

Zeno Martini (admin)

ESERCIZIO SULLA LEGGE DI FARADAY-NEUMANN-LENZ

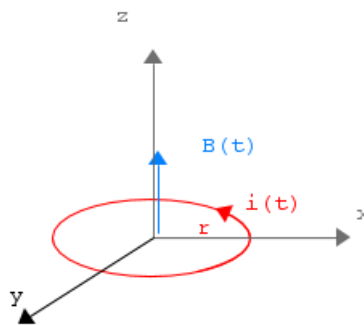
8 April 2015

L'antefatto

Un nostro utente, in seguito ad una [discussione](#) sviluppata nel forum, ha pubblicato di recente un [articolo](#) in cui sostiene che nessuno ha mai compreso la legge di Faraday-Neumann-Lenz, e che la quasi totalità degli insegnanti, non solo quelli delle scuole medie superiori, ma anche docenti universitari, nonché tutti o quasi i professionisti, la applica in modo errato.

Come esempio a sostegno della tesi ritiene di poter usare un semplice esercizio che io stesso avevo sottoposto alla sua analisi, preso da un testo di una famosa collana (**Schaum**): **"Elettromagnetismo" di J.A. Edminister.**

La spira conduttrice circolare di figura si trova nel piano $z = 0$, ha un raggio di $r = 0,10\text{m}$ ed una resistenza $R = 5\ \Omega$. Assegnata l'induzione $B = 0,2 \sin 10^3 t\ \text{T}$ nel verso dell'asse z , determinare la corrente



J.A.Edminister lo risolve così

$$\Phi = BS = B\pi r^2 = 6,28 \times 10^{-3} \sin 10^3 t \quad \text{Wb}$$

$$i(t) = -\frac{1}{R} \frac{d\Phi}{dt} \quad [1]$$

$$i(t) = -\frac{6,28 \times \cos 10^3 t}{5} = -1,26 \cos 10^3 t \quad \text{A}$$

Il grave errore di cui la quasi totalità dei testi di elettromagnetismo è piena, secondo l'autore dell'articolo citato, è la formula [1] usata per il calcolo della corrente, cioè la divisione della derivata del flusso per la resistenza.

Io ho sostenuto, e tuttora sostengo, che la formula non ha nulla di errato se si considera il corretto flusso concatenato con la spira, come si deve fare, perché questo dice la legge di Faraday-Neumann-Lenz. Fornisce ovviamente risultati errati se si sbaglia nel valutare il flusso. L'osservazione doverosa è però che non dobbiamo tranquillamente utilizzarla quando $R=0$: in tal caso occorre esaminare con attenzione il fenomeno fisico.

Si può discutere, nel caso del semplice esercizio proposto, su che cosa si intenda per induzione assegnata.

Si tratta di un'induzione dovuta ad una sorgente completamente esterna al circuito, quindi non dipendente dall'induzione prodotta dalla corrente circolante nella spira, od è un'induzione comprensiva anche di quella prodotta dalla corrente nella spira?

In questo secondo caso la soluzione di Edminister è esatta; nel primo invece è approssimata, ed il grado di approssimazione dipende dal valore dell'induttanza della spira, o meglio della reattanza ad essa associata, rispetto al valore della resistenza.

Il problema vero nasce se si ipotizza una resistenza nulla.

In quel caso la [1] non si può applicare; dividere per zero è privo di senso come noto, casomai si deve parlare di limite, nel qual caso occorre valutare come il flusso concatenato, quindi la sua derivata, dipenda dalla resistenza.

Se si continua a confondere il flusso esterno con quello concatenato, poiché quello esterno è indipendente da ciò che succede nel circuito, si arriva a dire che la corrente è infinita.

Ma il flusso effettivamente concatenato con la spira in realtà quanto vale in questa situazione estrema?

Invece di sostenere che la [1] è un grave errore di cui nessuno si è mai accorto, che è un'affermazione che stride notevolmente, ad esempio, per chi ha dovuto faticare con la reazione di indotto delle macchine elettriche, in particolare con i diagrammi di Potier e Blondel per le macchine sincrone, si deve porre l'attenzione su quale sia il valore del flusso concatenato da inserire nella formula.

Fino a che punto possiamo ritenerlo uguale a quello esterno?

Quali errori commettiamo in questo caso?

E' possibile quantificare la differenza tra il flusso concatenato effettivamente ed il flusso esterno?

Cosa succede quando $R \rightarrow 0$?

Nei commenti all'articolo citato ci sono interessanti considerazioni, in particolare quella di [Pietro Baima](#) che inizia così "Sì, anche io intendevo dire che la deduzione "trascuro la resistenza -> la corrente non è infinita..."

Io, ad ogni modo, ho pensato di discutere il seguente

Esercizio

Con riferimento alla figura del precedente esercizio, quindi spira nel piano xy, tenendo conto dell'induttanza del circuito indotto, determinare la corrente in esso circolante nell'ipotesi

che sia interessato da un flusso magnetico $\Phi_{ext}(t)$ dovuto all'induzione parallela all'asse z , prodotta da una sorgente esterna. Discutere i casi estremi di resistenza ed induttanza nulle. Si considerino i casi di un'induzione esterna costante, crescente linearmente, e variabile con legge sinusoidale.

Soluzione

Per la legge di Faraday-Neuman-Lenz la corrente nella spira, supponendo maggiore di zero la sua resistenza, si trova dividendo la variazione del **flusso concatenato** con la spira per la sua resistenza; quindi, applicando la [1]

$$i = -\frac{1}{R} \frac{d\Phi_C}{dt}$$

Tenendo conto del coefficiente di autoinduzione L della spira, il flusso con essa concatenato è dato da

$$\Phi_C(t) = \Phi_{ext}(t) + Li(t)$$

quindi l'equazione precedente diventa

$$i = -\frac{1}{R} \left(\frac{d\Phi_{ext}}{dt} + L \frac{di}{dt} \right)$$

che poniamo nella forma

$$Ri + L \frac{di}{dt} = -\frac{d\Phi_{ext}}{dt} \quad [2]$$

Induzione costante

In tal caso è

$$\frac{d\Phi_{ext}}{dt} = 0$$

quindi, sostituendo nella [2] si ha

$$Ri + L \frac{di}{dt} = 0$$

la cui soluzione è

$$i(t) = c_1 e^{-\frac{R}{L}t}$$

con

$$c_1 = i(0)$$

La corrente nella spira corrisponde all'evoluzione libera determinata dalla corrente iniziale. Non essendoci altre forze elettromotrici oltre a quella indotta, la corrente inizialmente è da ritenere nulla e tale resta: $c_1 = 0$ quindi

$$i(t) = 0$$

Se inizialmente, per una qualche ragione la spira fosse sede di una corrente, essa si smorzerebbe secondo la costante di tempo $\tau = L / R$ e se R fosse nulla la corrente permanerebbe indefinitamente.

Induzione crescente linearmente

$$\Phi_{ext}(t) = kt$$

Poiché

$$\frac{d\Phi_{ext}}{dt} = k$$

sostituendo nella [2] abbiamo

$$Ri + L \frac{di}{dt} = -k$$

Con l'aiuto di

[WolframAlpha: R*y\(t\)+L*y'\(t\)=-k](#) ricaviamo

$$i(t) = c_1 e^{-\frac{R}{L}t} - \frac{k}{R}$$

imponendo la condizione di corrente iniziale nulla

$$i(0) = 0 \rightarrow c_1 = \frac{k}{R}$$

quindi abbiamo

$$i(t) = \frac{k}{R} \left(e^{-\frac{R}{L}t} - 1 \right) \quad [3]$$

La corrente varia con legge esponenziale ed assume il valore di regime

$$I = -\frac{k}{R} \quad [4]$$

secondo la costante di tempo $\tau = \frac{L}{R}$.

La [4] è anche il valore che assumerebbe istantaneamente la corrente se l'induttanza fosse nulla.

$$\lim_{L \rightarrow 0} \left[\frac{k}{R} \left(e^{-\frac{R}{L}t} - 1 \right) \right] = -\frac{k}{R}$$

Il flusso concatenato vale

$$\Phi_C = \Phi_{ext} + Li = kt + L \frac{k}{R} \left(e^{-\frac{R}{L}t} - 1 \right) = k \left(t + \frac{L}{R} e^{-\frac{R}{L}t} - \frac{L}{R} \right) \quad [5]$$

e per $t \gg \frac{L}{R}$ si ha

$$\Phi_C \approx k \left(t - \frac{L}{R} \right) \approx kt = \Phi_{ext}$$

arriva in pratica a coincidere con il flusso esterno. Se $L = 0$ coincide esattamente non essendoci flusso di autoinduzione

Nel caso di resistenza nulla, non bisogna utilizzare la [4] per determinare la corrente a regime, ma occorre considerare $L > 0$ e risolvere la [2] (ad esempio sempre con l'aiuto di [WolframAlpha: \$0*y\(t\)+L*y'\(t\)=-k\$](#))

od effettuare il passaggio al limite della [3]

$$\lim_{R \rightarrow 0} \left[\frac{k}{R} \left(e^{-\frac{R}{L}t} - 1 \right) \right] = \frac{k \left(-\frac{t}{L} \right)}{1} = -\frac{k}{L}t$$

In tale condizione abbiamo dunque, esaurito il transitorio,

$$i(t) = -\frac{k}{L}t = -\frac{\Phi_{ext}}{L} \quad [6]$$

la corrente cresce linearmente e diventa infinita in un tempo infinito.

Il flusso concatenato ora è nullo in quanto il flusso di autoinduzione varia in senso opposto al flusso esterno.

$$\Phi_C = \Phi_{ext} + Li = \Phi_{ext} - \Phi_{ext} = 0$$

(Basta anche fare il passaggio al limite della [5] per $R \rightarrow 0$).

Trascurare L , quando $R > 0$, quindi considerare il flusso esterno uguale al flusso concatenato, elimina il transitorio, fornendo immediatamente la soluzione a regime.

Se però si considera nulla la resistenza, non si può considerare tale anche l'induttanza. Considerando l'induttanza la corrente tende all'infinito, cresce tanto più velocemente quanto minore è l'induttanza, ed assume in ogni istante il valore che dà luogo ad un flusso di autoinduzione che annulla quello esterno, dando luogo ad un flusso concatenato nullo.

In queste condizioni la [1] assume la forma indeterminata $0 / 0$ e non può essere usata per determinare la corrente.

Induzione variabile sinusoidalmente

$$\Phi_{ext} = \Phi \sin(\omega t + \alpha)$$

L'equazione da risolvere è

$$Ri + L \frac{di}{dt} = -\omega \Phi \cos(\omega t + \alpha)$$

Sempre con l'aiuto di [WlframAlpha: \$R*y\(t\)+L*y'\(t\)=-\(\omega*\Phi\)*\cos\(\omega*t+\alpha\)\$](#) troviamo

$$i(t) = -\frac{\omega^2 \Phi L}{\omega^2 L^2 + R^2} \sin(\omega t + \alpha) - \frac{\omega \Phi R}{\omega^2 L^2 + R^2} \cos(\omega t + \alpha) + c_1 e^{-\frac{R}{L}t} \quad [7]$$

raccogliendo

$$i(t) = -\frac{\omega \Phi}{\omega^2 L^2 + R^2} (\omega L \sin(\omega t + \alpha) + R \cos(\omega t + \alpha)) + c_1 e^{-\frac{R}{L}t}$$

possiamo porre nella forma

$$i(t) = -\frac{\omega \Phi}{\sqrt{\omega^2 L^2 + R^2}} \sin\left(\omega t + \alpha + \arctan \frac{R}{\omega L}\right) + c_1 e^{-\frac{R}{L}t} \quad [8]$$

Poniamo sempre

$$i(0) = 0 \rightarrow$$

il che ci permette di determinare c_1

$$c_1 = \frac{\omega \Phi}{\sqrt{\omega^2 L^2 + R^2}} \sin\left(\alpha + \arctan \frac{R}{\omega L}\right)$$

Supponiamo anche che il flusso all'istante iniziale $t=0$ sia nullo

Quindi

$$\alpha = 0 \rightarrow$$

$$c_1 = \frac{\omega \Phi}{\sqrt{\omega^2 L^2 + R^2}} \sin\left(\arctan \frac{R}{\omega L}\right) = \frac{\omega \Phi R}{\omega^2 L^2 + R^2}$$

quindi

$$i(t) = \frac{\omega \Phi}{\sqrt{\omega^2 L^2 + R^2}} \left(\frac{R}{\sqrt{\omega^2 L^2 + R^2}} e^{-\frac{R}{L}t} - \sin\left(\omega t + \arctan \frac{R}{\omega L}\right) \right) \quad [9]$$

Per

$$t \rightarrow \infty$$

abbiamo la corrente a regime, a conclusione del transitorio

$$i(t) = -\frac{\omega\Phi}{\sqrt{\omega^2 L^2 + R^2}} \sin\left(\omega t + \arctan \frac{R}{\omega L}\right) \quad [10]$$

Trascurando l'induttanza, il che equivale a considerare il flusso concatenato uguale al flusso della sorgente esterna, abbiamo (basta sostituire $L = 0$ in [10] o ricavare il limite della [9] per $L \rightarrow 0$)

$$L = 0 \rightarrow i(t) = -\frac{\omega\Phi}{\sqrt{\omega^2 L^2 + R^2}} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\omega\Phi}{R} \cos \omega t \quad [11]$$

Qui c'è la trappola in cui non bisogna cadere: se la resistenza è nulla l'ampiezza della corrente secondo la formula precedente sarebbe infinita. Abbiamo però considerato già nulla l'induttanza e considerare nulla anche la resistenza porta ad un assurdo: ad esempio, la derivata del flusso esterno dovrebbe essere nulla, ma non lo può essere, perché il flusso esterno è imposto e varia con legge sinusoidale, quindi anche la sua derivata. La conclusione è che non possiamo considerare nulla sia l'induttanza che la resistenza. Per comprendere allora cosa succede quando $R \rightarrow 0$ dobbiamo, necessariamente, tenere conto dell'induttanza.

$$R = 0 \rightarrow c_1 = 0$$

ed allora troviamo che, per $L > 0$ si ha (basta sostituire $R = 0$ in [10] o calcolare il limite per $R \rightarrow 0$ di [9])

$$i(t) = -\frac{\Phi}{L} \sin(\omega t) \quad [12]$$

La corrente assume un valore tale che il flusso di autoinduzione ha la stessa ampiezza del flusso esterno ed oscilla in opposizione di fase. Il flusso concatenato con la spira è perciò nullo in ogni istante ed il secondo membro della [1] assume la forma indeterminata $0 / 0$; per questo non può essere utilizzata.

Vediamo anche

$$\alpha = \frac{\pi}{2} \rightarrow$$

$$c_1 = \frac{\omega^2 \Phi L}{\omega^2 L^2 + R^2}$$

$$R = 0 \rightarrow c_1 = \frac{\Phi}{L}$$

Sostituendo i valori precedenti nella [7] si ottiene

$$i(t) = \frac{\Phi}{L} (1 - \cos \omega t) \quad [13]$$

Il flusso concatenato con la spira vale

$$\Phi_C = \Phi_{ext} + Li = \Phi \cos \omega t + \Phi (1 - \cos \omega t) = \Phi \quad [14]$$

che è il valore esistente all'istante iniziale che si mantiene costante.

Anche in questo caso la [1] assume la forma indeterminata $0 / 0$ essendo nulla la derivata del flusso concatenato insieme alla resistenza.

Grado di approssimazione

Se immaginiamo di conoscere il flusso effettivamente concatenato

$$\Phi_C(t) = \Phi_C \sin(\omega t + \alpha)$$

per ricavare la corrente possiamo scrivere, applicando la [1] quando $R > 0$

$$i(t) = -\frac{\omega \Phi_C}{R} \cos(\omega t + \alpha)$$

Considerando per semplicità $\alpha = 0$, vediamo quando è ammissibile confondere il flusso della sorgente esterna con il flusso effettivamente concatenato.

Imponendo l'uguaglianza tra la corrente a regime ricavata conoscendo il flusso concatenato e quella calcolata ricorrendo al solo flusso esterno, troviamo le relazioni che devono intercorrere tra i due flussi affinché l'uguaglianza sia possibile.

$$-\frac{\omega \Phi}{\sqrt{\omega^2 L^2 + R^2}} \sin\left(\omega t + \arctan \frac{R}{\omega L}\right) = -\frac{\omega \Phi_C}{R} \cos \omega t$$

$$\frac{R \Phi}{\sqrt{\omega^2 L^2 + R^2}} \sin\left(\omega t + \arctan \frac{R}{\omega L}\right) = \Phi_C \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Tra il flusso effettivamente concatenato e il flusso della sorgente esterna c'è una differenza di fase data in valore assoluto da

$$\beta = \left| \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{R}{\omega L} \right|$$

mentre tra i moduli ricaviamo la relazione

$$\frac{R \Phi}{\sqrt{\omega^2 L^2 + R^2}} = \Phi_C$$

quindi

$$\Phi_C = \Phi \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\omega L}{R}\right)^2 + 1}}$$

Se $L = 0$ il flusso concatenato coincide con il flusso della sorgente esterna, in modulo e fase.

L'induttanza nulla non esiste nella realtà, mentre la resistenza nulla possiamo ritenerla reale, vista l'esistenza superconduttori.

Il flusso concatenato effettivo è inferiore al flusso esterno, quindi se si considera il solo flusso esterno, si calcolerà una corrente maggiore di quella reale, tanto più quanto maggiore è il rapporto $\omega L / R$. Allora occorre confrontare i valori di R ed L in gioco, o meglio il prodotto ωL con R per stabilire l'entità dell'errore di approssimazione. Possiamo, ad esempio, stabilire di poter confondere il flusso effettivamente concatenato con il flusso esterno se $R > 10\omega L$

Nel caso dell'esercizio di partenza dove $R = 5\Omega$, $\omega = 1000 \text{ s}^{-1}$ per

$$L < 0,5 \text{ mH} = 500 \mu\text{H}$$

Non è per nulla facile trovare l'induttanza di una spira circolare, ma supponiamo che l'induzione sia costante su tutta la superficie della spira ed uguale a quella prodotta dalla corrente circolante nella spira, al centro della stessa spira. Si ha $B_c = \frac{\mu_0 I}{2r}$

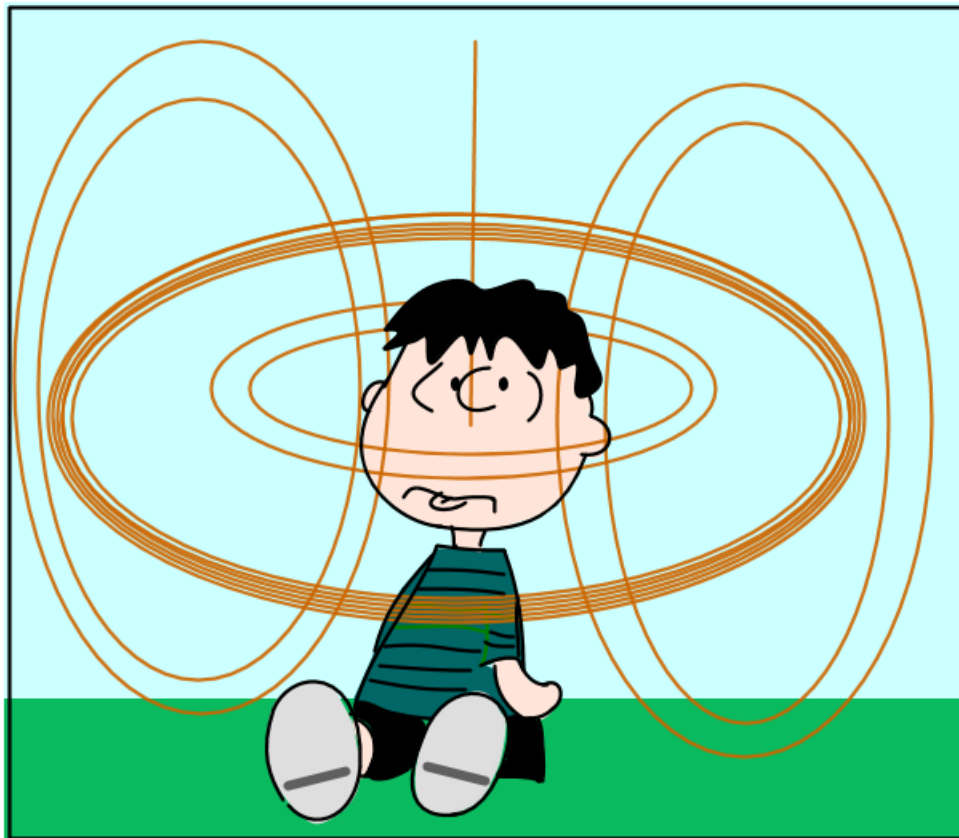
quindi

$$L = \frac{B_c \pi r^2}{I} = \frac{\mu_0}{2} \pi r = 2\pi^2 10^{-7} 10^{-1} \approx 2 \times 10^{-7} \text{ H} = 20 \mu\text{H}$$

Il flusso concatenato che si deve considerare si riduce rispetto a quello esterno tanto più quanto maggiore è la reattanza rispetto alla resistenza. E con resistenza nulla il flusso concatenato è nullo e la [1] diventa indeterminata.

Conclusione

Non so se il risultato della discussione produca l'effetto che ha avuto su Floyd, di seguito illustrato :)



Ad ogni modo io ho contestato l'articolo che ne è all'origine per l'affermazione, secondo me presuntuosa, che la [1] fosse una formula completamente errata propagata dalla stragrande maggioranza degli insegnanti nonché utilizzata in svariati testi di fisica e di elettrotecnica. E'

una forzatura di chi forse non ha interpretato bene quei testi, probabilmente anche per puntualizzazioni mancanti negli stessi.

Devo però riconoscere che l'articolo, nonché la discussione del forum, ha rappresentato l'occasione per un'analisi del calcolo della corrente nei circuiti ohmico induttivi, che deve mettere in guardia dal possibile errore che nasce dal confondere il flusso concatenato con un circuito, con il solo flusso magnetico di una sorgente esterna ed indipendente dalla corrente indotta nel circuito stesso.

Per cui, nella speranza di non aver scritto troppe sciocchezze, credo che l'autore dell'articolo debba essere ringraziato per il problema posto anche se ritengo che nelle sue affermazioni dovrebbe essere meno apodittico.

Estratto da "<http://www.electroyou.it/mediawiki/index.php?title=UsersPages:Admin:esercizi-sulla-legge-di-faraday-neumann-lenz>"