

Zeno Martini (admin)

ESERCIZI SU TRANSITORI - 2

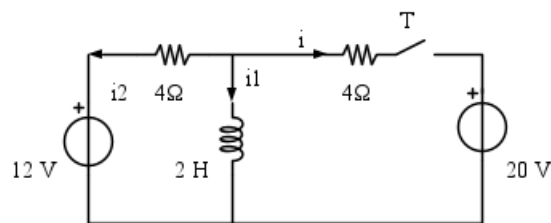
3 March 2015

Abstract

Quando sono a corto di idee per articoli, come in questo periodo, e magari gli altri blogger di ElectroYou hanno altro da fare per cui la prima pagina non si rinnova, per non dare l'impressione che il sito sia fermo, ricorro ad esercizi di elettrotecnica ricavati dal forum che tengo in riserva anche per tenermi in esercizio. Gli esercizi sui transistori sono abbastanza laboriosi ed ai tempi dell'università mi creavano abbastanza grattacapi (ed anche adesso ad essere sincero); quindi costituiscono un buon allenamento e se non ci si allena è facile dimenticarsi qualche procedimento. Io li svolgo ancora a mano con il metodo tradizionale, sostituendo il regolo calcolatore con la calcolatrice elettronica, disegnando gli schemi con FidoCadJ e scrivendo le formule con LaTeX (ad essere sincero con MathType ed incollandone il codice LaTeX sulla pagina). A volte verifico i risultati con un simulatore come LTSpice, prima della passeggiata con Wally. Spero che questo lavoro, che per me è in realtà un passatempo, possa essere utile a qualche studente che passa di qui.

1

Nel circuito di figura a regime per $t < 0$, il tasto T , si chiude all'istante $t = 0$.
Determinare l'andamento della corrente i .



Soluzione 1

Scriviamo i principi di Kirchhoff per le due maglie e per il nodo

$$\begin{cases} 2\frac{di_1}{dt} = 20 + 4i \\ 2\frac{di_1}{dt} - 12 = 4i_2 \\ i = -i_1 - i_2 \end{cases}$$

Risolviamo il sistema per sostituzione ricavando i_1

$$2\frac{di_1}{dt} = 20 - 4\left(i_1 + \frac{1}{2}\frac{di_1}{dt} - 3\right)$$

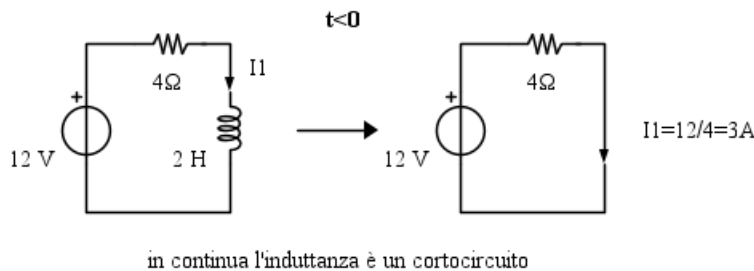
$$2\frac{di_1}{dt} = 20 - 4\left(i_1 + \frac{1}{2}\frac{di_1}{dt} - 3\right)$$

$$\frac{di_1}{dt} + i_1 - 8 = 0$$

La cui soluzione è (vedi [Wolfram alpha](#) per fare prima ;)

$$i_1 = C_1 e^{-t} + 8$$

La costante C_1 si determina in base alle condizioni iniziali, cioè in base al valore della corrente i_1 sull'induttanza all'istante immediatamente precedente la chiusura del tasto T, ricavabile da



Quindi avremo

$$3 = C_1 + 8$$

$$C_1 = -5$$

$$i_1 = -5e^{-t} + 8$$

Poiché la tensione ai capi dell'induttanza è data da

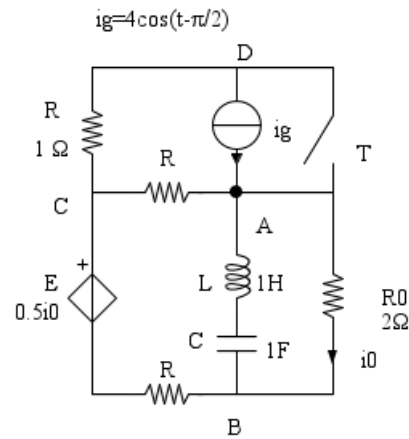
$$u_L = 2\frac{di_1}{dt} = 10e^{-t}$$

possiamo ricavare la corrente i_2

$$i_2 = \frac{u_L - 12}{4} = 2,5e^{-t} - 3$$

quindi la corrente richiesta

$$i = -(i_1 + i_2) = 5e^{-t} - 8 - 2,5e^{-t} + 3 = 2,5e^{-t} - 5$$

2**Soluzione**

$t < 0$: T aperto

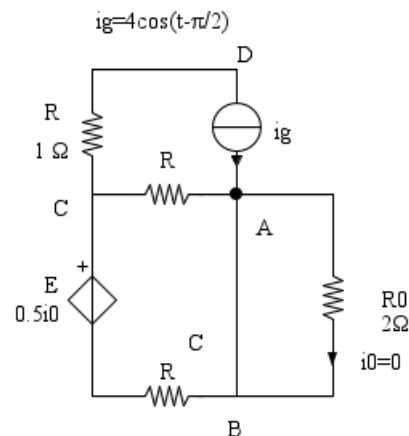
Poiché

$$\omega = 1 \text{ rad/s}$$

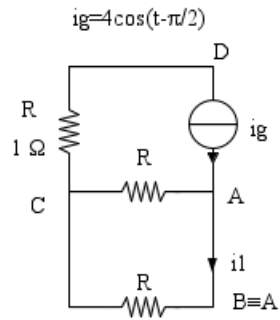
$$X_L = \omega L = 1 \times 1 = 1 \Omega$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{1 \times 1} = 1 \Omega$$

$$\dot{Z}_{LC} = j(X_L - X_C) = 0 \Omega$$



Essendo nulla i_0 perché la resistenza è cortocircuitata essendo nulla alla frequenza del generatore l'impedenza della serie LC ad essa in parallelo, è nulla anche la tensione del generatore di tensione $E = 0,5 \times i_0 = 0$ ed il circuito diventa



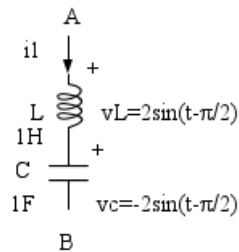
La corrente i_1 che è quella che percorre la serie LC che si trova in condizioni di risonanza vale

$$i_1 = \frac{i_g}{2} = 2 \cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right)$$

Si ha allora

$$v_L = L \frac{di_1}{dt} = -2 \sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$v_C = -v_L = 2 \sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right)$$

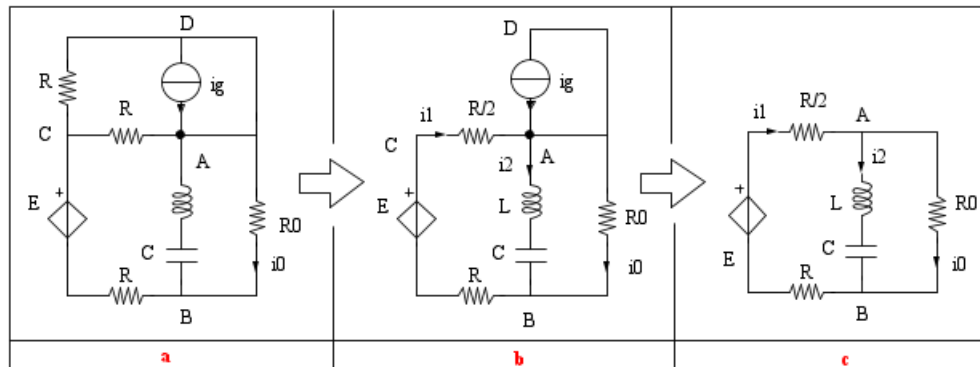


nel momento della chiusura dell'interruttore le variabili di stato valgono

$$i_L(0_-) = 0 \text{ A}$$

$$v_C(0_-) = -2 \text{ V}$$

$t > 0$: T chiuso



La rete da considerare è quella in c. La chiusura del tasto pone in parallelo le due resistenze ed esclude dal resto del circuito il generatore di corrente. Dobbiamo trovare la corrente i_2 , } dovuta alla tensione presente sul condensatore al momento della chiusura e la corrente a regime i_{2p} dovuta ai generatori presenti. Poiché l'unico generatore della rete è un pilotato la cui grandezza di comando è la corrente su una resistenza, sarà $i_{2p} = 0$ Quindi basta trovare la i_2

Per il primo principio di Kirchhoff applicato al nodo A:

$$i_1 - i_2 - i_0 = 0$$

$$\text{Poiché } i_0 = \frac{v_{AB}}{R_0}$$

$$i_2 = i_1 - i_0 = \frac{2}{3} \left(\frac{E}{R} - \frac{v_{AB}}{R} \right) - \frac{v_{AB}}{R_0}$$

Sostituendo i valori noti

$$i_2 = \frac{2}{3} \left(0,5 \frac{v_{AB}}{2} - v_{AB} \right) - \frac{v_{AB}}{2}$$

quindi

$$i_2 = v_{AB} \left(\frac{1}{6} - \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \right) = -v_{AB}$$

Abbiamo anche che

$$v_{AB} = v_L + v_C = L \frac{di_2}{dt} + \frac{1}{C} \int i_2 dt$$

quindi derivando

$$\frac{dv_{AB}}{dt} = L \frac{d^2 i_2}{dt^2} + \frac{i_2}{C}$$

per la relazione in precedenza trovata che lega i_2 e v_{AB}

avremo

$$L \frac{d^2 i_2}{dt^2} + \frac{di_2}{dt} + \frac{i_2}{C} = 0$$

Risolvendo l'equazione omogenea associata

$$\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$$

ricaviamo

$$\alpha = \frac{-1 \pm j\sqrt{3}}{2}$$

La soluzione è

$$i_2 = Ae^{-\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t + \varphi\right)$$

Le costanti A e φ

si determinano in base alle condizioni iniziali, cioè corrente iniziale nell'induttore e tensione iniziale nel condensatore

$$i_2(0_+) = i_2(0_-) = A \sin \varphi = 0 \rightarrow \varphi = 0$$

$$v_C(0_-) = -L \frac{di_2}{dt} = \frac{A}{2} \sin \varphi - \frac{\sqrt{3}}{2} A \cos \varphi = -2$$

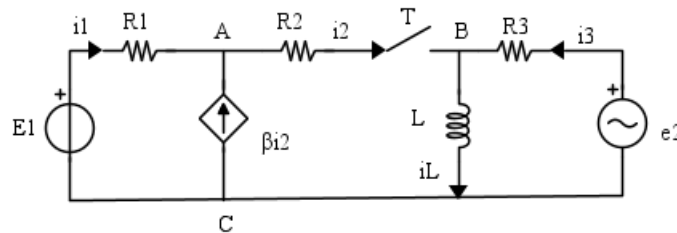
$$A = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4}{3}\sqrt{3}$$

Quindi la corrente richiesta è

$$i_2 = \frac{4}{3}\sqrt{3}e^{-\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$$

3

Per il seguente circuito determinare l'espressione della corrente $i_L(t)$ per $-\infty < t < +\infty$. Si assuma che il tasto T si chiuda all'istante $t_0 = 0,1$ s

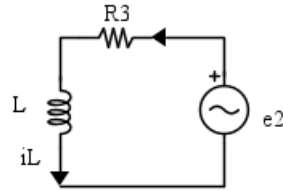


Dati

$$E_1 = 50 \text{ V}; \quad e_2(t) = 5 \cos(100t) \text{ V}; \quad \beta = 5;$$

$$R_1 = 2 \Omega; \quad R_2 = 20 \Omega; \quad R_3 = 8 \Omega; \quad L = 100 \text{ mH}$$

Prima della chiusura del tasto T il circuito da considerare è il seguente



$$X_L = \omega L = 100 \times 100 \times 10^{-3} = 10 \Omega$$

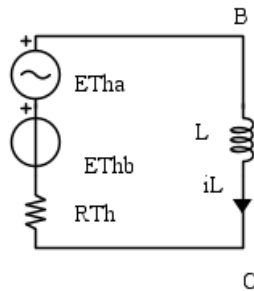
$$\theta = \arctan \frac{10}{8} = 51,3^\circ = 0,896 \text{ rad}$$

$$I_L = \frac{E_2}{Z} = \frac{E_2}{\sqrt{R_3^2 + X_L^2}} = \frac{5}{\sqrt{2}(\sqrt{64 + 100})} = 0,27 \text{ A}$$

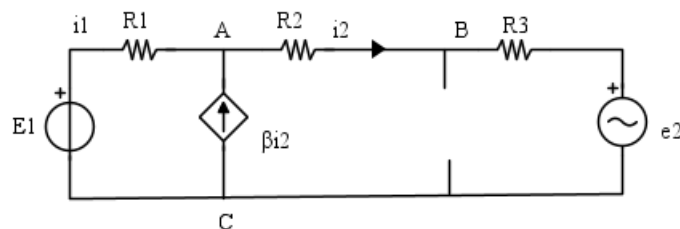
$$t = t_0 = 0,1 \text{ s}$$

$$I_L(t_{0-}) = I_L(t_{0+}) = 0,38 \cos(10 - 0,896) = 0,38 \times (-0,95) = -0,36 \text{ A}$$

Dopo la chiusura del tasto consideriamo il seguente circuito



cioè il generatore di Thevenin visto da BC. Essendo presenti un generatore in c.a. ed uno in continua dobbiamo calcolarne separatamente la tem di Thevenin in c.a. e quella in continua. La resistenza equivalente è sempre la stessa



Calcolo R_{Th}

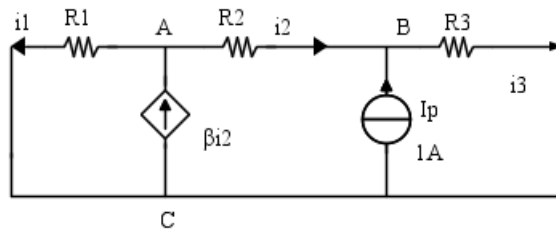
Imponendo il generatore di prova I_p tra i punti B e C cui era collegata l'induttore si ha

$$R_{Th} = \frac{V_{BC}}{I_p}$$

con

$$V_{BC} = R_3 i_3$$

Occorre perciò determinare i_3



$$\begin{cases} i_3 = I_p + i_2 \\ \beta i_2 = i_2 + i_1 \\ R_3 i_3 = R_1 i_1 - R_2 i_2 \end{cases}$$

$$i_2 = \frac{i_1}{\beta - 1}$$

$$i_1 = \frac{R_3 i_3 + R_2 \frac{i_1}{\beta - 1}}{R_1}$$

$$i_1 \left(R_1 - \frac{R_2}{\beta - 1} \right) = R_3 i_3$$

$$i_3 = I_p + \frac{\frac{R_3 i_3}{R_1 - \frac{R_2}{\beta - 1}}}{\beta - 1} = I_p + \frac{R_3 i_3}{(\beta - 1) R_1 - R_2}$$

$$i_3 \left(1 - \frac{R_3}{(\beta - 1) R_1 - R_2} \right) = I_p$$

$$i_3 \left(1 - \frac{R_3}{(\beta - 1) R_1 - R_2} \right) = I_p$$

$$i_3 \left(1 - \frac{8}{(5-1)2-20} \right) = I_p$$

$$i_3 \left(1 + \frac{2}{3} \right) = I_p$$

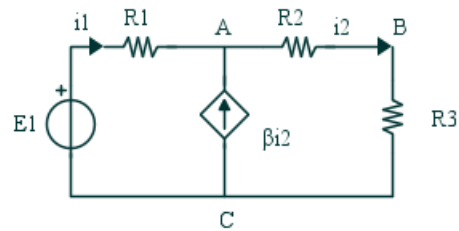
$$i_3 = \frac{3}{5} I_p$$

$$V_{BC} = R_3 i_3 = \frac{24}{5} I_p$$

$$R_{Th} = \frac{V_{BC}}{I_p} = \frac{24}{5} \Omega$$

Calcolo di E_{Thb}

Calcoliamo la componente continua della forza elettromotrice del generatore di Thevenin. Il circuito di riferimento è il seguente e la tensione cercata è la V_{BC}



Con Millman ricaviamo

$$V_{AC} = \frac{\beta \frac{V_{AC}}{R_2 + R_3} + \frac{E_1}{R_1}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2 + R_3}} = \frac{R_1 \beta V_{AC} + E_1 (R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$V_{AC} (R_1 + R_2 + R_3 - R_1 \beta) = E_1 (R_2 + R_3)$$

$$V_{AC} = \frac{E_1 (R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3 - R_1 \beta} = \frac{50 \times 28}{2 - 10 + 28} = 70 \text{ V}$$

$$i_2 = \frac{V_{AC}}{R_2 + R_3} = 2,5 \text{ A}$$

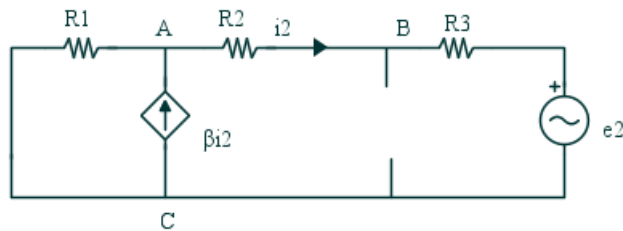
$$V_{BC} = E_{Thb} = R_3 i_2 = 8 \times 2,5 = 20 \text{ V}$$

Essendo l'induttanza, in continua, un cortocircuito, la componente continua della corrente su di essa è data da

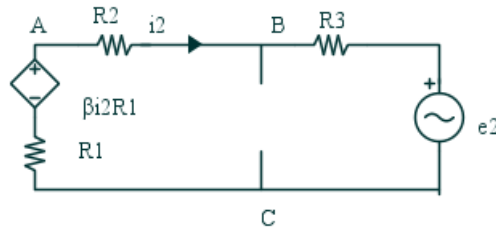
$$I_{p0} = \frac{E_{Thb}}{R_{Th}} = \frac{20 \times 5}{24} = 4,17 \text{ A}$$

Calcolo di E_{Tha}

La componente alternata della forza elettromotrice del generatore equivalente si ricava dal circuito



che si può sostituire con



Operando con i fasori ed assumendo $\dot{E}_2 = 5$

$$\begin{aligned}\dot{I}_2 &= \frac{\beta \dot{I}_2 R_1 - \dot{E}_2}{R_1 + R_2 + R_3} \\ \dot{I}_2 (\beta R_1 - R_1 - R_2 - R_3) &= \dot{E}_2 \\ \dot{E}_{Tha} = \dot{V}_{BC} = \dot{E}_2 + R_3 \dot{I}_2 &= \dot{E}_2 + R_3 \frac{\dot{E}_2}{\beta R_1 - R_1 - R_2 - R_3} = \\ &= \dot{E}_2 \left(1 + \frac{R_3}{\beta R_1 - R_1 - R_2 - R_3} \right) = \\ &= \dot{E}_2 \left(1 + \frac{8}{10 - 2 - 20 - 8} \right) = \dot{E}_2 \frac{3}{5}\end{aligned}$$

$$E_{Tha} = 3 \text{ V} \Rightarrow e_{Th}(t) = 3 \cos(100t)$$

La componente alternata della corrente sull'induttanza si ricava con

$$\begin{aligned}\dot{Z} &= R_{Th} + j\omega L = \frac{24}{5} + j10 \\ Z &= \sqrt{4,8^2 + 10^2} = 11,1 \Omega \\ I_{pa} &= \frac{E_{Tha}}{Z} = \frac{3}{11,1} = 0,27 \text{ A} \\ \varphi &= \arctan \frac{10}{4,8} = 64,3^\circ = 1,12 \text{ rad} \\ i_{La} &= 0,27 \cos(100t - 1,12)\end{aligned}$$

Dopo la chiusura del tasto la componente a regime della corrente nell'induttore è

$$i_{Lp}(t) = I_{p0} + i_{La} = 4,17 + 0,27 \cos(100t - 1,12)$$

Ad essa si sovrappone, dopo la chiusura del tasto T, la componente transitoria del tipo

$$i_{Lt}(t) = A e^{-\frac{t-0,1}{\tau}}$$

La costante di tempo si ricavabile dal circuito di Thevenin

$$\tau = \frac{L}{R_{Th}} = \frac{0,1}{4,8} = \frac{1}{48} \text{ Quindi, in definitiva, dopo la chiusura di T all'istante}$$

la corrente nell'induttore è espressa da

$$i_L(t) = i_{Lp}(t) + i_{Lt}(t) = A e^{-48(t-0,1)} + 4,17 + 0,27 \cos(100t - 1,12)$$

Il valore di A si ricava imponendo la continuità della corrente nell'induttore:

$$I_L(0, 1_-) = I_L(0, 1_+)$$

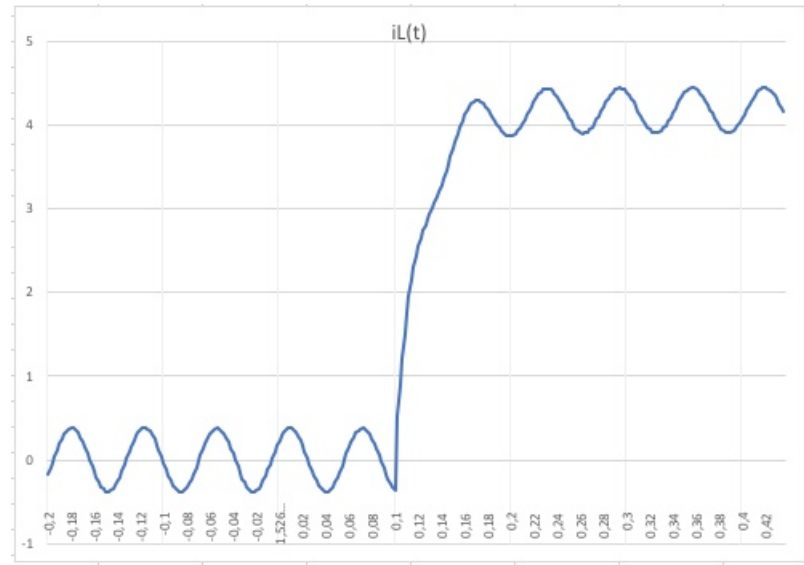
Quindi

$$-0,37 = A + 4,17 - 0,27 \times 0,855$$

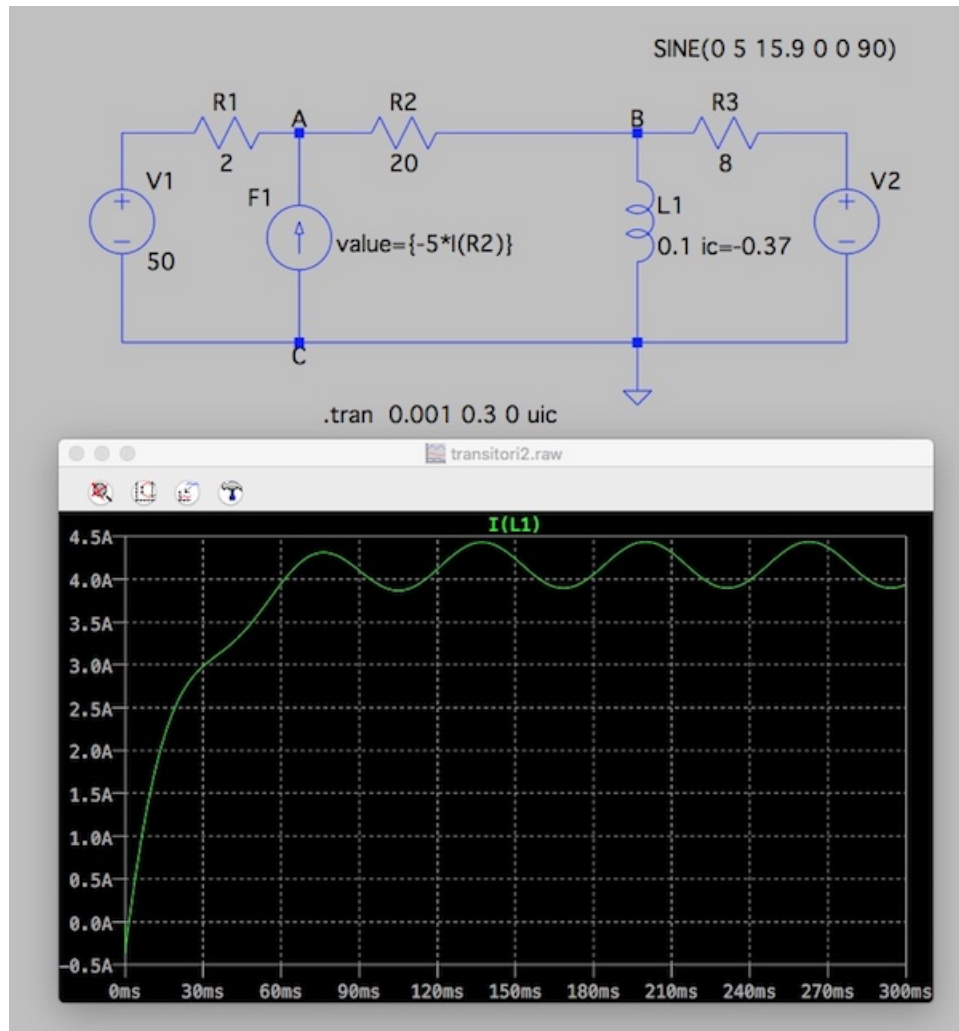
$$A = -4,17 - 0,14 = -4,31$$

$$i_L(t) = -4,31 e^{-48(t-0,1)} + 4,17 + 0,27 \cos(100t - 1,12)$$

il cui grafico tracciato con un foglio EXCEL è



Con LTSpice ho verificato l'andamento della corrente a partire dall'istante di chiusura del tasto introducendo il valore iniziale della corrente nell'induttore. L'istante 0 del grafico prodotto dalla simulazione corrisponde all'istante 0,1 s del precedente grafico. Il segno meno nella definizione dei generatore dipendente di corrente è dovuto al fatto che LTSpice considera positivo il verso della corrente su R_2 opposto a quello del testo





Estratto da "<http://www.electroyou.it/mediawiki/index.php?title=UsersPages:Admin:esercizio-su-transitorio>"