



Zeno Martini (admin)

MODELLIZZAZIONE DI UN MAGNETE PERMANENTE

3 October 2010

Premessa

Come ha osservato [RenzoDF](#) nel suo articolo [Magneti Permanenti -1](#), l'argomento è poco trattato nei tradizionali testi di Elettrotecnica.

Il recente commento ad [un articolo sull'analogia tra circuiti elettrici e circuiti magnetici](#), mi ha indotto ad ampliare quella trattazione.

Magnete Permanente

il magnete permanente si ottiene sottoponendo ad opportuno campo magnetico un materiale ferromagnetico con ciclo di isteresi molto ampio, caratterizzato da una notevole **induzione residua** e da una elevata **forza coercitiva**.

Una volta realizzato, il magnete si troverà in un certo ambiente, nel quale svilupperà il campo magnetico dipendente dalle caratteristiche dell'ambiente.

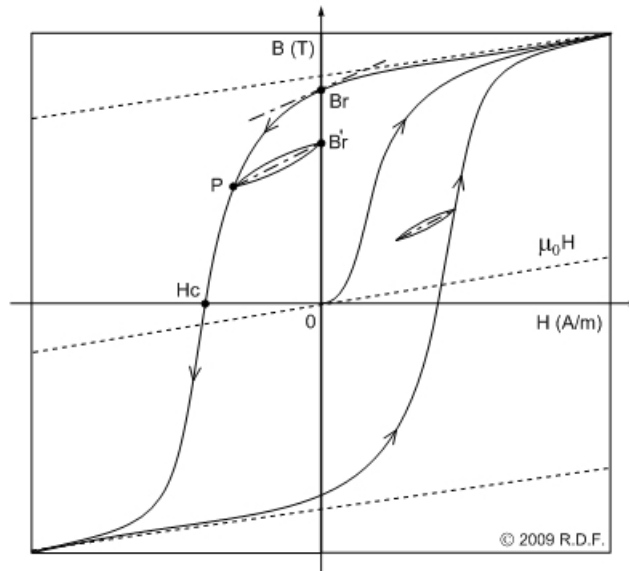
Il magnete può essere "isolato" cioè lontano da altri materiali magnetici, ma, generalmente, l'ambiente che interessa è quello che gli si crea appositamente attorno con materiali magnetici: il **circuito magnetico**, un percorso prefissato per i flussi magnetici.

Prefissato nei limiti del possibile però, in quanto non un isolante magnetico, corrispondente agli isolanti elettrici. E' perciò molto più difficile, praticamente impossibile, definire con estrema precisione il circuito.

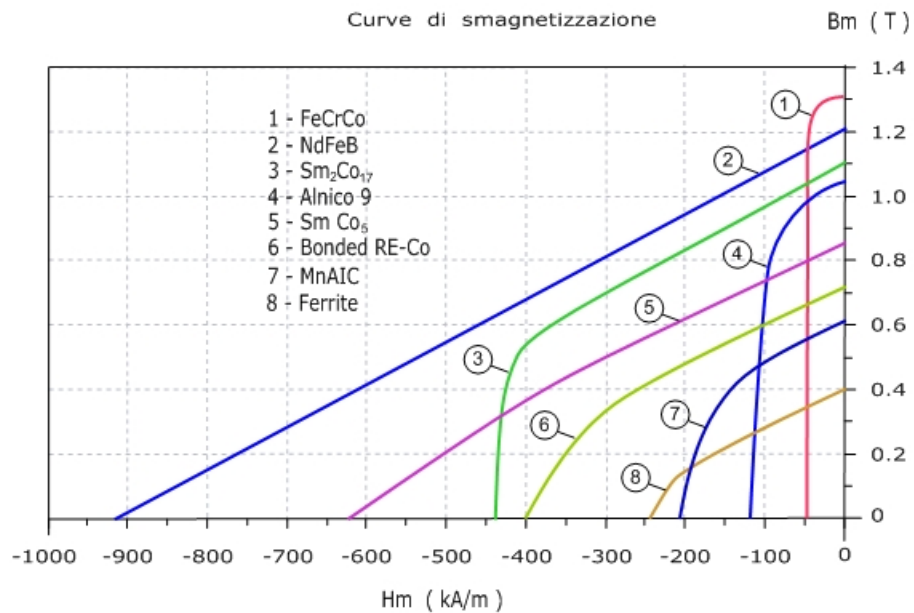
Nel circuito magnetico il magnete permanente è un componente attivo. Lo possiamo vedere come un generatore reale di flusso magnetico, corrispondente ad un generatore di corrente reale, o, dualmente, ad un generatore di tensione reale magnetica, corrispondente ad un generatore reale di tensione elettrica.

A seconda del circuito magnetico in cui è inserito induzione e campo del magnete si modificano, assumendo i valori che corrispondono a punti della sua caratteristica di smagnetizzazione.

Di seguito riporto, per comodità, le figure del citato articolo di RenzoDF:



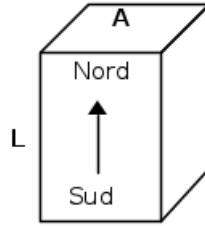
Ciclo di isteresi



Caratteristiche di smagnetizzazione

Modellizzazione

Consideriamo un magnete al Neodimio-Ferro-Boro a forma di parallelepipedo, di lunghezza L e sezione A .



Come si può vedere dalle curve di smagnetizzazione (la 2, blu), esso ha una caratteristica lineare.

Indicato con B_0 il magnetismo residuo, con H_0 il valore assoluto della forza coercitiva, nel secondo quadrante

$$0 \leq B \leq B_0$$

$$-H_0 \leq H \leq 0$$

si può scrivere

$$B = B_0 + \mu_P \cdot H$$

oppure

$$H = \frac{B_0}{\mu_p} - H_0$$

avendo posto

$$\mu_p = \frac{B_0}{H_0}$$

detta *permeabilità reversibile* del magnete.

Se il campo interno al magnete è uniforme, possiamo porre

$$\Phi = A \cdot B$$

uguale al flusso che lo attraversa e

$\mathfrak{F} = -H \cdot L$ pari alla tensione magnetica, positiva, esistente tra il polo Nord, da cui esce il flusso, ed il polo Sud.

In pratica consideriamo il magnete come un generatore di flusso magnetico ed assumiamo per il segno di flusso e tensione magnetica, la convenzione dei generatori elettrici per tensione ed intensità di corrente: quindi flusso uscente dal punto a potenziale magnetico più alto, il Nord.

Avremo allora

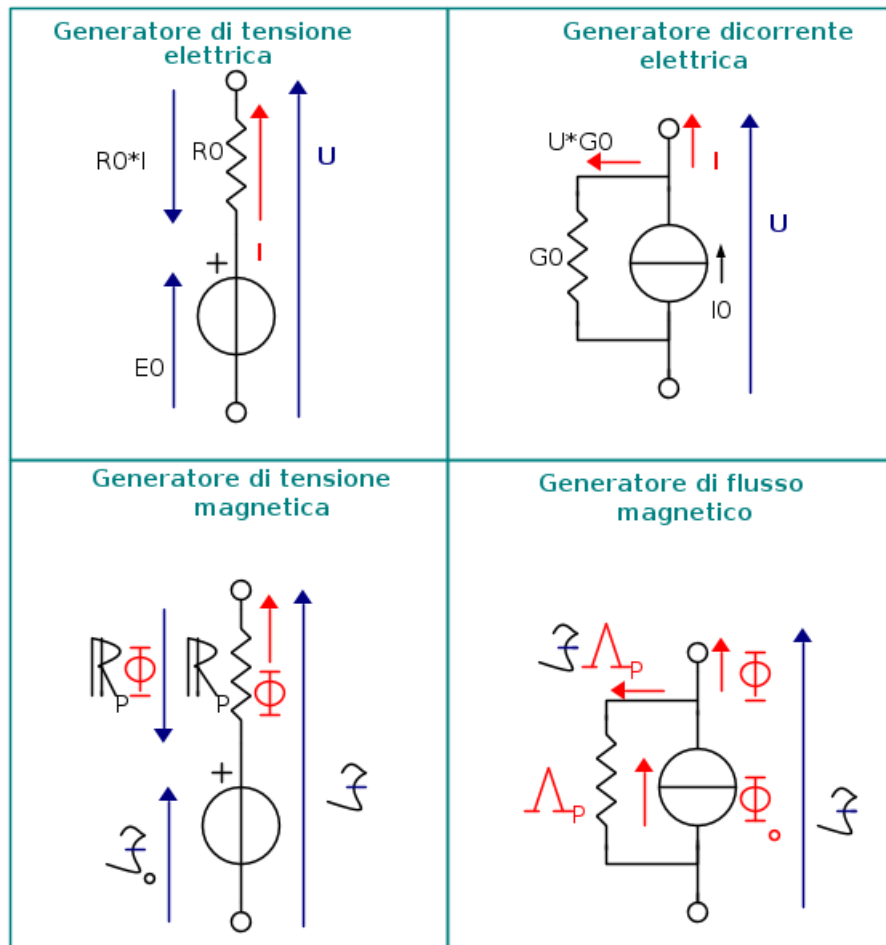
$$\Phi = \Phi_0 - \Lambda_P \cdot \mathfrak{F}$$

oppure

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_0 - \mathfrak{R}_P \cdot \Phi$$

dove

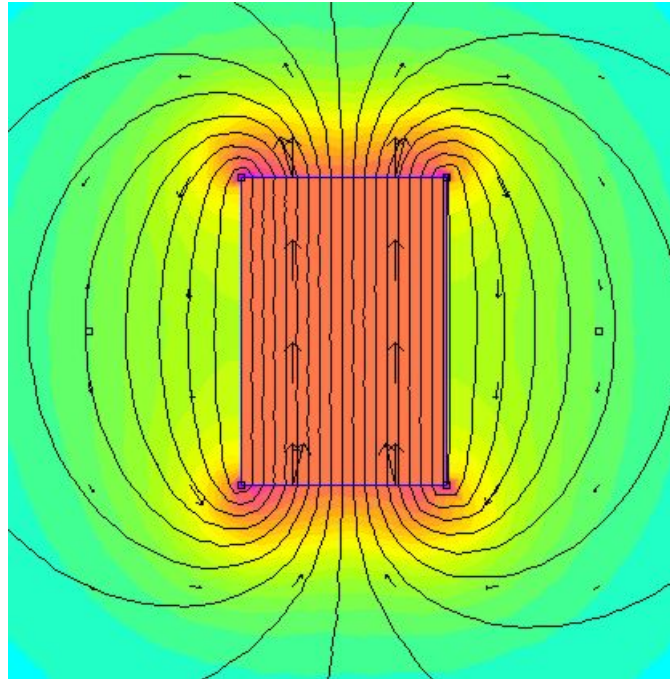
$$\begin{aligned}\Lambda_P &= \mu_P \cdot \frac{A}{L} \\ \mathfrak{R}_P &= \frac{1}{\Lambda_P} \\ \Phi_0 &= A \cdot B_0 \\ \mathfrak{F}_0 &= H_0 \cdot L\end{aligned}$$



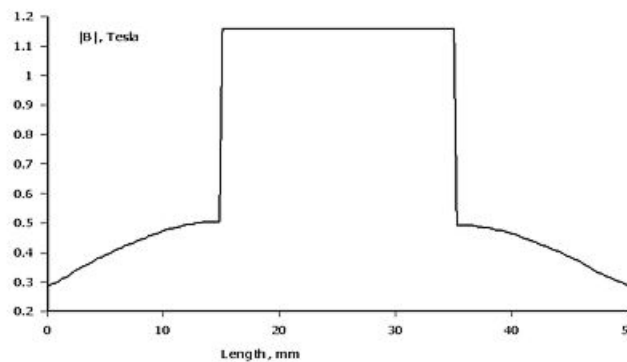
Limiti del modello

La modellizzazione è valida se il campo interno al magnete è uniforme. L'ipotesi di uniformità è verificata maggiormente quanto minore è la lunghezza del magnete, e si

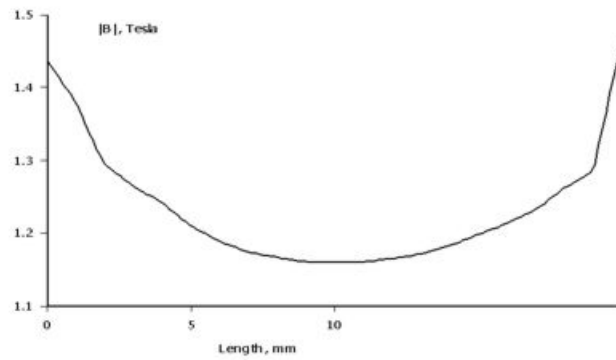
può verificare soprattutto quando il magnete è inserito in un ambiente o fa parte di un circuito ad alta permeabilità magnetica come mostrano le figure seguenti, relative ad un MP al NdFeB di dimensione 20 mm x 30 mm x 30 mm.



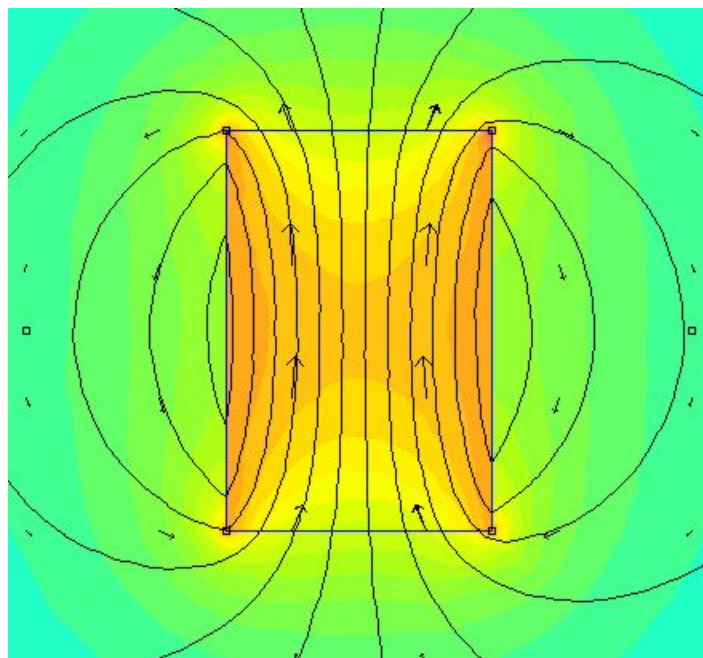
1-MP immerso in materiale magnetico ad alta permeabilità



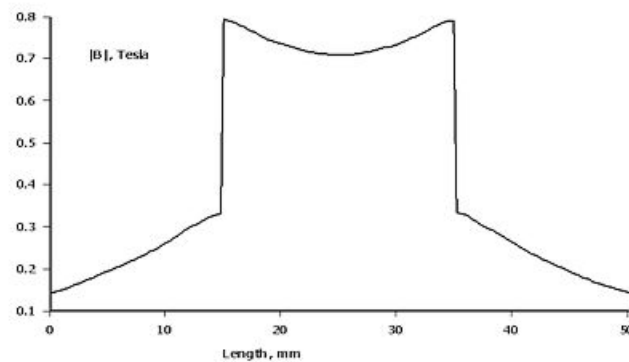
1a-Induzione in sezione centrale



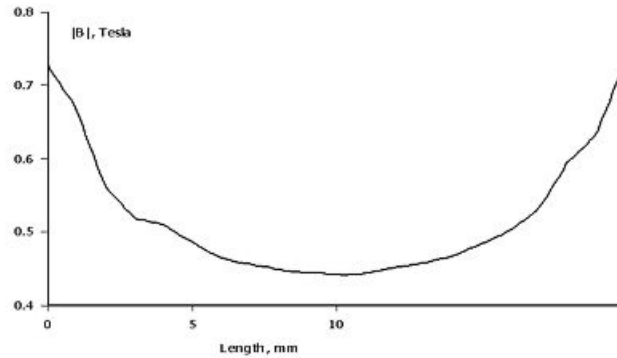
1b-Induzione sulla superficie del polo nord



2-MP immerso in aria



2a-Induzione in sezione centrale



2b-Induzione sulla superficie del polo Nord

Oltre alla disuniformità nel campo si noti come nel caso del MP in aria si abbassino sensibilmente i valori di induzione per l'azione del campo smagnetizzante che, nel caso della prima figura è praticamente nullo. La prima figura corrisponde alla condizione di cortocircuito; la seconda al circuito "aperto" magneticamente.

Nota: per tutte le corrispondenze tra grandezze elettriche e magnetiche si faccia riferimento alla [Tabella dell'articolo](#) citato in premessa.

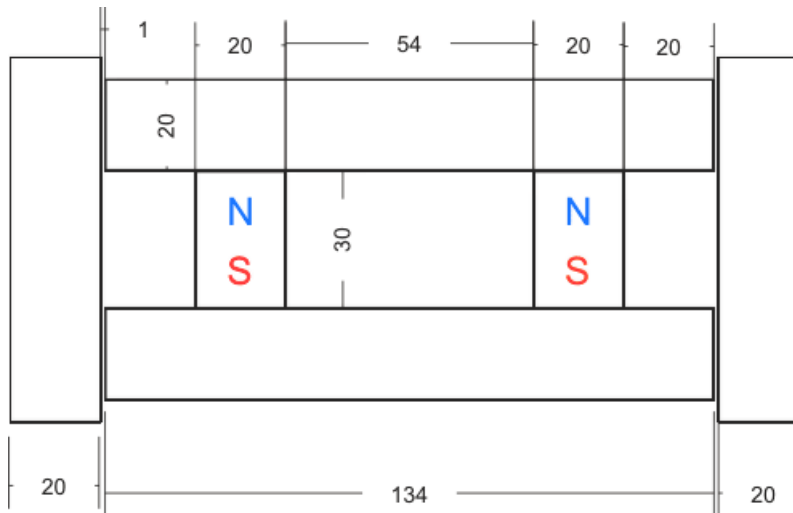
Osservazione

Il prodotto di tensione elettrica per intensità di corrente è una potenza elettrica, il che sta a significare che, ad esempio, da un generatore elettrico funzionante esce continuamente energia, energia che entra nel generatore dall'esterno. Il flusso di energia uscente dal generatore elettrico può continuare finché permane la fonte primaria di energia che fa funzionare il generatore. Il prodotto di flusso $W_b = V \cdot s$ per tensione magnetica A ha invece le dimensioni di un'energia, non di una potenza. E' legato all'energia complessiva immagazzinata nell'ambiente in cui è inserito il magnete permanente. Movimenti meccanici di parti del circuito magnetico ne alterano l'energia magnetica. Se diminuisce, è il campo magnetico a produrre il lavoro corrispondente ma, evidentemente, è una diminuzione che non può procedere all'infinito. Necessariamente per poter estrarre energia dal campo magnetico, occorre ripristinarla dall'esterno eseguendo lavoro sugli organi mobili, contro le forze del campo. Quindi tutti i marchingegni che girano in internet basati solo su MP e che promettono energia senza limiti ricavata dai magneti permanenti sono degli imbrogli.

L'analogia circuiti elettrici- circuiti magnetici presenta dunque a questo riguardo una differenza notevole: mentre il circuito elettrico è legato ad un flusso di energia che lo attraversa, il circuito magnetico rappresenta uno stato energetico.

Esercizio

Sia dato il seguente circuito magnetico con magneti permanenti.



Le dimensioni sono in millimetri. La profondità è di **30 mm**.

Tra i magneti ed i gioghi esiste un traferro $l_{t0} = 0,1 \text{ mm}$.

I magneti permanenti sono al **Neodimio-Ferro-Boro**.

L'induzione residua è

$$B_0 = 1,15 \text{ T, la forza coercitiva } H_0 = 883 \frac{\text{kA}}{\text{m}}$$

I magneti permanenti sono schematizzabili come generatori

$$\Phi_0 = B_0 \cdot A = 1,15 \times 20 \times 10^{-3} \times 30 \times 10^{-3} = 6,9 \times 10^{-4} \text{ Wb}$$

$$\Lambda_P = \mu_P \cdot \frac{A}{L} = \frac{B_0}{H_0} \cdot \frac{A}{L} = \frac{1,15}{883 \times 10^3} \times \frac{20 \times 30 \times 10^{-6}}{30 \times 10^{-3}} = 2,6 \times 10^{-8} \text{ H}$$

$$\mathcal{R}_P = \frac{1}{\Lambda_P} = \frac{10^8}{2,6} = 3,84 \times 10^7 \text{ H}^{-1}$$

Le riluttanze

Le riluttanze magnetiche dei gioghi e delle colonne sono trascurate e si considera solo la riluttanza dei traferri.

L'ampiezza totale dei due traferri che separano gioghi da una colonna è $l_t = 2 \text{ mm}$

$$R_{s1} = R_{d1}$$

$$R_{d1} = \frac{1}{\mu_0} \cdot \frac{l_t}{S_t} = 2 \times \frac{10^6}{1,256} \times \frac{10^{-3}}{20 \times 30 \times 10^{-6}} = 2,65 \times 10^6 \text{ H}^{-1}$$

Quella dei traferri che separano ciascun magnete dai gioghi vale:

$$R_{s0} = R_{d0} = \frac{1}{\mu_0} \cdot \frac{l_{t0}}{S_t} = 0,2 \times \frac{10^6}{1,256} \times \frac{10^{-3}}{20 \times 30 \times 10^{-6}} = 0,265 \times 10^6 \text{ H}^{-1}$$

Occorre poi tenere conto del flusso in aria tra i gioghi. Ricordiamo che non esiste un isolante magnetico. La riluttanza complessiva in aria tra i gioghi è data da

$$\mathcal{R}_{gg} = \frac{L}{\mu_0 \cdot (A_g - 2 \cdot A)}$$

$$\mathcal{R}_{gg} = \frac{10^6}{1,256} \times \frac{30 \times 10^{-3}}{(154 - 2 \times 20) \times 30 \times 10^{-6}} = 6,98 \times 10^6 \text{ H}^{-1}$$

Essa è l'equivalente di due riluttanze uguali

$$\mathcal{R}_{gs} = \mathcal{R}_{gd} = 2 \cdot \mathcal{R}_{gg} \cong 14 \times 10^6 \text{ H}^{-1}$$

Osservazioni. I calcoli sono approssimati. La sezione effettiva del traferro è in generale maggiore di quella del ferro. Di quanto, dipende dall'ampiezza del traferro e dalla forma delle superfici affacciate. Si può ritenere trascurabile l'errore sulla riluttanza R_{d0} , un po' meno quello su R_{d1} , abbastanza meno su R_{gd} .

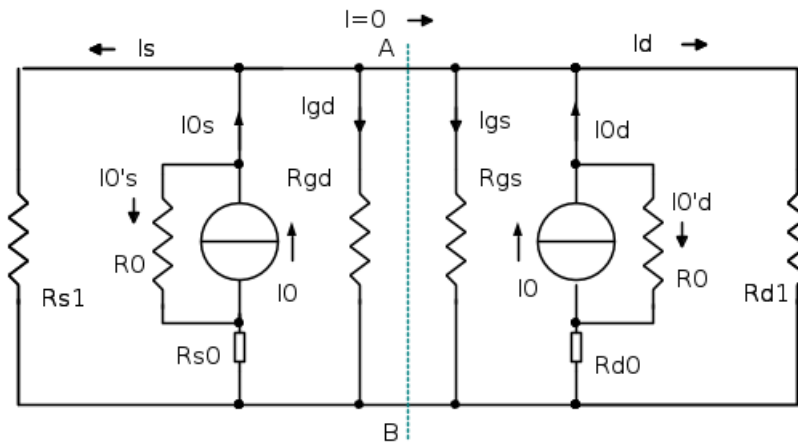
Ad ogni modo posto

$$R_0 = \frac{1}{\Lambda_P}$$

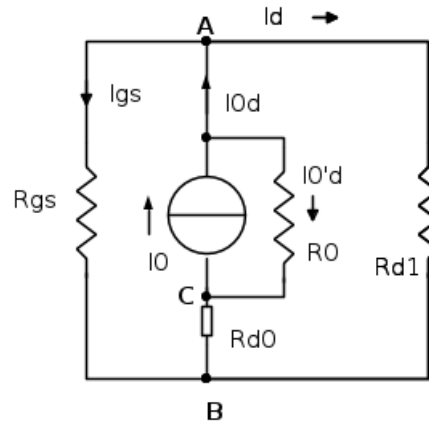
$$I_0 = \Phi_0$$

ed indicate con **R** le riluttanze ed i flussi con **I** ecco

Il circuito elettrico equivalente



Il circuito è simmetrico rispetto all'asse AB. Si può allora considerare solo una delle due parti, immaginando di tagliare a metà il circuito, dove la corrente-flusso I è nulla.



$$I_d = I_{0d} \cdot \frac{R_{gs}}{R_{gs} + R_{d1}}$$

$$R_{AB} = \frac{R_{gs} \cdot R_{d1}}{R_{gs} + R_{d1}} = \frac{14 \times 2,65}{14 + 2,65} \times 10^6 = 2,23 \times 10^6 \text{ H}^{-1}$$

$$R_{AC} = R_{AB} + R_{d0} = (2,23 + 0,265) \times 10^6 = 2,5 \times 10^6 \text{ H}^{-1}$$

$$I_{0d} = I_0 \times \frac{R_0}{R_0 + R_{AC}} = 6,9 \times 10^{-4} \frac{38,4}{40,7} = 6,48 \cdot 10^{-4} \text{ Wb}$$

$$I_d = \frac{14}{16,65} \times 6,48 \times 10^{-4} = 5,45 \times 10^{-4} \text{ Wb}$$

Questo è il valore del flusso, Φ_d , che attraversa il traferro che separa il giogo dalla colonna.

Induzione al traferro

Ci interessa ad esempio conoscere il valore dell'induzione nel traferro. Qui occorre conoscere l'effettiva sezione di passaggio in aria, generalmente maggiore della sezione di ferro, tanto più quanto maggiore è lo spessore del traferro. Qui poi alterata probabilmente dalla maggior lunghezza delle colonne rispetto alla distanza tra i gioghi.

Ipotizzando un allargamento del 10%, avremo nel traferro un'induzione media di

$$B_t = \frac{\Phi_d}{1,1 \cdot S_t} = \frac{5,45 \times 10^{-4}}{1,1 \times 20 \times 30 \times 10^{-6}} = 0,826 \text{ T}$$

Punto di lavoro del magnete

La tensione magnetica ai capi del magnete vale

$$U_P = U_{AC} = I_{0d} \cdot R_{AC} = 6,48 \times 10^{-4} \times 2,5 \times 10^6 = 1620 \text{ A}$$

Il campo magnetico interno al magnete vale, in valore assoluto

$$|H_P| = \frac{U_{AB}}{l_P} = \frac{1620}{0,03} = 54000 \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

La diminuzione di flusso dovuta alla permeanza del magnete è

$$I'_{0d} = \frac{U_{AB}}{R_0} = \frac{1620}{38,4} 10^{-6} = 0,422 \times 10^{-4} \text{ Wb}$$

Il flusso di lavoro del magnete è

$$I_{0d} = I_0 - I'_{0d} = (6,9 - 0,422) \times 10^{-4} = 6,48 \text{ Wb}$$

L'induzione di lavoro

$$B_P = \frac{I_{0d}}{A} = \frac{6,48 \times 10^{-4}}{30 \times 20 \times 10^{-6}} = 1,08 \text{ T}$$

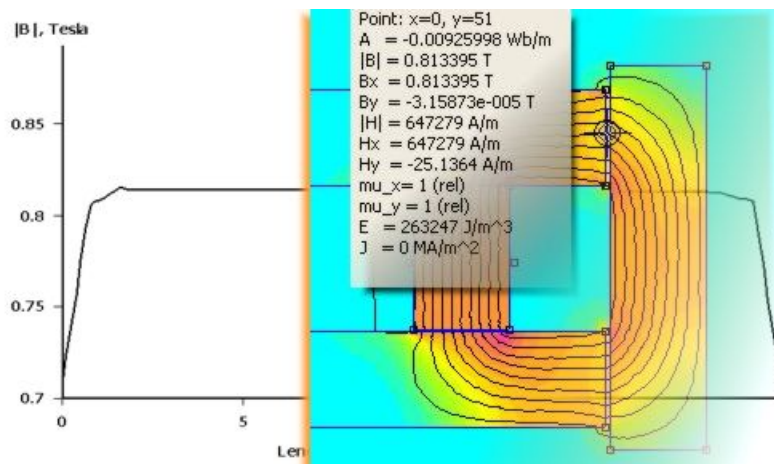
Osservazione

è bene ricordare che i calcoli precedenti relativi alle grandezze puntuali, presuppongono una valore costante di queste nel volume considerato. Le cose in realtà sono più complesse ed i calcoli puntuali devono essere eseguiti con strumenti quali FEMM.

Verifica con FEMM

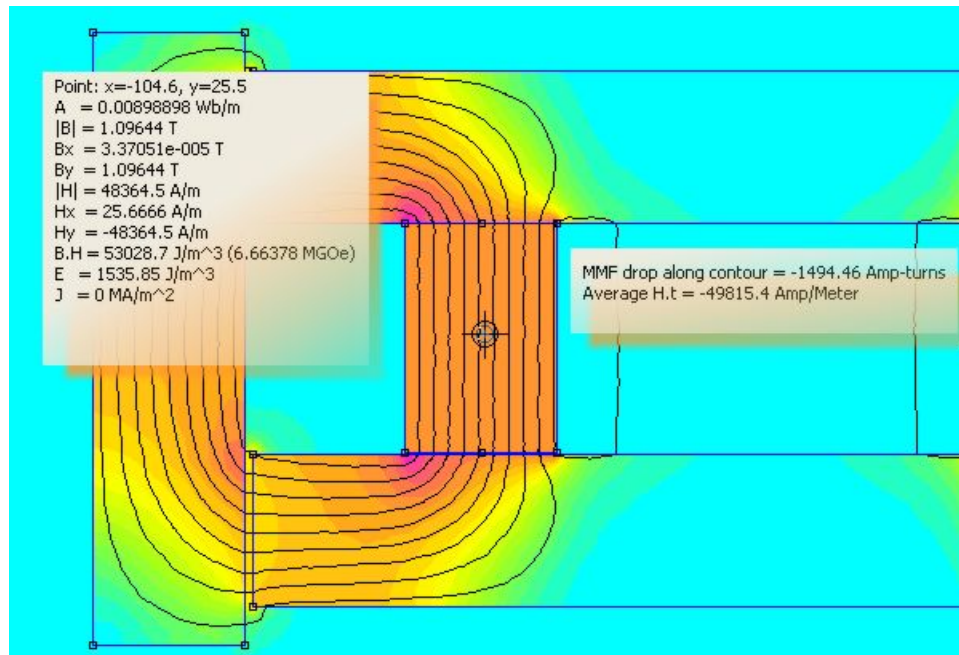
Ecco i risultati dei calcoli effettuati con [<http://www.electroportal.net/admin/wiki/femmtutorial>] FEMM.

Nella seguente figura il valore dell'induzione (**B=0,813 T**) in un punto ed il grafico della stessa lungo il traferro.



Induzione nel traferro

Nella seguente i valore del campo (**48364 A/m**), dell'induzione (**1,096 T**) in un punto interno al magnete ed il calcolo della tensione magnetica (**1494 A** in valore assoluto).



Campo e tensione magnetica in MP

I valori assomigliano abbastanza a quelli trovati con il circuito elettrico equivalente. La differenza è da attribuire all'approssimazione con cui sono calcolate le riluttanze. In particolare la riluttanza tra i gioghi è sicuramente inferiore al valore effettivo. Il che determina una derivazione del flusso prodotto maggiore ed un conseguente flusso minore verso il traferro giogo-colonna, con induzione minore. La minor riluttanza complessiva, vista di conseguenza dal magnete, determinerà una minore tensione magnetica ai suoi capi. I risultati di FEMM confermano tali considerazioni.

Nota 1: gli assi cartesiani sono quelli "soliti": asse delle ascisse x orientato a destra; asse delle ordinate, y , orientato verso l'alto. Il valore di H_y è negativo ed il calcolo di MMF è l' integrale di linea di H calcolato lungo un segmento parallelo e concorde all'asse y . La tensione magnetica ha segno opposto per la convenzione assunta dei generatori.

Nota2: le condizioni al contorno sono "Prescribed A", cioè con i coefficienti A_i tutti nulli, il che corrisponde a considerare tutto il campo magnetico confinato nel volume di calcolo di FEMM.

Riferimenti

"Modellistica dei sistemi elettromeccanici" - G. Superti Furga - 2003

Estratto da "<http://www.electroyou.it/mediawiki/index.php?title=UsersPages:Admin:magnete-permanente>"