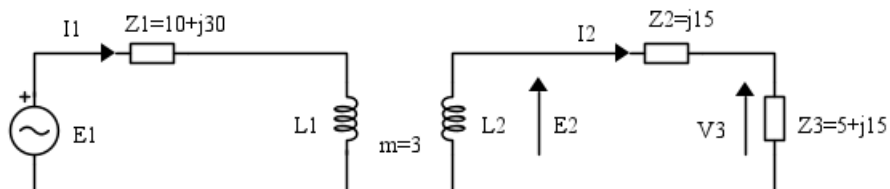
l'induttanza del primario è perciò

$$L_1 = \frac{N_1^2}{\mathfrak{R}} = \frac{150^2}{4,97 \times 10^5} = 0,0453 \text{ H}$$

la corrispondente reattanza è

$$X_1 = \omega L_1 = 314 \times 0,0453 = 14,2 \Omega$$

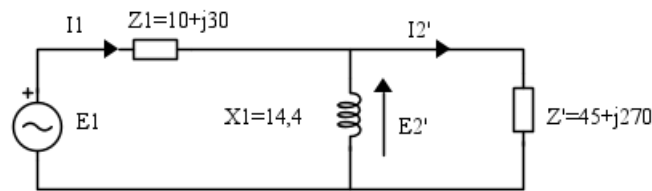
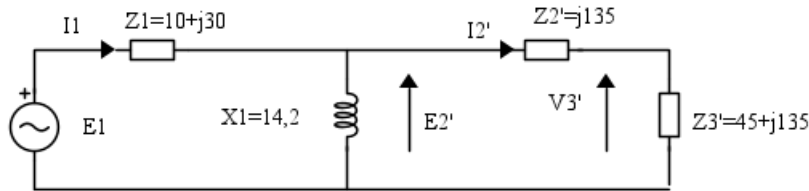
Il trasformatore, non avendo nessun tipo di perdite, è ideale ed il circuito può essere allora così rappresentato



si ha il rapporto di trasformazione

$$m = \frac{N_1}{N_2} = \frac{150}{50} = 3$$

Le impedenze al secondario possono essere trasportate al primario moltiplicando per il quadrato del rapporto di trasformazione, ricavando il circuito



$$\dot{Z}' = \dot{Z}'_2 + \dot{Z}'_3 = 45 + j270 \Omega$$

$$\dot{Z}_p = \frac{\dot{Z}'_1 X_1}{\dot{Z}'_1 + jX_1} = \frac{14,2 \angle 90^\circ \times 274 \angle 80,5^\circ}{288 \angle 81^\circ} = 13,5 \angle 89,5^\circ = 0,116 + j13,5 \Omega$$

$$\dot{Z}_{eq} = \dot{Z}_p + \dot{Z}_1 = 10,1 + j43,5 \Omega$$

$$\bar{E}_1 = 230 \angle 60^\circ \text{ V}$$

$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{E}_1}{\dot{Z}_{eq}} = \frac{230 \angle 60^\circ}{10,1 + j43,5} = \frac{230 \angle 60^\circ}{44,7 \angle 76,9^\circ} = 5,14 \angle -17^\circ \text{ A}$$

$$i_1(t) = \sqrt{2} \cdot 5,13 \sin \left(314t - \frac{17\pi}{180} \right)$$

$$\bar{E}'_2 = \bar{E}_1 - \dot{Z}_1 \bar{I}_1 = 115 + j199 - (10 + j30) \times 5,14 \angle -17^\circ =$$

$$= 115 + j199 - 31,6 \angle 71,6^\circ \times 5,14 \angle -17^\circ =$$

$$= 115 + j199 - 94 - j132 = 21 + j67 = 70,2 \angle 72,6^\circ \text{ V}$$

$$e_2(t) = 23,4 \times \sqrt{2} \sin \left(314t + \frac{72,6\pi}{180} \right)$$

$$\bar{E}_2 = \frac{\bar{E}'_2}{m}$$

$$= 7 + j22,3 = 23,4 \angle 72,6^\circ \text{ V}$$

$$\begin{aligned}\bar{I}'_2 &= \frac{\bar{E}'_2}{\bar{Z}'} = \frac{21+j67}{45+j270} = \frac{70,2\angle+72,6}{274\angle80,5} = 0,256\angle-7,9 \\ \bar{I}_2 &= m\bar{I}'_2 = 0,768\angle-7,9 \text{ A} \\ i_2(t) &= 0,768 \times \sqrt{2} \sin\left(314t - \frac{\pi 7,9}{180}\right) \text{ A}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{V}_3 &= \bar{Z}_3 \bar{I}_2 = (5 + j15) \times 0,768\angle-7,9 = 15,8\angle71,5 \times 0,75\angle-7,9 = \\ &= 12,1\angle63,6 \text{ V} \\ v_3(t) &= 12,1\sqrt{2} \sin\left(314t - \frac{\pi 63,6}{180}\right) \text{ V}\end{aligned}$$

Le potenze richieste

Calcoleremo le potenze complesse dove la parte reale è la potenza attiva mentre quella immaginaria è la reattiva

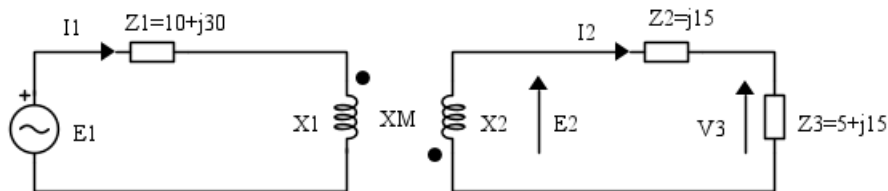
$$\dot{S} = \bar{E}_1 \cdot \hat{I}_1 = 230\angle60 \times 5,13\angle17 = 1180\angle77 = 265 + j1150 \text{ VA}$$

$$\dot{S}_{\dot{Z}_1} = \dot{Z}_1 I_1^2 = (10 + j30) \times 5,13^2 = 263 + j789 \text{ VA}$$

$$\dot{S}_{\dot{Z}_2} = \dot{Z}_2 I_2^2 = j15 \times 0,768^2 = j8,85 \text{ VA}$$

$$\dot{S}_{\dot{Z}_3} = \dot{Z}_3 I_2^2 = (5 + j15) \times 0,768^2 = 2,95 + j8,85 \text{ VA}$$

Altro metodo



Con riferimento al precedente circuito in cui sono rappresentate le reattanze di auto e mutua induzione, si possono scrivere le equazioni

$$\begin{cases} (jX_1 + \dot{Z}_1) \bar{I}_1 + jX_M \bar{I}_2 = \bar{E}_1 \\ jX_M \bar{I}_1 + (jX_2 + \dot{Z}_2 + \dot{Z}_3) \bar{I}_2 = 0 \end{cases}$$

dove si ha

$$L_1 = \frac{N_1^2}{\mathfrak{R}} = \frac{150^2}{4,97 \times 10^5} = 0,0453 \text{ H}$$

$$L_2 = \frac{N_2^2}{\mathfrak{R}} = \frac{50^2}{4,97 \times 10^5} = 0,5 \times 10^{-2} \text{ H}$$

$$X_2 = \omega L_2 = 314 \times 0,5 \times 10^{-2} = 1,58 \Omega$$

$$X_1 = \omega L_1 = 314 \times 0,0453 = 14,2 \Omega$$

$$M = \frac{N_1 N_2}{\mathfrak{R}} = \frac{150 \times 50}{4,97 \times 10^5} = 1,51 \times 10^{-2} \text{ H}$$

$$X_M = \omega M = 314 \times 1,51 \times 10^{-2} = 4,74 \Omega$$

Quindi

$$\begin{cases} (j14,4 + 10 + j30) \bar{I}_1 + j4,74 \bar{I}_2 = 230 \angle 60 \\ j4,74 \bar{I}_1 + (j1,57 + j15 + 5 + j15_3) \bar{I}_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (10 + j44,4) \bar{I}_1 + j4,74 \bar{I}_2 = 230 \angle 60 \\ j4,74 \bar{I}_1 + (5 + j31,6) \bar{I}_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 10 + j44,4 & j4,74 \\ j4,74 & 5 + j31,6 \end{vmatrix} = 50 + j316 + j222 - 1403 + 22,5 = -1330 + j538 = 1434 \angle 158$$

$$\Delta_{I_1} = \begin{vmatrix} 230 \angle 60 & j4,74 \\ 0 & 5 + j31,6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 230 \angle 60 & j4,74 \\ 0 & 32 \angle 81 \end{vmatrix} = 7360 \angle 141$$

$$\bar{I}_1 = \frac{\Delta_{I_1}}{\Delta} = \frac{7360 \angle 141}{1434 \angle 158} = 5,13 \angle -17 \text{ V}$$

$$\Delta_{I_2} = \begin{vmatrix} 10 + j44,4 & 230 \angle 60 \\ j4,74 & 0 \end{vmatrix} = -1090 \angle 150$$

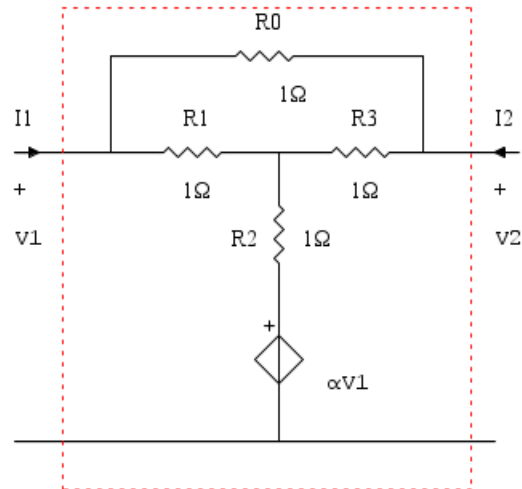
$$\bar{I}_2 = \frac{\Delta_{I_2}}{\Delta} = \frac{-1090 \angle 150}{1434 \angle 158} = 0,76 \angle -8 \text{ A}$$

Es. 5

Dato il doppio bipolo di figura, calcolare la matrice delle conduttanze.

NB: i terminali uscenti dal rettangolo tratteggiato sono le due porte del bipolo, la 1 a sinistra, la 2 a destra.

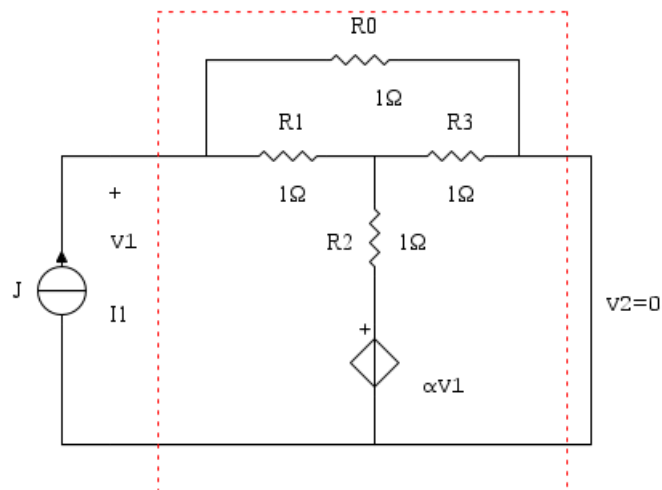
Convenzionalmente si considerano positive le correnti che entrano dal terminale assunto a potenziale più alto, cioè quello contrassegnato con il "+"

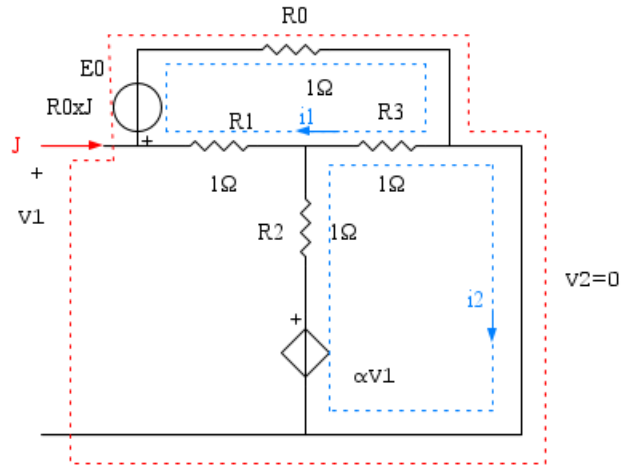


$$\begin{cases} I_1 = G_{11}V_1 + G_{12}V_2 \\ I_2 = G_{21}V_1 + G_{22}V_2 \end{cases}$$

$$\text{Calcolo di } G_{11} = \left. \frac{I_1}{V_1} \right|_{V_2=0}$$

Si cortocircuita la porta 2, si impone una corrente alla porta 1 con un generatore di corrente ($J = I_1$) entrante dal terminale assunto a potenziale più alto, si calcola la tensione alla porta 1 cioè ai capi del generatore ideale di corrente imposto. (Oppure si impone la tensione V_1 e si calcola la corrente I_1)





$$\begin{cases} (R_0 + R_1 + R_3) i_1 - R_3 i_2 = -R_0 J \\ -R_3 i_1 + (R_2 + R_3) i_2 = \alpha V_1 \\ V_1 = R_0 (J + i_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (R_0 + R_1 + R_3) i_1 - R_3 i_2 = -R_0 J \\ -R_3 i_1 + (R_2 + R_3) i_2 = \alpha R_0 (J + i_1) \\ 3i_1 - i_2 = -J \\ -i_1 (1 + \alpha) + 2i_2 = \alpha J \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 - \alpha & 2 \end{vmatrix} = 5 - \alpha$$

$$\Delta_{i_1} = \begin{vmatrix} -J & -1 \\ \alpha J & 2 \end{vmatrix} = J(\alpha - 2)$$

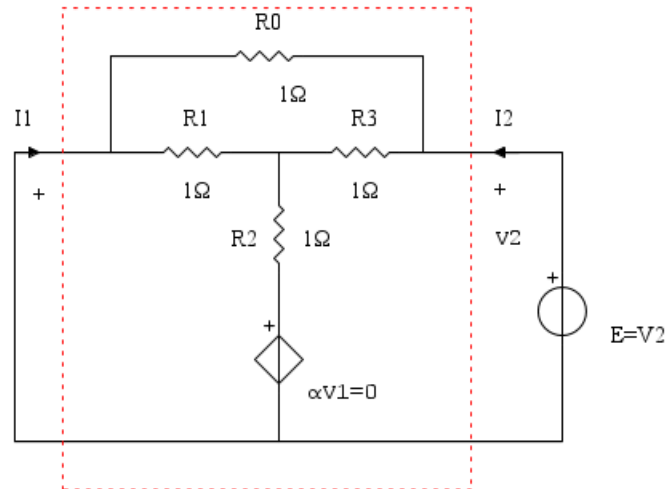
$$i_1 = \frac{\Delta_{i_1}}{\Delta} = \frac{J(\alpha - 2)}{5 - \alpha}$$

$$V_1 = J + \frac{J(\alpha - 2)}{5 - \alpha} = \frac{3J}{5 - \alpha}$$

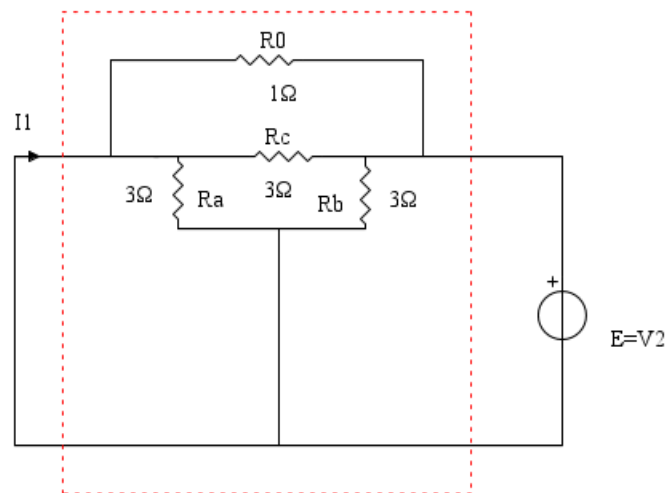
$$G_{11} = \frac{J}{V_1} = \frac{5 - \alpha}{3} \text{ S}$$

$$\text{Calcolo di } G_{12} = \left| \frac{I_1}{V_2} \right|_{V_1=0}$$

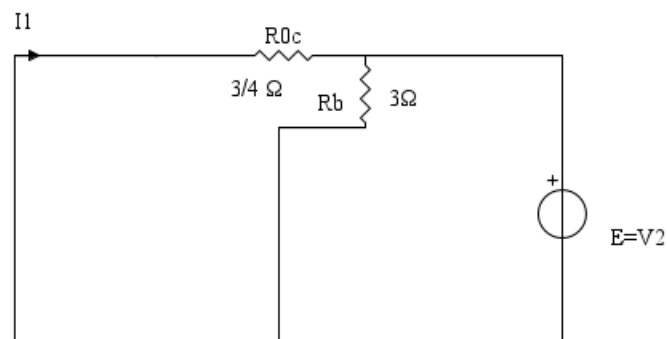
Si cortocircuita la porta 1 ($V_1 = 0$), si impone la tensione alla porta 2 con un generatore ideale di tensione ($V_2 = E$), si calcola la corrente I_1



Trasformiamo la stella nel triangolo equivalente



R_a è cortocircuitata mentre R_0 è in parallelo ad R_c

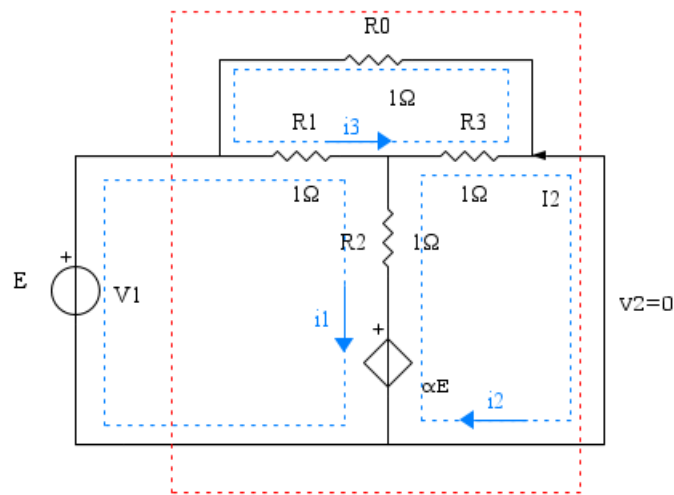


$$I_1 = -\frac{E}{R_{0c}} = -\frac{4}{3}E$$

$$G_{12} = \frac{I_1}{V_2} = -\frac{4}{3}S$$

$$\text{Calcolo } G_{21} = \left. \frac{I_2}{V_1} \right|_{V_2=0}$$

Si cortocircuita la porta 2 ($V_2 = 0$), si impone una tensione alla porta 1 ($V_1 = E$), si calcola la corrente I_2 entrante sempre dal terminale assunto a potenziale più alto (+)



$$\begin{cases} (R_1 + R_2) i_1 - R_2 i_2 - R_1 i_3 = E (1 - \alpha) \\ -R_2 i_1 + (R_3 + R_2) i_2 - R_3 i_3 = \alpha E \\ -R_1 i_1 - R_3 i_2 + (R_1 + R_0 + R_3) = 0 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \times (6 - 1) - 3 - 1 - (1 + 2) = 3$$

$$\Delta_{i_2} = \begin{vmatrix} 2 & E(1 - \alpha) & -1 \\ -1 & \alpha E & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -E(1 - \alpha) \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + \alpha E \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= -E(1 - \alpha)(-3 - 1) - 4E + \alpha E(6 - 1) = 4E - 4E\alpha - 4E + 5E\alpha = E\alpha$$

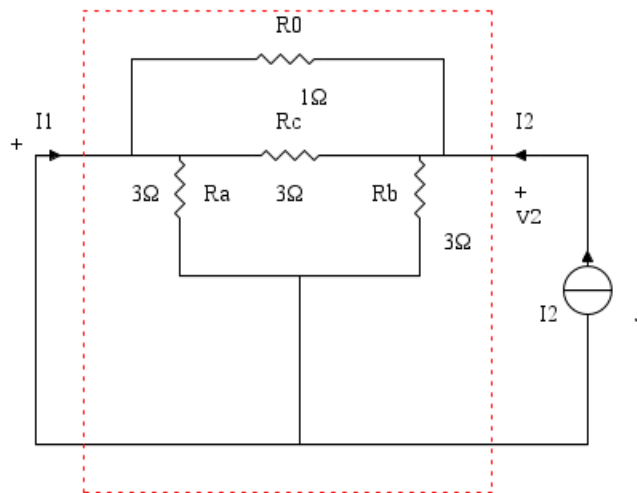
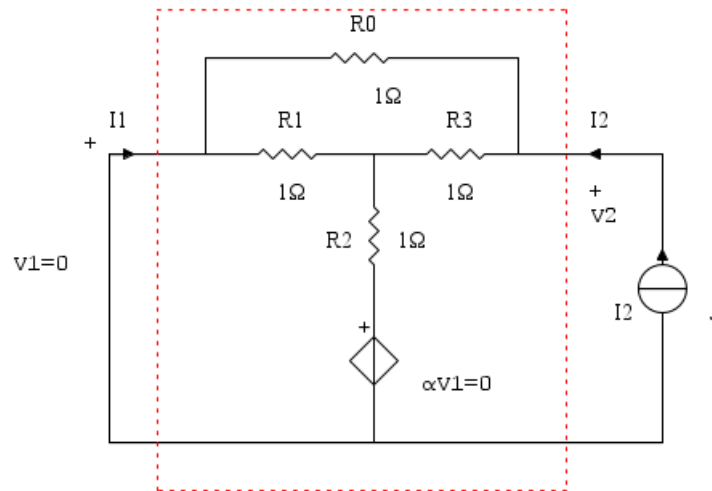
$$i_2 = \frac{\Delta_{i_2}}{\Delta} = \frac{E\alpha}{3}$$

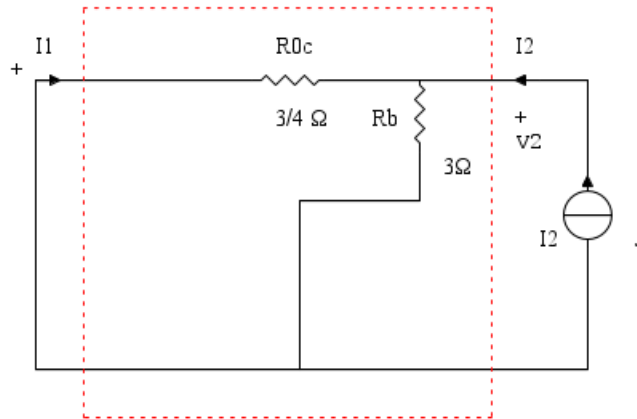
$$I_2 = -i_2 = -\frac{E\alpha}{3}$$

$$G_{21} = \frac{I_2}{E} = -\frac{\alpha}{3}$$

$$\text{Calcolo di } G_{22} = \left. \frac{I_2}{V_2} \right|_{V_1=0}$$

Si cortocircuita la porta 1, $V_1 = 0$, si impone la corrente I_2 con un generatore di corrente ($I_2 = J$), si calcola la tensione V_2 , cioè ai capi del generatore di corrente





$$V_2 = J \frac{R_{0c} R_b}{R_{0c} + R_b} = J \frac{\frac{3}{4} \times 3}{\frac{3}{4} + 3} = J \frac{9}{15} = J \frac{3}{5}$$

$$G_{22} = \frac{J}{V_2} = \frac{5}{3} \text{ S}$$



Estratto da "<https://www.electroyou.it/mediawiki/index.php?title=UsersPages:Admin:esercizi-random>"