



Zeno Martini (admin)

GENERATORI PILOTATI E SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI

3 March 2016

Sommario e conclusione

Come spesso accade, anche questo articolo nasce in seguito a thread del forum.

Si tratta dello svolgimento di un paio di esercizi e lo scopo è mostrare un modo corretto di procedere con l'applicazione del principio di sovrapposizione degli effetti in presenza di generatori pilotati di corrente o di tensione.

Per chi non vuole star lì a guardare tutto, scrivo subito la conclusione.

Nella sovrapposizione degli effetti il generatore pilotato può essere considerato come un generatore indipendente di valore incognito. La composizione finale delle grandezze parziali per trovare le grandezze del circuito originario, conterrà come incognita il parametro del generatore pilotato. A questo punto si usa l'equazione che lo definisce eliminando l'incognita.

I thread di riferimento, da cui sono rispettivamente prelevati gli esercizi 1 e 2 qui proposti, sono:

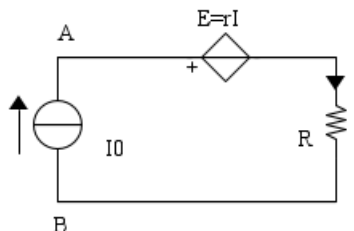
- [Primo topic](#)
- [Secondo topic](#)

Inoltre, non me ne ricordavo, ma lo stesso argomento era stato già discusso in

- [questo topic](#)

Esercizio 1

Consideriamo il semplice circuito in cui sono noti I_0 , R , r



La soluzione è senz'altro immediata

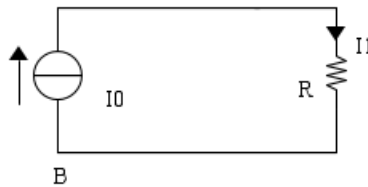
$$I = I_0$$

$$E = rI_0$$

$$V_{AB} = RI + E = (R + r)I_0$$

Usando la sovrapposizione degli effetti ci si può sbagliare in quanto si potrebbe essere indotti a considerare il generatore di tensione pilotato come dipendente dalla grandezza del circuito parziale.

Cortocircuitando il generatore dipendente abbiamo

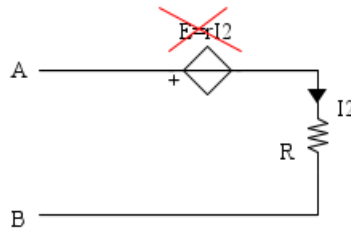


e qui non ci sono pericoli

$$I_1 = I_0$$

$$V_{AB1} = RI_0$$

L'insidia si può presentare quando si elimina il generatore indipendente e si considera il dipendente funzione della grandezza nel circuito parziale e non in quello originario



Infatti è

$$I_2 = 0$$

e di conseguenza sarebbe

$$V_{AB2} = E + RI_2 = rI_2 + RI_2 = 0$$

Sovrapponendo gli effetti troveremmo

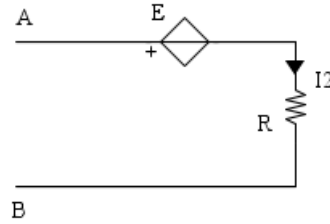
$$I = I_1 + I_2 = I_0 + 0 = I_0$$

e questo va bene, ma anche

$$V_{AB} = V_{AB1} + V_{AB2} = RI_0 + 0$$

che è evidentemente errato.

Il procedimento corretto consiste nel considerare E come un'incognita da ricavare imponendo alla fine la condizione che definisce il generatore dipendente



$$I_2 = 0$$

$$V_{AB2} = E$$

Quindi

$$I = I_1 + I_2 = I_0 + 0 = I_0$$

Ora possiamo calcolare

$$E = rI = rI_0$$

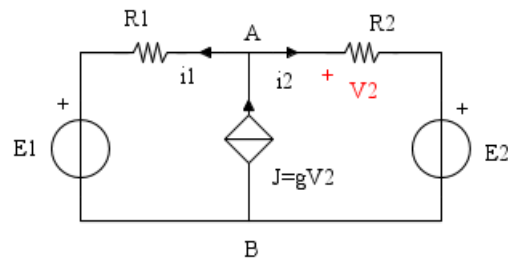
quindi

$$V_{AB} = V_{AB1} + V_{AB2} = RI_0 + rI = RI_0 + rI_0 = (R + r)I_0$$

Esercizio 2

Del seguente circuito sono noti E_1 , E_2 , R_1 , R_2 , g .

Determinare le correnti nei rami

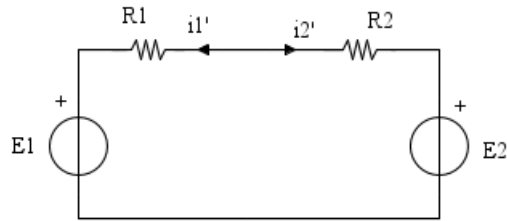


Sovrapposizione degli effetti

Trattiamo il generatore di corrente dipendente come un generatore indipendente di valore incognito J .

Tale valore lo ricaveremo alla fine del procedimento di sovrapposizione imponendo la relazione che lo definisce.

Eliminandolo, quindi lasciando il suo ramo aperto, otteniamo un primo parziale circuito

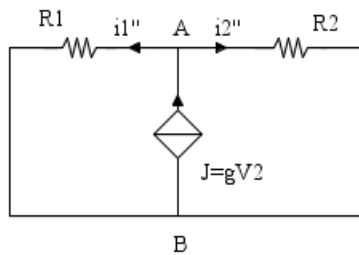


Da esso ricaviamo le due correnti parziali

$$i_2' = \frac{E_1 - E_2}{R_1 + R_2}$$

$$i_1' = -\frac{E_1 - E_2}{R_1 + R_2}$$

Ora reinsertiamo il generatore di corrente, eliminando (cortocircuitando quindi) i due generatori di tensione



Ricaveremo le due correnti parziali

$$i_2'' = J \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

$$i_1'' = J \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

Osservazione

Se qui avessimo posto, sbagliando, $J = gV_2'' = gR_2 i_2''$, avremmo come unica soluzione del circuito parziale la banale $J = 0$, $i_2'' = 0$, $i_1'' = 0$

Le correnti della rete di partenza saranno allora

$$i_1 = i_1' + i_1'' = -\frac{E_1 - E_2}{R_1 + R_2} + J \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

$$i_2 = i_2' + i_2'' = \frac{E_1 - E_2}{R_1 + R_2} + J \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

Sono funzioni di J che possiamo ricavare imponendo la condizione che definisce il generatore dipendente

$$J = gV_2 = gR_2i_2$$

Sostituendola nelle espressioni precedenti otterremo le correnti della rete in funzione dei parametri noti

$$i_2 = \frac{E_1 - E_2}{R_1 + R_2} + gR_2i_2 \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

$$i_2 \left(1 - g \frac{R_2 R_1}{R_1 + R_2} \right) = \frac{E_1 - E_2}{R_1 + R_2}$$

$$i_2 = (E_1 - E_2) \frac{\frac{1}{R_1 + R_2}}{1 - g \frac{R_2 R_1}{R_1 + R_2}} = (E_1 - E_2) \frac{1}{R_1 + R_2 - gR_2 R_1}$$

$$i_1 = -\frac{E_1 - E_2}{R_1 + R_2} + gR_2i_2 \frac{R_2}{R_1 + R_2} = -\frac{E_1 - E_2}{R_1 + R_2} + gR_2 \frac{E_1 - E_2}{R_1 + R_2 - gR_2 R_1} \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} =$$

$$= -\frac{E_1 - E_2}{R_1 + R_2} \left(1 - \frac{gR_2^2}{R_1 + R_2 - gR_2 R_1} \right) = -\frac{E_1 - E_2}{R_1 + R_2} \left(\frac{R_1 + R_2 - gR_2 R_1 - gR_2^2}{R_1 + R_2 - gR_2 R_1} \right) =$$

$$= -\frac{E_1 - E_2}{R_1 + R_2} \left(\frac{R_1(1 - gR_2) + R_2(1 - gR_2)}{R_1 + R_2 - gR_2 R_1} \right) = -\frac{E_1 - E_2}{R_1 + R_2} \frac{(R_1 + R_2)(1 - gR_2)}{R_1 + R_2 - gR_2 R_1}$$

$$i_1 = (E_2 - E_1) \frac{1 - gR_2}{R_1 + R_2 - gR_2 R_1}$$

Osservazione

$$\text{Si ha } \frac{i_1}{i_2} = gR_2 - 1.$$

Quindi con i [dati dell'esercizio proposto nel thread](#), $E_1 = 5 \text{ V}$; $E_2 = 15 \text{ V}$; $R_1 = 2 \Omega$; $R_2 = 5 \Omega$; $g = 1000 \text{ S}$, la corrente i_2 è completamente trascurabile rispetto ad i_1 per cui, in pratica, J coincide con i_1 , e la tensione ai capi del generatore di corrente con E_2 , per cui si può tranquillamente scrivere come soluzione $i_1 = 5 \text{ A}$; $i_2 = 0 \text{ A}$.

Visto che la rete è binodale, per controllo dei risultati precedenti, ed anche per ulteriore esercizio naturalmente, risolviamo il circuito con

Millman

$$\frac{\frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2} + gV_2}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = V_{AB}$$

$$V_2 = V_{AB} - E_2$$

$$\frac{\frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2} + g(V_{AB} - E_2)}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = V_{AB}$$

$$V_{AB} = \frac{\frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2} - gE_2}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} - g}$$

$$i_1 = \frac{V_{AB} - E_1}{R_1}$$

$$i_2 = \frac{V_{AB} - E_2}{R_2}$$

$$i_1 = \frac{\left(\frac{\frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2} - gE_2}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} - g} - E_1 \right)}{R_1} = \frac{\frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2} - gE_2}{1 + \frac{R_1}{R_2} - gR_1} - \frac{E_1}{R_1}$$

Rielaborando l'espressione

$$\begin{aligned} i_1 &= \frac{\frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2} - gE_2}{1 + \frac{R_1}{R_2} - gR_1} - \frac{E_1}{R_1} = \frac{E_1 + E_2 \frac{R_1}{R_2} - gR_1E_2 - E_1 - E_1 \frac{R_1}{R_2} + gR_1E_1}{R_1 \left(1 + \frac{R_1}{R_2} - gR_1 \right)} = \\ &= \frac{E_2 \frac{R_1}{R_2} - E_1 \frac{R_1}{R_2} - gR_1E_2 + gR_1E_1}{R_1 \left(1 + \frac{R_1}{R_2} - gR_1 \right)} = \frac{E_2 - E_1 - gR_2E_2 + gR_2E_1}{R_2 \left(1 + \frac{R_1}{R_2} - gR_1 \right)} = \\ &= \frac{E_1(gR_2 - 1) - E_2(gR_2 - 1)}{R_1 + R_2 - gR_1R_2} \end{aligned}$$

$$i_1 = (E_2 - E_1) \frac{1 - gR_2}{R_1 + R_2 - gR_1R_2}$$

troviamo, per fortuna, la stessa espressione ricavata in precedenza con la sovrapposizione degli effetti.

Vediamo se la fortuna ci assiste anche per i_2

$$\begin{aligned} i_2 &= \frac{\left(\frac{\frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2} - gE_2}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} - g} - E_2 \right)}{R_2} = \frac{\frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2} - gE_2}{1 + \frac{R_2}{R_1} - gR_2} - \frac{E_2}{R_2} \\ i_2 &= \frac{E_1 \frac{R_2}{R_1} + E_2 - gR_2E_2 - E_2 - E_2 \frac{R_2}{R_1} + gR_2E_2}{R_2 \left(1 + \frac{R_2}{R_1} - gR_2 \right)} = \\ &= \frac{E_1 \frac{R_2}{R_1} - E_2 \frac{R_2}{R_1}}{R_2 \left(1 + \frac{R_2}{R_1} - gR_2 \right)} = \frac{R_2}{R_1} \frac{E_1 - E_2}{R_2 \left(1 + \frac{R_2}{R_1} - gR_2 \right)} = \frac{E_1 - E_2}{(R_1 + R_2 - gR_1R_2)} \end{aligned}$$

Bene.

Ricaviamo allora l'espressione di J

$$\begin{aligned} V_2 = R_2 i_2 &= \frac{\frac{R_2}{R_1} E_1 + E_2 - gR_2E_2}{1 + \frac{R_2}{R_1} - gR_2} - E_2 = \frac{\frac{R_2}{R_1} E_1 + E_2 - gR_2E_2 - E_2 - \frac{R_2}{R_1} E_2 + gR_2E_2}{1 + \frac{R_2}{R_1} - gR_2} = \\ &= \frac{\frac{R_2}{R_1} (E_1 - E_2)}{1 + \frac{R_2}{R_1} - gR_2} = (E_1 - E_2) \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_2} - gR_1} \\ J = gV_2 &= g \frac{E_1 - E_2}{1 + \frac{R_1}{R_2} - gR_1} = gR_2 \frac{E_1 - E_2}{R_1 + R_2 - gR_2R_1} \end{aligned}$$

Osservazione

Il rapporto tra J ed i_1 vale

$$\frac{J}{i_1} = \frac{gR_2}{gR_2 - 1}.$$

Cosa che abbiamo già visto, con i dati proposti nel thread, non c'è in pratica differenza tra le due correnti

E per non farci mancare nulla facciamo una

Verifica del primo principio di Kirchhoff

$$\begin{aligned}
 i_1 + i_2 &= \frac{\frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2} - gE_2}{1 + \frac{R_1}{R_2} - gR_1} - \frac{E_1}{R_1} + \frac{\frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2} - gE_2}{1 + \frac{R_2}{R_1} - gR_2} - \frac{E_2}{R_2} = \\
 &= \frac{E_1 + E_2 \frac{R_1}{R_2} - gR_1 E_2 - E_1 - E_1 \frac{R_1}{R_2} + gR_1 E_1}{R_1 \left(1 + \frac{R_1}{R_2} - gR_1\right)} + \frac{E_2 + E_1 \frac{R_2}{R_1} - gR_2 E_2 - E_2 - E_2 \frac{R_2}{R_1} + gR_2 E_2}{R_2 \left(1 + \frac{R_2}{R_1} - gR_2\right)} = \\
 &= \frac{E_2 \frac{R_1}{R_2} - gR_1 E_2 - E_1 \frac{R_1}{R_2} + gR_1 E_1}{R_1 \left(1 + \frac{R_1}{R_2} - gR_1\right)} + \frac{E_1 \frac{R_2}{R_1} - E_2 \frac{R_2}{R_1}}{R_2 \left(1 + \frac{R_2}{R_1} - gR_2\right)} = \\
 &= \frac{E_2 \left(\frac{R_1}{R_2} - gR_1\right) - E_1 \left(\frac{R_1}{R_2} - gR_1\right)}{R_1 \left(1 + \frac{R_1}{R_2} - gR_1\right)} + \frac{\frac{R_2}{R_1} (E_1 - E_2)}{R_2 \left(1 + \frac{R_2}{R_1} - gR_2\right)} = \\
 &= \frac{\left(\frac{R_1}{R_2} - gR_1\right) (E_2 - E_1)}{R_1 \left(1 + \frac{R_1}{R_2} - gR_1\right)} + \frac{\frac{R_2}{R_1} (E_1 - E_2)}{R_2 \left(1 + \frac{R_2}{R_1} - gR_2\right)} = \\
 &= (E_1 - E_2) \left(\frac{\frac{R_2}{R_1}}{R_2 \left(1 + \frac{R_2}{R_1} - gR_2\right)} - \frac{\frac{R_1}{R_2} - gR_1}{R_1 \left(1 + \frac{R_1}{R_2} - gR_1\right)} \right) = \\
 &= (E_1 - E_2) \left(\frac{R_2 \left(1 + \frac{R_1}{R_2} - gR_1\right) - R_1 \left(1 + \frac{R_2}{R_1} - gR_2\right) + gR_1 R_2 \left(1 + \frac{R_2}{R_1} - gR_2\right)}{R_2 \left(1 + \frac{R_2}{R_1} - gR_2\right) R_1 \left(1 + \frac{R_1}{R_2} - gR_1\right)} \right) = \\
 &= (E_1 - E_2) \left(\frac{R_2 + R_1 - gR_1 R_2 - R_1 - R_2 + gR_1 R_2 + gR_1 R_2 + gR_2^2 - g^2 R_1 R_2^2}{R_2 \left(1 + \frac{R_2}{R_1} - gR_2\right) R_1 \left(1 + \frac{R_1}{R_2} - gR_1\right)} \right) = \\
 &= (E_1 - E_2) \left(\frac{gR_1 R_2 + gR_2^2 - g^2 R_1 R_2^2}{R_2 \left(1 + \frac{R_2}{R_1} - gR_2\right) R_1 \left(1 + \frac{R_1}{R_2} - gR_1\right)} \right) = \\
 &= (E_1 - E_2) \left(\frac{g + g \frac{R_2}{R_1} - g^2 R_2}{\left(1 + \frac{R_2}{R_1} - gR_2\right) \left(1 + \frac{R_1}{R_2} - gR_1\right)} \right) = \\
 &= (E_1 - E_2) \left(\frac{g \left(1 + \frac{R_2}{R_1} - gR_2\right)}{\left(1 + \frac{R_2}{R_1} - gR_2\right) \left(1 + \frac{R_1}{R_2} - gR_1\right)} \right) \downarrow
 \end{aligned}$$

$$i_1 + i_2 = \frac{g(E_1 - E_2)}{1 + \frac{R_1}{R_2} - gR_1} = J$$

Direi che possiamo stare tranquilli :)

Estratto da "<http://www.electroyou.it/mediawiki/index.php?title=UsersPages:Admin:generatori-pilotati-e-sovrapposizione-degli-effetti>"