

Zeno Martini (admin)

ESERCIZI SUL TRIFASE DAL FORUM

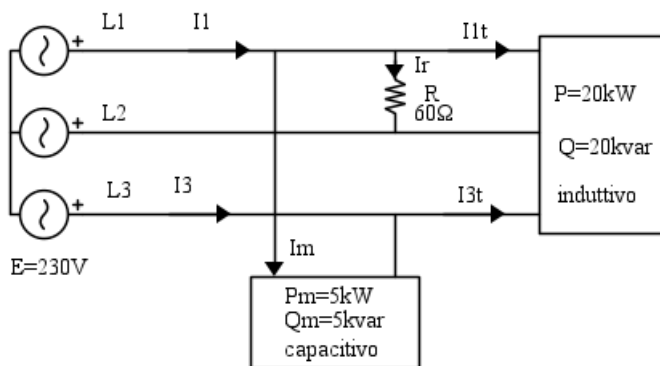
11 February 2015

Ho deciso di raccogliere in un articolo alcuni degli esercizi sul sistema trifase che, di tanto in tanto, sono proposti da studenti.

Generalmente sono svolti nel forum dialogando con lo studente, per una didattica mirata a far comprendere i concetti ed i metodi usati; sovente sono portati a termine ma a volte possono rimanere in sospeso, magari perché lo studente preferirebbe la soluzione completa subito, più che sforzarsi nel dialogo. Ma il forum non è un servizio di pronto intervento risolutivo per esercizi d'esame, ma deve essere concepito come il luogo in cui si deve poter arrivare alla soluzione con l'aiuto di qualcuno che ha un po' più di esperienza. In ogni caso alla fine può essere utile un riepilogo e questo articolo ha tale scopo.

Esercizio 1

Topic di riferimento



Calcolare la corrente I_1 e la potenza complessa del generatore su L_3 (E_3)

Soluzione

La corrente $\dot{I}_1$ è data da

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_m + \dot{I}_R + \dot{I}_{1t}$$

Il modulo della corrente della fase 1 del carico trifase equilibrato è

$$|\dot{I}_{1t}| = \frac{\sqrt{P^2 + Q^2}}{3E} = \frac{\sqrt{20^2 + 20^2}}{3 \times 230} = 0,041 \text{ kA} = 41 \text{ A}$$

Assumiamo in questo modo le tre tensioni di fase simmetriche

$$\dot{E}_1 = 230 \angle 90^\circ \text{ V}$$

$$\dot{E}_2 = 230 \angle -30^\circ \text{ V}$$

$$\dot{E}_3 = 230 \angle -150^\circ \text{ V}$$

Il carico trifase è induttivo e la corrente di fase è sfasata in ritardo rispetto alla tensione di fase

$$\dot{I}_{1t} = 41 \angle \left(90^\circ - \arctan \frac{Q}{P} \right) = 41 \angle 45^\circ \text{ A}$$

Il modulo della corrente assorbita dal carico monofase è dato da

$$|\dot{I}_m| = \frac{\sqrt{P_m^2 + Q_m^2}}{U_{13}} = \frac{\sqrt{25 + 25}}{\sqrt{3} \times 230} = 0,0178 \text{ kA} = 17,8 \text{ A}$$

La tensione che alimenta il carico monofase è la concatenata $\dot{U}_{13}$

$$\begin{aligned} \dot{U}_{13} &= \dot{E}_1 - \dot{E}_3 = 230 \angle 90^\circ - 230 \angle -150^\circ = j230 + \frac{\sqrt{3}}{2} \times 230 + j\frac{1}{2} \times 230 = \\ &= 230 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{3}{2} \right) = 398 \angle 60^\circ \text{ V} \end{aligned}$$

La corrente del carico monofase capacitivo, è sfasata in anticipo rispetto a tale tensione

$$\dot{I}_m = 17,8 \angle \left(60^\circ + \arctan \frac{Q_m}{P_m} \right) = 17,8 \angle 105^\circ$$

La resistenza R è alimentata dalla tensione concatenata $\dot{U}_{12}$

Il suo modulo vale

$$|\dot{I}_R| = \frac{U_{12}}{R} = \frac{\sqrt{3} \times 230}{60} = 6,64 \text{ A}$$

quindi si ha

$$\begin{aligned} \dot{U}_{12} &= \dot{E}_1 - \dot{E}_2 = 230 \angle 90^\circ - 230 \angle -30^\circ = j230 - \frac{\sqrt{3}}{2} \times 230 + j\frac{1}{2} \times 230 = \\ &= 230 \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{3}{2} \right) = 398 \angle 120^\circ \text{ V} \end{aligned}$$

$$\dot{I}_R = 6,64 \angle 120^\circ$$

Infine la corrente I_1 vale

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 &= 17,8 \angle 105^\circ + 6,64 \angle 120^\circ + 41 \angle 45^\circ = -4,61 + j17,2 - 3,32 + \\ &+ j5,75 + 29 + j29 = 21,1 + j52 = 56,1 \angle 67,9^\circ \end{aligned}$$

Per determinare la potenza complessa della fase 3, occorre calcolare la corrente $\dot{I}_3$

$$\dot{I}_3 = \dot{I}_{3t} - \dot{I}_m$$

si ha

$$\dot{I}_{3t} = 41 \angle \left(-150^\circ - \arctan \frac{Q}{P} \right) = 41 \angle -195^\circ$$

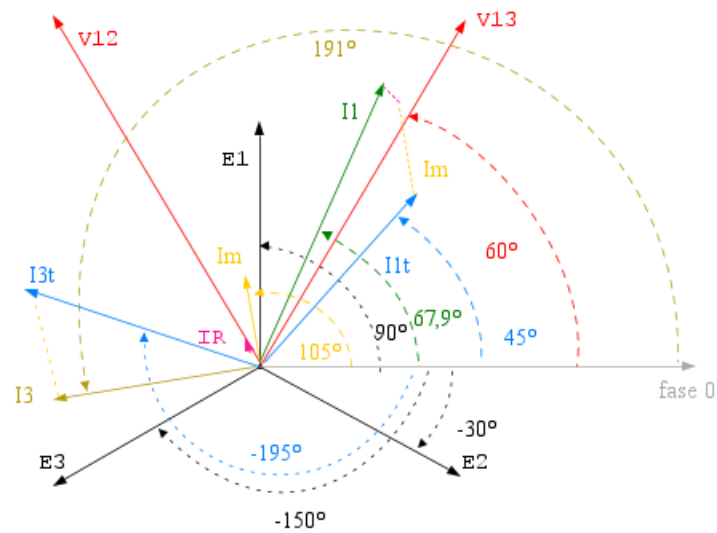
quindi

$$\begin{aligned} \dot{I}_3 &= 41 \angle -195^\circ - 17,8 \angle 105^\circ = -39,6 + j10,6 + 4,61 - j17,2 = -35 - j6,6 = \\ &= 35,6 \angle 191^\circ \end{aligned}$$

La potenza complessa vale perciò

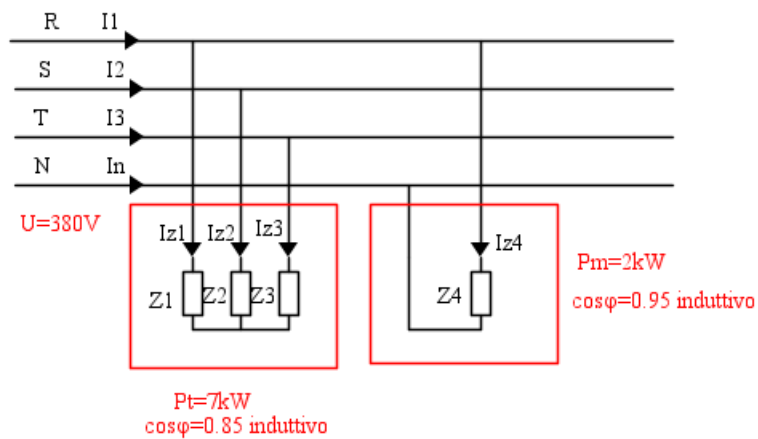
$$\dot{S}_3 = \dot{E}_3 \cdot \dot{I}_3 = 230 \angle -150^\circ \times 35,6 \angle -191^\circ = 8188 \angle -341 = 7742 + j2666$$

Rappresentazione grafica delle grandezze



Esercizio 2

Topic di riferimento



Calcolare la corrente I_1

Soluzione

La corrente su carico monofase ha modulo

$$I_{Z_4} = \frac{P_m}{E \cos \varphi} = \frac{2000}{220 \times 0,95} = 9,56 \text{ A}$$

quella di fase del carico trifase equilibrato

$$I_{Z1} = I_{Z2} = I_{Z3} = \frac{P}{3E \cos \varphi} = \frac{7000}{\times 220} = 12,5 \text{ A}$$

Assumiamo la tensione della fase 1 con fase zero, quindi sull'asse reale del piano di Gauss.

Essendo i due carichi ohmico-induttivi, le correnti sono in ritardo rispetto alle rispettive tensioni.

$$\dot{E}_1 = 220 \angle 0^\circ$$

$$\dot{E}_2 = 220 \angle -120^\circ$$

$$\dot{E}_3 = 220 \angle +120^\circ$$

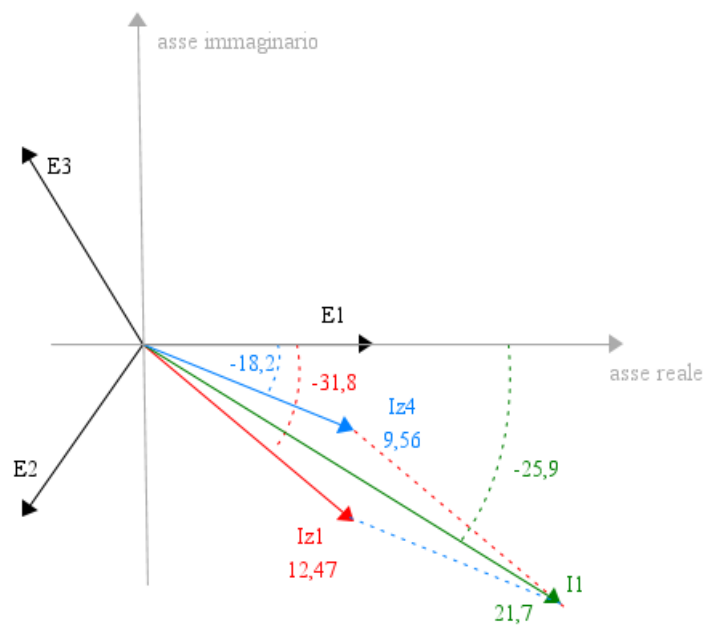
$$\dot{I}_{Z1} = 12,5 \angle -31,8^\circ = 12,5 \cos(-31,8^\circ) + j \sin(-31,8^\circ) = 10,6 - j6,57$$

$$\dot{I}_{Z4} = 9,56 \angle -18,2^\circ = 9,46 \cos(-18,2^\circ) + j \sin(-18,2^\circ) = 8,97 - j2,95$$

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_{Z1} + \dot{I}_{Z4} = 19,6 - j9,52 =$$

$$= \sqrt{19,6^2 + 9,52^2} \angle \arctan\left(-\frac{9,52}{19,6}\right) = 21,7 \angle -25,9^\circ$$

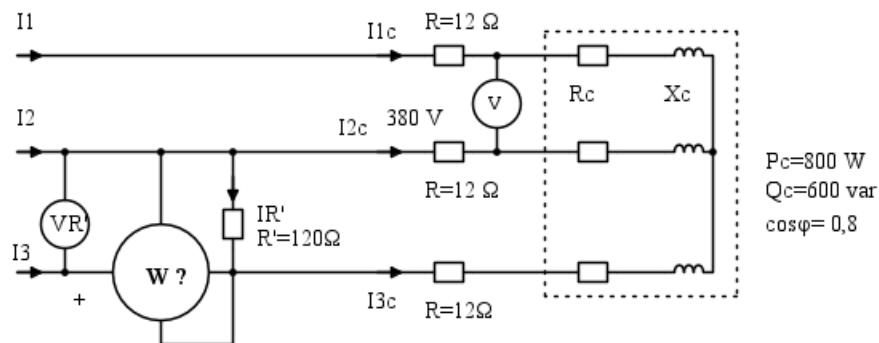
Rappresentazione grafica



Esercizio 3

Topic di riferimento

Calcolare l'indicazione del wattmetro nel seguente schema.



Soluzione

Ipotizziamo ideali gli strumenti, quindi nulle le correnti delle loro voltmetriche e la caduta di tensione sulle amperometriche.

Le tre correnti del carico equilibrato valgono

$$I_C = \frac{P}{\sqrt{3}U_C \cos \varphi_C} = \frac{800}{\sqrt{3} \times 380 \times 0,8} = 1,52 \text{ A}$$

La potenza persa su una resistenza R vale

$$P_R = RI_C^2 = 12 \times 1,52^2 = 27,7 \text{ W}$$

La potenza apparente a monte delle tre resistenze R vale

$$A = \sqrt{(P + 3P_R)^2 + Q_C^2} = \sqrt{883^2 + 600^2} = 1068 \text{ VA}$$

Quindi la tensione concatenata corrispondente vale

$$U = \frac{A}{\sqrt{3}I} = \frac{1068}{\sqrt{3} \times 1,52} = 406 \text{ V}$$

Questa è la tensione applicata alla resistenza R' dove la corrente è perciò

$$I_{R'} = \frac{U}{R'} = \frac{406}{120} = 3,38 \text{ A}$$

Il fasore della corrente wattmetrica si ricava da

$$\dot{I}_3 = \dot{I}_{3C} - \dot{I}_{R'}$$

Assumendo

$$\dot{E}_1 = E \angle 90^\circ; \dot{E}_2 = E \angle -30^\circ; \dot{E}_3 = E \angle -150^\circ$$

avremo

$$\dot{I}_{3C} = \frac{\dot{E}_3}{\dot{Z}_C} = 1,52 \angle (-150^\circ - 36,9^\circ) = 1,52 \angle -186,9^\circ \text{ A}$$

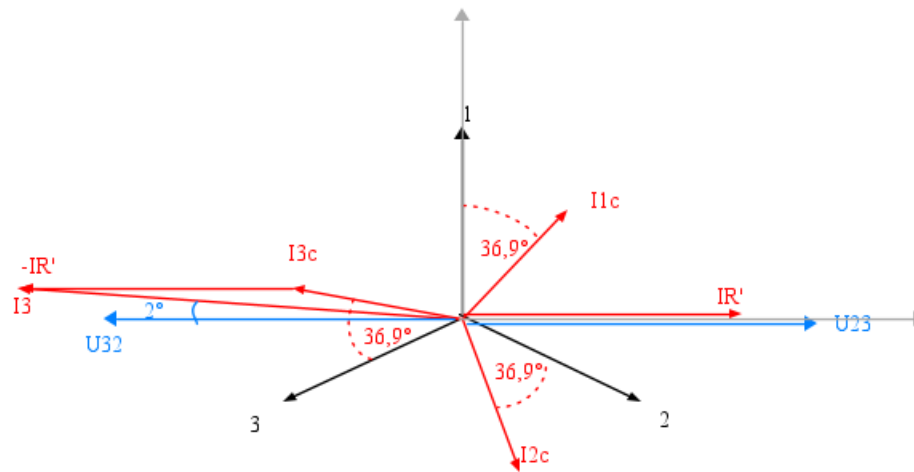
$$\dot{I}_{R'} = \frac{\dot{U}_{23}}{R'} = 3,38 \angle 0^\circ \text{ A}$$

$$\begin{aligned} \dot{I}_3 &= 1,52 \angle -186,9^\circ - 3,38 \angle 0^\circ = -1,51 + j0,18 - 3,38 = \\ &= -4,89 + j0,18 = 4,89 \angle 178^\circ \text{ A} \end{aligned}$$

Quindi l'indicazione del wattmetro è data da

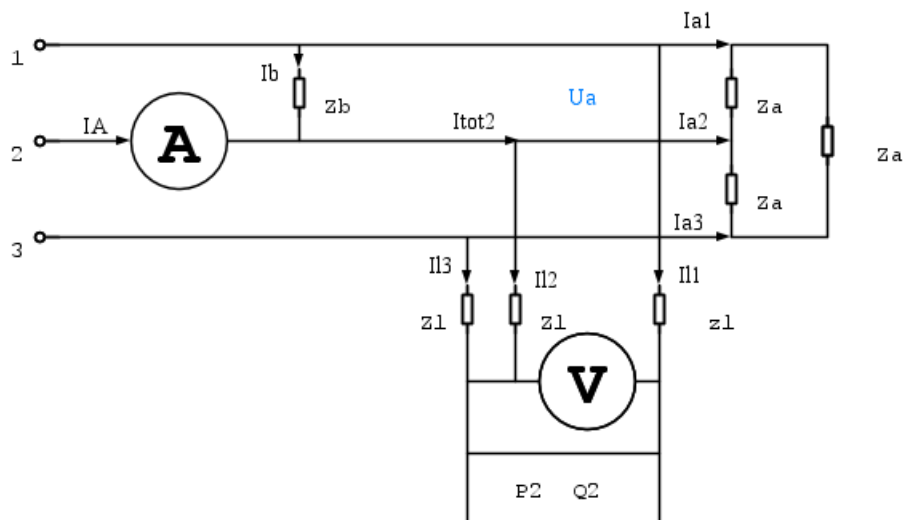
$$W = U_{32} \cdot I_3 \cos \alpha_W = 406 \times 4,89 \times \cos 2^\circ = 1984 \text{ W}$$

Diagramma fasoriale



Esercizio 4

Topic di riferimento



Dati

$V = 380\text{V}$ $Z_a = 12 + j10\ \Omega$ $Z_b = 15 + j8\ \Omega$
 $l = 300\text{m}$ $S = 6\text{ mm}^2$ $\rho = 1,7 \times 10^{-8}\ \Omega\text{m}$ $x = 0,8\ \Omega/\text{km}$
 $P_2 = 12\text{ kW}$ $Q_2 = 10\text{ kvar}$

Calcolare la corrente I_A , indicata dall'amperometro.

Soluzione

$$I_l = \frac{\sqrt{P_2^2 + Q_2^2}}{\sqrt{3}U} = \frac{\sqrt{12^2 + 10^2}}{\sqrt{3} \times 380} \times 10^3 = 23,7\text{ A}$$

$$\dot{Z}_l = l \left(\frac{\rho}{S} + jx \right) = 0,85 + j0,24\ \Omega$$

$$Q_l = 3 \times 0,24 \times 23,7^2 = 404\text{ var}$$

$$P_l = 3 \times 0,85 \times 23,7^2 = 1432\text{ W}$$

$$P_{l2} = P_l + P_2 = 1432 + 12000 = 13432\text{ W}$$

$$Q_{l2} = Q_l + Q_2 = 404 + 10000 = 10404\text{ var}$$

$$U_a = \frac{\sqrt{P_{l2}^2 + Q_{l2}^2}}{\sqrt{3}I_l} = \frac{\sqrt{13432^2 + 10404^2}}{\sqrt{3} \times 23,7} = 414\text{ V}$$

$$\dot{Z}_a = \sqrt{12^2 + 10^2} \angle \arctan \frac{10}{12} = 15,6 \angle 39,8^\circ$$

$$S_a = 3 \frac{U_a^2}{Z_a} = 3 \frac{414^2}{15,6} = 32961\text{ VA}$$

$$I_a = \frac{S_a}{\sqrt{3} \times U_a} = \frac{32961}{\sqrt{3} \times 414} = 45,9\text{ A}$$

$$P_a = 32961 \times \cos 39,8 = 25323 \text{ W}$$

$$Q_a = 32961 \times \sin 39,8 = 21098 \text{ var}$$

$$P_{tot} = P_{l2} + P_a = 13432 + 25323 = 38755 \text{ W}$$

$$Q_{tot} = Q_{l2} + Q_a = 10404 + 21098 = 31502 \text{ var}$$

$$I_{tot} = \frac{\sqrt{P_{tot}^2 + Q_{tot}^2}}{\sqrt{3}U_1} = \frac{\sqrt{38755^2 + 31502^2}}{\sqrt{3} \times 414} \times 10^3 = 69,6 \text{ A}$$

$$\varphi_{tot} = \arctan \frac{Q_{tot}}{P_{tot}} = \arctan \frac{31502}{38755} = 39,1^\circ$$

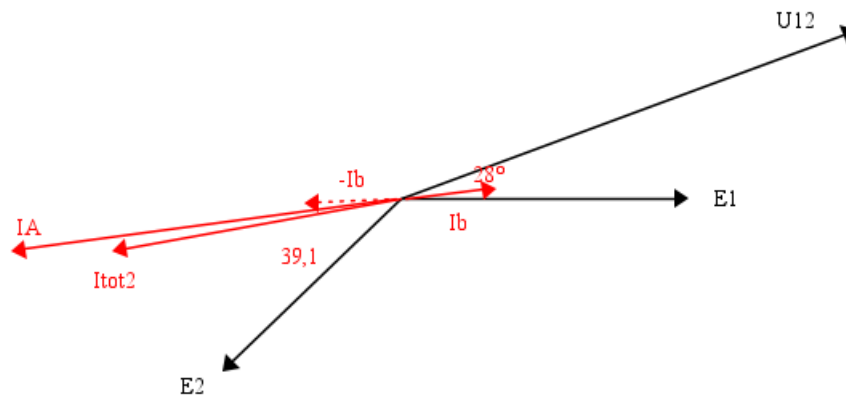
$$\dot{Z}_b = \sqrt{15^2 + 8^2} \angle \arctan \frac{8}{15} = 17 \angle 28^\circ$$

$$I_b = \frac{U_a}{Z_b} = \frac{414}{17} = 24,3 \text{ A}$$

Assumendo a fase zero la tensione stellata E_a

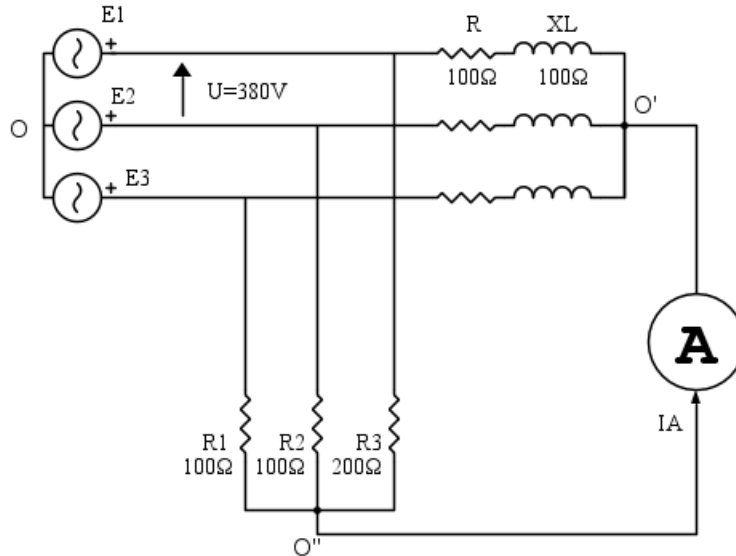
$$\begin{aligned} \dot{I}_A &= \dot{I}_{tot2} - \dot{I}_b = 69,6 \angle -159,1^\circ - 24,3 \angle 2^\circ = -65 - j24,8 - 24,3 + j0,85 = \\ &= -89,3 - j23,15 = 92,3 \angle 195^\circ \text{ A} \end{aligned}$$

Diagramma fasoriale



Esercizio 5

Topic di riferimento



Calcolare l'intensità di corrente I_A misurata dall'amperometro

Soluzione

L'amperometro ideale è un cortocircuito, quindi la corrente da calcolare è la corrente di cortocircuito del generatore equivalente visto da O'' , O' . Immaginiamo che non ci sia l'amperometro e determiniamo, con Millman la tensione tra i due centri stella, tenendo presente che, essendo la stella di impedenze equilibrata, O' ed O sono equipotenziali.

$$\dot{E}_{Th} = \dot{U}_{O''O'} = \frac{\frac{\dot{E}_1}{R_1} + \frac{\dot{E}_2}{R_2} + \frac{\dot{E}_3}{R_3}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} = \frac{\frac{\dot{E}_1}{100} + \frac{\dot{E}_2}{100} + \frac{\dot{E}_3}{200}}{\frac{1}{100} + \frac{1}{100} + \frac{1}{200}} = \frac{-\frac{\dot{E}_3}{5} + \frac{\dot{E}_3}{200}}{\frac{5}{200}} =$$

$$= -\frac{\dot{E}_3}{5} = -\frac{220}{5} \angle -150^\circ = -44 \angle -150^\circ \text{ V}$$

$$\dot{Z}_1 = \dot{Z}_2 = \dot{Z}_3 = \dot{Z} = 100 + j100 \Omega$$

L'impedenza del generatore equivalente si trova cortocircuitando le alimentazioni, quindi è data dalla serie del parallelo delle tre resistenze e di quello delle tre impedenze.

$$\dot{Z}_{Th} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} + \frac{1}{\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3}} = 40 + \frac{100}{3} + j\frac{100}{3} \Omega$$

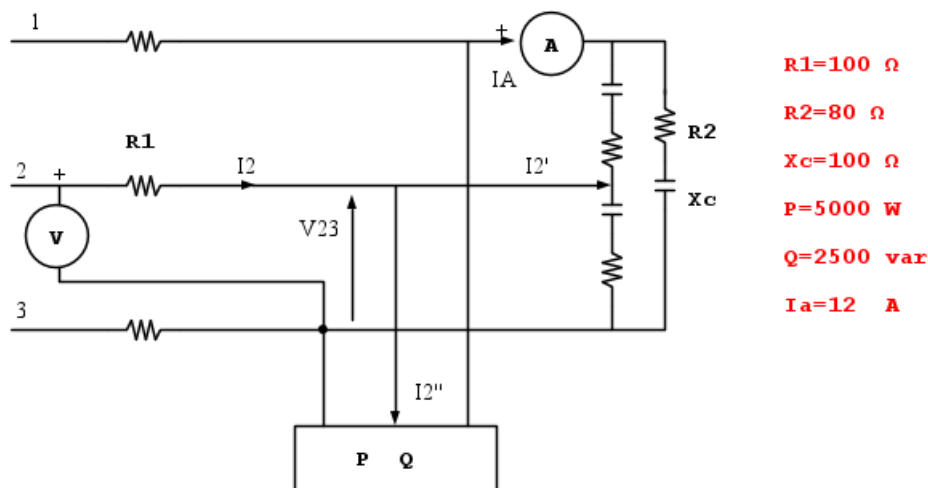
La corrente richiesta, come detto, è la corrente di cortocircuito del generatore (corrente di Norton)

$$\dot{I}_A = \frac{\dot{E}_{Th}}{\dot{Z}_{Th}} = \frac{-44 \angle -150^\circ}{220 + j100} \times 3 = -\frac{132 \angle -150^\circ}{242 \angle 24,5^\circ} = -0,545 \angle -175^\circ \text{ A}$$

Il testo del problema non richiedeva la fase, quindi bastava il rapporto dei moduli della tensione e dell'impedenza. La corrente è dunque $I_A = 0,545 \text{ A}$

Esercizio 6

Topic di riferimento



Determinare l'indicazione del voltmetro

Soluzione

L'indicazione del voltmetro è data da

$$V = |\dot{V}_{23} + R_1 \dot{I}_2|$$

La corrente della linea 2 è la somma

$$\dot{I}_2 = \dot{I}_2' + \dot{I}_2''$$

Il modulo di I_2' è uguale ad I_A

$$|\dot{I}_2'| = I_A$$

Il modulo della tensione tra i fili 2 e 3 ai capi dei due carichi equilibrati è ricavabile, con il teorema delle potenze attive e reattive, dai dati relativi al triangolo resistivo capacitivo e dal valore della corrente di linea assorbita da questo carico e misurata dall'amperemetro

$$P_2 = 3 \left(\frac{I_A}{\sqrt{3}} \right)^2 R_2 = 80 \times 12^2 = 11520 \, W$$

$$Q_2 = 3 \left(\frac{I_A}{\sqrt{3}} \right)^2 X_C = 100 \times 12^2 = 14400 \, var$$

$$S_2 = \sqrt{P_2^2 + Q_2^2} = \sqrt{11520^2 + 14400^2} = 18441 \, VA$$

$$V = |\dot{V}_{23}| = \frac{S_2}{\sqrt{3}I_A} = \frac{18441}{\sqrt{3} \times 12} = 887 \text{ V}$$

$$|\dot{I}_2''| = \frac{\sqrt{P^2 + Q^2}}{\sqrt{3}V} = \frac{\sqrt{5000^2 + 2500^2}}{\sqrt{3} \times 887} = 3,64 \text{ A}$$

La corrente $\dot{I}_2'$ è sfasata in anticipo rispetto alla tensione stellata $\dot{E}_2$ dell'angolo

$$\varphi_2 = \arctan\left(\frac{X_C}{R_2}\right) = \arctan\left(\frac{100}{80}\right) = 51,3^\circ$$

mentre la corrente $\dot{I}_2''$ è sfasata in ritardo rispetto alla stessa tensione dell'angolo

$$\varphi = \arctan\left(\frac{2500}{5000}\right) = 26,5^\circ \text{ Assumendo zero la fase di } \dot{E}_2 \text{ sarà allora}$$

$$\dot{I}_2' = 12 \angle 51,3^\circ = 7,5 + j9,36 \text{ A}$$

$$\dot{I}_2'' = 3,64 \angle -26,5^\circ = 3,25 - j1,62 \text{ A}$$

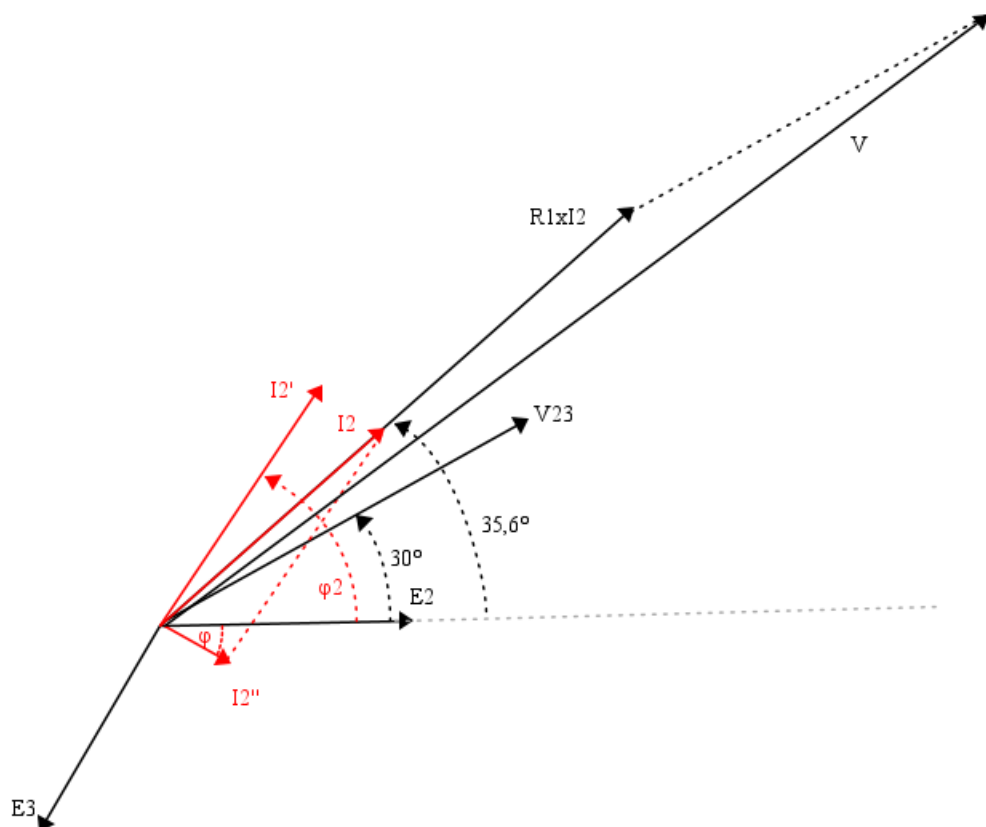
$$\dot{I}_2 = \dot{I}_2' + \dot{I}_2'' = 7,5 + j9,36 + 3,25 - j1,62 = 10,8 + j7,74 = 13,3 \angle 35,6^\circ \text{ A}$$

La tensione misurata dal voltmetro vale pertanto

$$V = |\dot{V}_{23} + R_1 \dot{I}_2| = |887 \angle 30^\circ + 13,3 \times 100 \angle 35,6^\circ| =$$

$$= |768 + j444 + 1081 + j774| = |1849 + j1218| = 2214 \text{ V}$$

Grafico fasoriale



Altri esercizi

Nel sito ci sono altri articoli con esercizi sul trifase

- [Uso di Thevenin](#)
- [Trifase con Scilab](#)
- [tre cortocircuiti in BT](#)
- [Sistemi dissimmetrici](#)

Estratto da "<http://www.electroyou.it/mediawiki/index.php?title=UsersPages:Admin:esercizi-sul-trifase-dal-forum>"