Renzo DF (RenzoDF), parolina

GLI ESERCIZI DI RENZODF: UN'ANTOLOGIA DI ELETTROTECNICA. - 1

3 September 2012

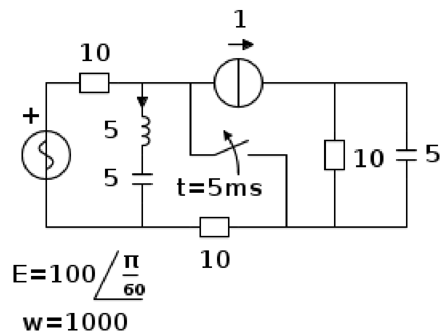
Questo articolo, come tutti gli altri che seguiranno, nasce da una idea del nostro caro Admin di "riprendere",all'interno del forum, tutti gli esercizi svolti da RenzoDF e racchiuderli in un articolo in modo da renderli più "raggiungibili" da chi ne ha bisogno per imparare, per un esame o per cultura personale. Spesso nel forum sono di passaggio tante persone che postano un esercizio, "rubano" i primi passaggi utili e poi vanno via, lasciando chi li ha aiutati senza la giusta ricompensa. Io credo che in questo periodo dove tutto verte sul denaro e dove tutti non navighiamo nell'oro, avere almeno una "ricompensa" con un "grazie" non costi poi tanto. Qui ci sono persone che mettono a disposizione il loro sapere senza mai chiedere nulla, ma almeno dobbiamo avere la decenza di ringraziare chi, con impegno e passione, dedica del tempo a risolverci i problemi. Per questi motivi ho deciso di aiutare Admin nel recuperare il lavoro fatto in questi anni da RenzoDF in primis per ringraziarlo del "lavoro" fatto in questi anni e poi per permettere a chi è in difficoltà di "attingere" dalle sue bellissime soluzioni!

Di seguito viene postato il primo esercizio tratto da questo post, relativo al problema numero 2 della seguente prova d'esame

Testo dell'esercizio

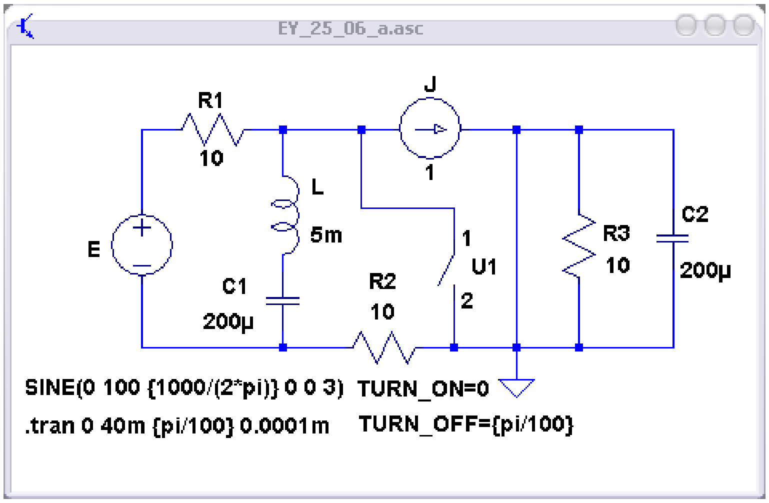
Il circuito di figura è a regime con l'interruttore chiuso. Determinare l'andamento temporale della tensione ai capi dell'interruttore a partire da 5 ms dopo che quest'ultimo viene aperto.

Lo schema con FidoCadJ è il seguente dove per 'praticità' sono stati indicati solo i valori numerici dei parametri.

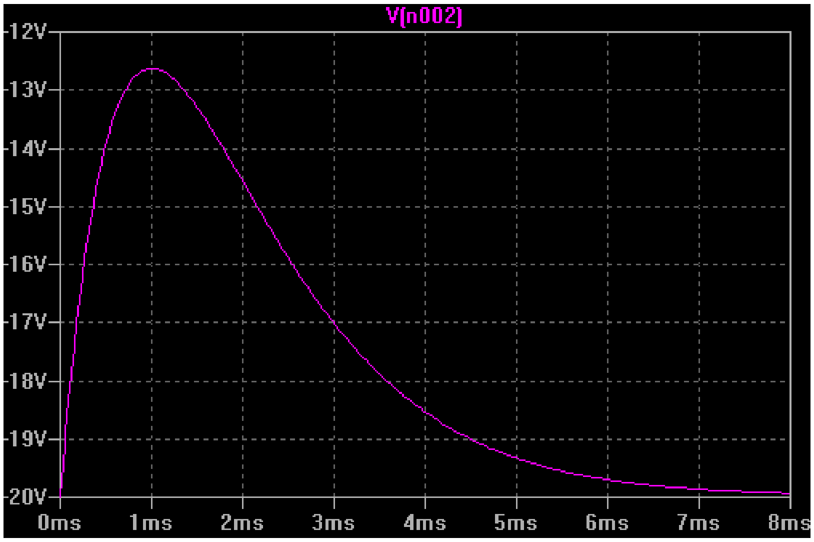


Soluzione numerica

Un primo passo è stato quello di trovare la soluzione numerica con l'aiuto di **LTspice** dove di seguito ne viene mostrato il risultato.

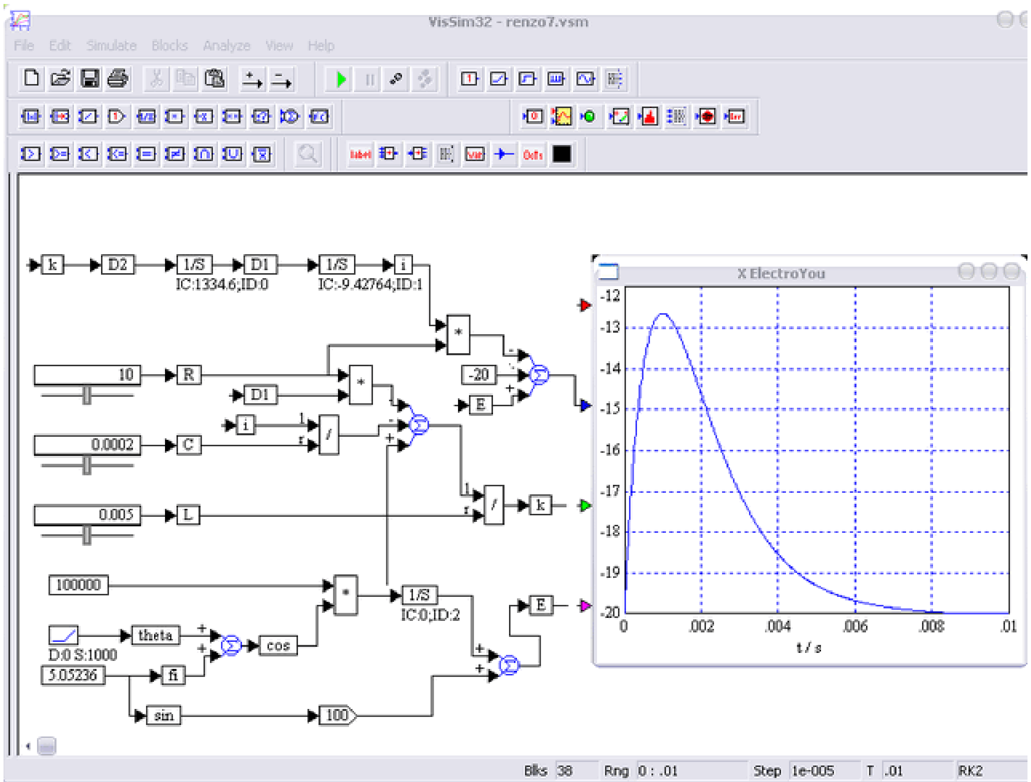


2011-06-25_203038.gif



2011-06-25_203038.gif

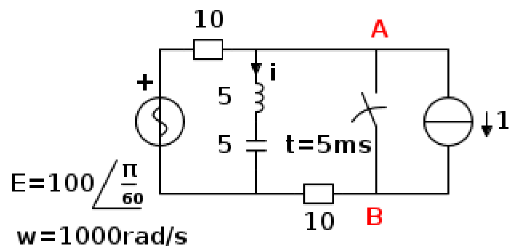
Risultato confermato, per altro, da una simulazione con **Vis Sim** come riportato di seguito



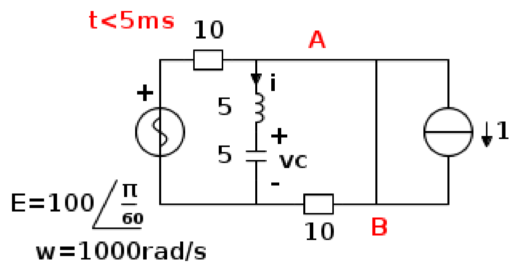
2011-06-26_174602.gif

Soluzione analitica

Prima di tutto,vista la richiesta del testo, si procede alla sua immediata semplificazione "a destra", scegliendo la corrente **i** del ramo **LC** come "*elemento risolutivo*" fondamentale.



A questo punto si effettua il calcolo delle condizioni a regime per **t<5ms**. Con l'interruttore chiuso l'unica parte della rete da studiare e' quella di sinistra.



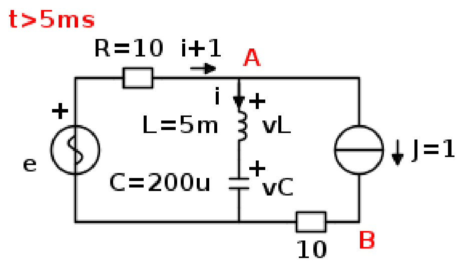
Visto che la risonanza serie di L e C cortocircuita la resistenza inferiore, la corrente **i** e la tensione su **C** possono essere scritte come:

$$i(t) = \frac{e(t)}{10} = 10\sin(\omega t + \frac{\pi}{60})$$
$$v_C(t) = 50\sin(\omega t + \frac{\pi}{60} - \frac{\pi}{2})$$

e quindi:

$$i(\tau) = 10\sin(\omega\tau + \frac{\pi}{60}) = 10\sin(5 + \frac{\pi}{60}) \approx -9.43\,\mathrm{A}$$
$$v_C(\tau) = 50\sin(\omega t + \frac{\pi}{60} - \frac{\pi}{2}) = 50\sin(5 + \frac{\pi}{60} - \frac{\pi}{2}) \approx -16.7\,\mathrm{V}$$

Per **t>5ms**, con interruttore aperto, si ha invece il seguente circuito



Si passa a scrivere l'equazione differenziale usando la KVL alla maglia di sinistra, ricordando che, per usare un nuovo riferimento per il tempo, ripartendo da zero alla chiusura dell'interruttore, si ha una **e(t)** sfasata di 5ms. Dunque si ha:

$$v_C(t) + v_L(t) + R(i(t) + 1) = e(t + \tau)$$

$$\frac{1}{C}\int i(t)\,\mathrm{d}t + L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + R(i(t) + 1) = e(t + \tau)$$

ed infine

$$L\frac{\mathrm{d}^2 i(t)}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{i(t)}{C} = \frac{\mathrm{d}\left[e(t+\tau)\right]}{\mathrm{d}t}$$

L'equazione caratteristica:

$$\lambda^2 + \frac{R}{L}\lambda + \frac{1}{LC} = 0$$

risolta, porta a:

$$\lambda^2 + 2\times 10^3\lambda + 10^6 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 1000$$

e quindi si cercherà una soluzione generale nella forma:

$$i(t) = i_G(t) + i_P(t) = (k_1 + k_2 t)e^{-1000t} + k_3\sin(\omega t + k_4)$$

La soluzione particolare sara' quella a regime, dunque:

$$i_P(t) = 10\sin\left(1000t + 5 + \frac{\pi}{60}\right)$$

e quindi:

$$\begin{cases} k_3 = 10 \\ k_4 = 5 + \dfrac{\pi}{60} \end{cases}$$

Le condizioni iniziali:

$$\begin{cases} i(0+) = i(0-) = 10\sin\left(5 + \dfrac{\pi}{60}\right) \approx \text{-9.43 A} \\ \left.\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0+} = \dfrac{e(\tau) - R(i(0+)+1) - v_C(0+)}{L} \approx 1335\ \dfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{s}} \end{cases}$$

permettono di determinare le rimanenti due costanti:

$$\begin{cases} i(0+) = k_1 + i_P(0) \\ \left.\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0+} = k_2 + 10^4\cos\left(5 + \dfrac{\pi}{60}\right) \end{cases} \qquad \begin{cases} k_1 = 0 \\ k_2 = -2000 \end{cases}$$

ed infine:

$$i(t) = -2000te^{-1000t} + 10\sin\left(1000t + 5 + \frac{\pi}{60}\right)$$

La d.d.p. ai capi dell'interruttore è:

$$v_{AB}(t) = -20 + 100\sin\left(1000t + 5 + \frac{\pi}{60}\right) + 2\times 10^4 te^{-1000t} - 100\sin\left(1000t + 5 + \frac{\pi}{60}\right)$$

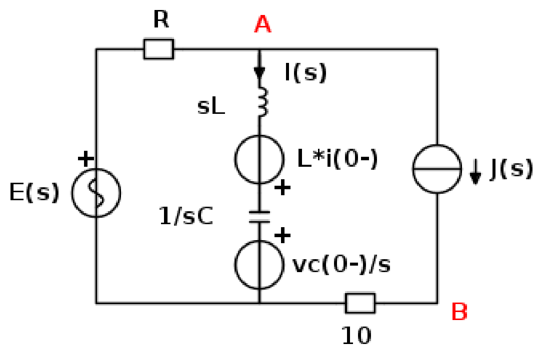
che si semplifica in:

$$v_{AB}(t) = -20 + 2\times 10^4 te^{-1000t}$$

come mostrato nelle precedenti simulazioni.

Risoluzione del circuito con Laplace

Si riporta, innanzitutto, lo schema completo dei generatori associati alle condizioni iniziali



Scrivendo la solita KVL "a sinistra" si ha:

$$E(s) - R(I(s) + J(s)) - I(s)\left(sL + \frac{1}{sC}\right) - \frac{v_C(0-)}{s} + Li(0-) = 0$$

che diventa

$$E_M \frac{s\sin\left(\omega\tau + \frac{\pi}{60}\right) + \omega\cos\left(\omega\tau + \frac{\pi}{60}\right)}{s^2 + \omega^2} - R(I(s) + J(s)) - I(s)\left(sL + \frac{1}{sC}\right)$$
$$- \frac{E_M \omega C \cos\left(\omega\tau + \frac{\pi}{60} + \frac{\pi}{2}\right)}{s} + L\frac{E_M}{R}\sin\left(\omega\tau + \frac{\pi}{60}\right) = 0$$

che, anche se con un giro piu' lungo, porta allo stesso risultato. I calcoli, ovviamente,vengono risparmiati.

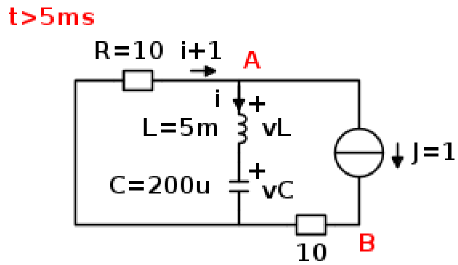
Scorciatoia

Ci si chiede, dopo tutti questi passaggi, se siano veramente necessari tutti questi calcoli per un circuito a prima vista cosi' "innofensivo" . La risposta è: NO!

Gia' la soluzione per via differenziale doveva far "sospettare" qualcosa, ovvero che forse c'era una scorciatoia, e perfino "banale".

La sovrapposizione degli effetti avrebbe portato subito a vedere che la soluzione era in realta' molto piu' semplice. Bastava notare che la chiusura dell'interruttore non veniva ad influenzare il regime permanente sinusoidale grazie alla risonansa del ramo LC, e di conseguenza, la tensione ai capi dell'interruttore, risulta dipendente unicamente dal generatore di corrente ed e' indipendente da quello di tensione.

Si doveva cioe' semplificare gia' inizialmente come di seguito



e procedere con

$$v_C(t) + v_L(t) + R(i(t) + 1) = 0$$
$$L\frac{\mathrm{d}^2 i(t)}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{i(t)}{C} = 0$$
$$i(t) = i_G(t) + i_P(t) = (k_1 + k_2 t)e^{-1000t} + 0$$

con condizioni iniziali nulle per la componente continua

$$\begin{cases} i(0+) = i(0-) = 0 \\ \left.\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0+} = \dfrac{R(i(0+)+1) - v_C(0+)}{L} = \dfrac{-10-0}{5\times 10^{-3}} = -2000\ \dfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{s}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} i(0+) = k_1 = 0 \\ \left.\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0+} = k_2 = -2000 \end{cases}$$

ed infine:

$$i(t) = -2000te^{-1000t}$$
$$v_{AB}(t) = -RJ - R(i(t) + J)$$
$$v_{AB}(t) = -10 + 2\times 10^4 te^{-1000t} - 10$$
$$v_{AB}(t) = -20 + 2\times 10^4 te^{-1000t}$$

Estratto da "http://www.electroyou.it/mediawiki/index.php?title=UsersPages:Admin:gli-esercizi-di-renzodf"