



Sebastiano Goddi (sebago)

LINEE E TRAVI: UNA POSSIBILE ANALOGIA (2)

23 February 2010

Un caso “spinoso”: la trave incastrata a entrambi gli estremi

per quanto detto al paragrafo 3 dell'[articolo precedente](#), la trave incastrata agli estremi risulta essere tre volte iperstatica: si hanno infatti:

- gradi di **vincolo** (i due incastri) = $3+3 = 6$
- gradi di **libertà** = 3 (quelli dell'asta rigida nel piano)

e pertanto:

- grado di **iperstaticità** = gradi di vincolo - gradi di libertà = $6-3 = 3$

Questo significa, in parole povere, che abbiamo 6 incognite con solo 3 equazioni.

Infatti le incognite sono date dalle reazioni ai vincoli:

- le due **azioni normali** agli estremi;
- le due **azioni di taglio** agli estremi
- i due **momenti di incastro** agli estremi

mentre le tre equazioni sono quelle delle condizioni di equilibrio già citate.

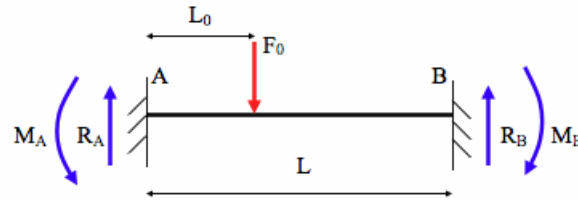
Tuttavia:

- possiamo supporre che le azioni normali siano entrambe nulle e pertanto le incognite si riducono a quattro e le equazioni si riducono a due: la struttura diventa due volte iperstatica
- possiamo supporre che in corrispondenza agli incastri le rotazioni siano nulle (condizioni di congruenza), che è come dire che gli incastri siano perfetti e non abbiano cedimenti. Ciò equivale a porre altre due equazioni che, in tal modo, bilanciano il numero delle incognite.

Suppongo però che, per non far scappare gli ultimi lettori coraggiosi rimasti, sarà meglio evitare di fare la trattazione matematica e passare direttamente al formulario tipico della Scienza delle Costruzioni.

Osserviamo tuttavia fin da ora che il caso “statico” della trave doppiamente incastrata corrisponde al caso “elettrico” della linea alimentata a due estremità.

caso a) trave con doppio incastro caricata con un carico concentrato F_0 in posizione L_0 qualsiasi:



con:

$$M_A = \frac{L_0 \cdot (L - L_0)^2}{L^2} \cdot F_0 \text{ (momento flettente all'incastro A)}$$

Per analogia esso è equivalente al momento amperometrico dei carichi nel punto di alimentazione A, ove al posto di F_0 sostituissimo la corrente derivata dal carico.

$$R_A = \frac{(L - L_0)^2}{L^3} \cdot (L + 2 \cdot L_0) \cdot F_0 \text{ (reazione vincolare all'incastro A)}$$

Per analogia essa è equivalente alla corrente erogata dall'alimentazione A.

Similmente per l'incastro B si può scrivere:

$$M_B = \frac{L_0^2 \cdot (L - L_0)}{L^2} \cdot F_0 \text{ (momento flettente all'incastro B)}$$

Per analogia esso è equivalente al momento amperometrico dei carichi nel punto di alimentazione B, ove al posto di F_0 sostituissimo la corrente derivata dal carico.

$$R_B = \frac{L_0^2}{L^3} \cdot (L + 2 \cdot (L - L_0)) \cdot F_0 \text{ (reazione vincolare all'incastro B)}$$

Per analogia essa è equivalente alla corrente erogata dall'alimentazione B.

Risulta ovviamente che:

$$R_A + R_B = F_0$$

che, sempre in analogia, è un "principio di Kirchhoff" della statica:

$$R_A + R_B = \frac{(L - L_0)^2}{L^3} \cdot (L + 2 \cdot L_0) \cdot F_0 + \frac{L_0^2}{L^3} \cdot (L + 2 \cdot (L - L_0)) \cdot F_0 =$$

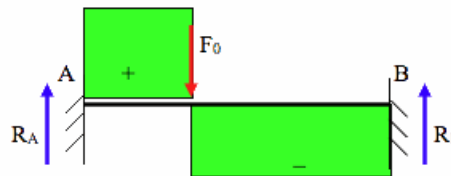
$$\begin{aligned}
 &= \frac{F_0}{L^3} \cdot [(L^2 - 2 \cdot L \cdot L_0 + L_0^2) \cdot (L + 2 \cdot L_0) + L_0^2 \cdot (L + 2 \cdot (L - L_0))] = \\
 &= \frac{F_0}{L^3} \cdot [L^3] = F_0
 \end{aligned}$$

Se la distanza L_0 corrispondesse alla mezzeria della trave ($\frac{L}{2}$), le reazioni - per simmetria - sarebbero quasi banali:

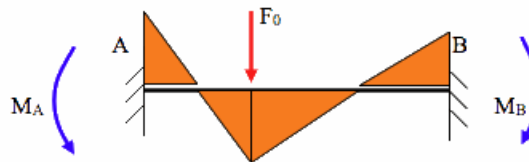
$$R_A = R_B = \frac{F_0}{2} \text{ e } M_A = M_B = \frac{1}{8} \cdot L \cdot F_0$$

L'aspetto più interessante, mantenendo la genericità della posizione di F_0 , è dato dai grafici:

azione di Taglio



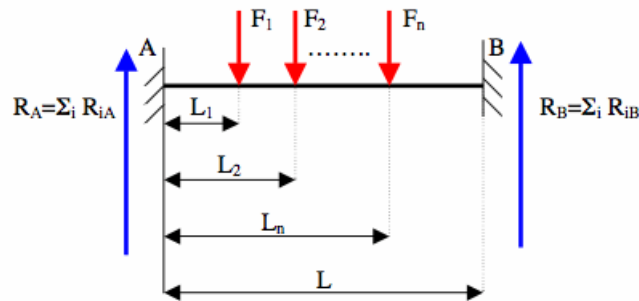
momento flettente



Nel primo di essi si nota una **INVERSIONE DEL SEGNO** dell'azione di taglio, in corrispondenza al punto di carico: nell'analogia ciò corrisponde alla sezione di una linea dove avviene l' **INVERSIONE DELLE CORRENTI**. Come a dire che il carico, elettricamente parlando, è alimentato in parte dal punto A (a sinistra) e in parte dal punto B (a destra).

Il risultato sembra banale e ovvio ma serve se, generalizzando il caso a più carichi applicati in posizione diversa, si applicasse il **PRINCIPIO DELLA SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI**

caso b) trave con doppio incastro caricata con n carichi concentrati F_i a distanze L_i :



II3.gif

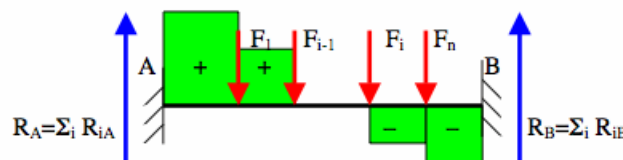
Per calcolare l'azione di taglio lungo la trave sarà sufficiente, una volta calcolata la reazione vincolare ad un estremo, assumerla come valore iniziale e, "scorrendo" verso l'altro estremo, diminuirne il valore mano a mano che si incontrano i carichi concentrati, operando una semplice sottrazione. L'azione di taglio, necessariamente, sarà di segno opposto in corrispondenza ai due incastri (vedi le convenzioni adottate). Si potrà così determinare il punto di carico nel quale avviene l'inversione di taglio, con due situazioni possibili:

b1) il taglio si azzera perfettamente in corrispondenza ad un carico e rimane nullo fino al carico successivo (nel quale assumerà segno opposto);

b2) il taglio cambia segno esattamente nel punto in cui è applicato il carico.

I grafici equivalenti sarebbero qualitativamente di questo tipo:

b1)



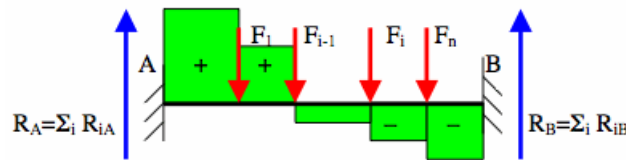
Avremo perciò una zona, intermedia fra due carichi, in cui l'asta non è sottoposta ad azione tagliente. Nell'analogia corrisponde ad tratto di una linea in cui non passa corrente. Con riferimento al grafico, sarebbe come dire che i carichi fino a F_{i-1} sono alimentati da A mentre i carichi da F_i fino a F_n sono alimentati da B.

Ma attenzione, ciò non significa che, in statica, potremmo interrompere la trave: in quel tratto il diagramma dei momenti flettenti non sarebbe infatti necessariamente nullo ma semplicemente costante, in accordo con l'equazione:

$$T(x) = \frac{d}{dx}[M(x)]$$

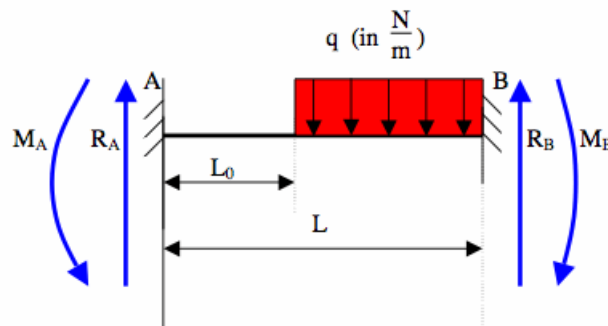
Nella nostra analogia, allora potremmo ritenere che, visto che in quel tratto non passa corrente, la caduta di tensione fra i due punti sia nulla e dunque il potenziale della linea rimane costante.

b2)



Analogia: la sezione di inversione si ha nel punto di alimentazione del carico \$F_{i-1}\$, il quale sarà alimentato in parte da A e in parte da B. Valgono analoghe considerazioni per i momenti flettenti: nel punto di inversione, essendo il taglio nullo, avranno un massimo relativo (sottoforma di cuspide).

caso c) trave con doppio incastro caricata con carichi uniformemente distribuiti:



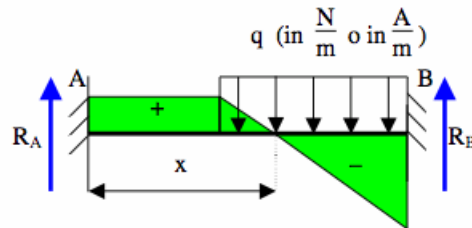
Dalla statica si ricava che:

$$R_A = \frac{q \cdot (L - L_0)^3}{2 \cdot L^3} \cdot (L + L_0)$$

e

$$R_B = \frac{q \cdot (L - L_0)}{2 \cdot L^3} \cdot [2 \cdot L^3 - (L - L_0)^2 \cdot (L + L_0)]$$

valori che, nell'analogia, una volta che si sostituissero le dimensioni di q da $\frac{N}{m}$ ad $\frac{A}{m}$, rappresenterebbero le correnti erogate dai punti di alimentazione A e B. Se il carico fosse distribuito uniformemente lungo tutta la trave/linea, si pone $L_0 = 0$ Il diagramma dell'azione di taglio



ci mostra la distanza x alla quale avviene l'inversione delle azioni di taglio/correnti nella trave/linea e si calcola, naturalmente con $(L-x)q=RB$ da cui si ottiene $x=L- RB/q$

Nel punto x , per le ragioni già dette, il momento flettente/momento amperometrico avrà un massimo relativo (in valore assoluto). In tale punto, per analogia, avremo la massima caduta di tensione nella linea elettrica, essendo quest'ultima la sezione in cui avviene l'inversione delle correnti. Considerando la corrente alternata anziché la continua, l'analogia si complicherebbe probabilmente a livelli impossibili. Analogamente, per il calcolo della sezione, in statica entrano in gioco ulteriori complicatissime considerazioni (forma della sezione, asse neutro, momento di inerzia, tensioni ammissibili e stati limite) che le mie assai limitate capacità non riuscirebbero a ricomporre in una visione unitaria.

CONCLUSIONI

Per coloro che fossero giunti alla fine di questo articolo, ai quali va la mia ammirazione per il coraggio e la pazienza di cui sono dotati, volevo solo aggiungere che fra le motivazioni che mi hanno spinto a scriverlo c'è stata quella di far notare che talvolta - più spesso di quanto non crediamo - due discipline apparentemente diverse hanno molti tratti in comune. Per di più mi è servito a trascorrere un po' di tempo immergendomi in una sorta di "adolescenza tardiva". Infine per confermare che, anche in casi complessi, l'elettrotecnica ha una eleganza e una correttezza formale che altre discipline non possono vantare.

Viva Ohm! Viva Kirchhoff!

Viva Electroportal.

Olè.

Estratto da "<http://www.electroyou.it/mediawiki/index.php?title=UsersPages:Admin:lineetravi2>"