

Zeno Martini (admin)

POTENZA IN REGIME SINUSOIDALE

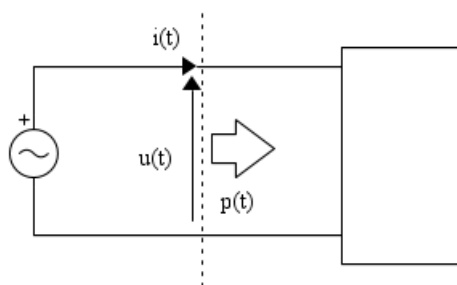
5 November 2016

Premesse

Non molto tempo fa arriva il [quesito di uno studente](#) sul significato delle varie potenze in regime sinusoidale: attiva, reattiva, apparente, istantanea. La spiegazione c'è su qualsiasi testo di elettrotecnica, ma l'impressione, che lo studente con la sua domanda conferma, è che si finisca per credere che si tratti di potenze di diverso tipo e "la causa", se così possiamo dire, di tale credenza, sono i nomi diversi delle unità di misura usati per ciascuna di esse.

Nota: quanto segue è anche la riedizione della prima parte di una [antica lezione](#), la settimana, del corso di [Elettrotecnica di base](#) dove le formule sono ormai praticamente illeggibili e dovrebbero essere riscritte in LaTeX, correggendo tra l'altro qualche mancanza esistente nei passaggi matematici. L'intero corso era in riedizione e revisione per merito del nostro [lillo](#), riedizione che però è attualmente ferma. Le revisioni portate a termine, le prime sei lezioni, potete comunque trovarle nel [suo blog](#)

Potenza in una sezione di una linea monofase



La potenza transitante in una generica sezione di una linea bifilare che connette un generatore ad un carico, indicate con $i(t)$ e $u(t)$ corrente e tensione in quella sezione, assunte positive secondo i versi indicati dalle rispettive frecce, ha il verso positivo indicato dalla freccia grande. I versi positivi di tensione e corrente rispecchiano la convenzione dell'utilizzatore per il carico che abbiamo rappresentato sulla destra, e conseguentemente quella del generatore per il generatore rappresentato a sinistra.

Poiché tensione e corrente sono funzioni del tempo, lo sarà anche la potenza.

Considereremo esclusivamente grandezze sinusoidali. Quindi tensione e corrente varieranno con frequenza f cui corrisponde la pulsazione $\omega = 2\pi f$ con valori massimi rispettivamente U_M ed I_M

e, ipotizzando uno sfasamento di ritardo della corrente rispetto alla tensione, cioè angolo $\varphi > 0$, scriveremo le espressioni

$$\begin{aligned} u(t) &= U_M \sin \omega t \\ i(t) &= I_M \sin (\omega t - \varphi) \end{aligned}$$

la potenza è allora data da

$$p(t) = u(t)i(t)$$

questa è la potenza istantanea e la sua unità di misura è il watt che è, nel sistema internazionale, l'unità di misura per la potenza.

Sostituiamo in essa le espressioni assunte per tensione e corrente ed eseguiamo alcuni passaggi matematici in base a note formule di trigonometria che si possono ripassare in [questo articolo](#)

$$\begin{aligned} p(t) &= U_M I_M \sin \omega t \cdot \sin (\omega t - \varphi) = U_M I_M \sin \omega t \cdot (\sin \omega t \cos \varphi - \cos \omega t \sin \varphi) = \\ &= U_M I_M \cos \varphi \sin^2 \omega t - U_M I_M \sin \varphi \cos \omega t \sin \omega t = \\ &= U_M I_M \cos \varphi \left(\frac{1 - \cos 2\omega t}{2} \right) - U_M I_M \sin \varphi \sin \omega t \cos \omega t = \\ &= \frac{U_M I_M}{2} \cos \varphi (1 - \cos 2\omega t) - U_M I_M \sin \varphi \frac{\sin 2\omega t}{2} \end{aligned}$$

Essendo i valori efficaci di tensione e corrente nel caso sinusoidale definiti da

$$U = \frac{U_M}{\sqrt{2}}$$

$$I = \frac{I_M}{\sqrt{2}}$$

poniamo

$$\frac{U_M I_M}{2} = UI = S$$

quindi

$$\begin{aligned} P &= S \cos \varphi \\ Q &= S \sin \varphi \\ [1] \end{aligned}$$

Sono tre parametri che ora inseriremo nella formula della potenza. Hanno tutti la dimensione fisica del watt ma, per distinguerli, per S si userà il nome voltampere (VA), per Q il nome voltampere reattivi (var) mentre il nome watt (W) sarà attribuito a P oltre che essere ovviamente l'unità di misura della potenza istantanea.

E' sufficiente conoscere due soli di tali parametri essendo i tre legati dalla relazione, deducibile da una notissima formula trigonometrica, che esprime, in pratica, il teorema di Pitagora. I tra

parametri sono cioè i lati di un triangolo rettangolo, detto triangolo di potenza dove i cateti sono P (in genere orizzontale) e Q , mentre S è l'ipotenusa

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} \quad [1a]$$

Osserviamo infine che S è un numero sempre positivo, che P , dipendente dal coseno che è una funzione pari, è sempre positiva per angoli compresi nell'intervallo $-90^\circ < \varphi < +90^\circ$ mentre Q è negativa quando φ è negativo essendo il seno una funzione dispari. Il segno di φ dipende dalla natura del carico, ed è assunto positivo quando il carico è ohmico induttivo, negativo quando è ohmico-capacitivo.

$$p(t) = P (1 - \cos 2\omega t) - Q \sin 2\omega t \quad [2]$$

Posto

$$p_R(t) = P (1 - \cos 2\omega t)$$

$$p_X(t) = Q \sin 2\omega t$$

si ha

$$p(t) = p_R(t) - p_X(t)$$

la potenza istantanea è la differenza di due termini che hanno pulsazione, quindi frequenza, doppia di quella di tensione e corrente che ne sono all'origine; il primo $p_R(t)$ non è mai negativo, varia tra 0 e $2P$ ed ha valore medio P ; il secondo $p_X(t)$ ha valor medio nullo e varia tra i valori massimi negativo e positivo di valore assoluto pari a Q . Inoltre, per il segno di Q , $p_X(t)$ nel caso di un carico ohmico induttivo è in opposizione di fase rispetto a quello di un carico ohmico capacitivo.

Il valore medio della $p(t)$ è sempre P ed è la potenza che si trasferisce definitivamente dal generatore all'utilizzatore e che qui si trasforma in altra forma: termica, meccanica, chimica ecc a seconda del tipo di utilizzatore. A tale valore si è riservato come nome dell'unità di misura il watt.

La potenza reattiva rappresenta invece il valore massimo della potenza che oscilla tra generatore ed utilizzatore.

E' dunque il valore massimo di una potenza di scambio, che esiste nel circuito elettrico, che non esce da esso, ma di cui bisogna tenere conto in quanto contribuisce ad aumentare il valore della corrente, quindi della caduta di tensione nella linea di trasmissione.

Possiamo anche ricavare un'altra espressione per la potenza istantanea

$$p(t) = P - (P \cos 2\omega t + Q \sin 2\omega t) = P - UI (\cos \varphi \cos 2\omega t + \sin \varphi \sin 2\omega t)$$

Quindi, usando le solite formule trigonometriche,

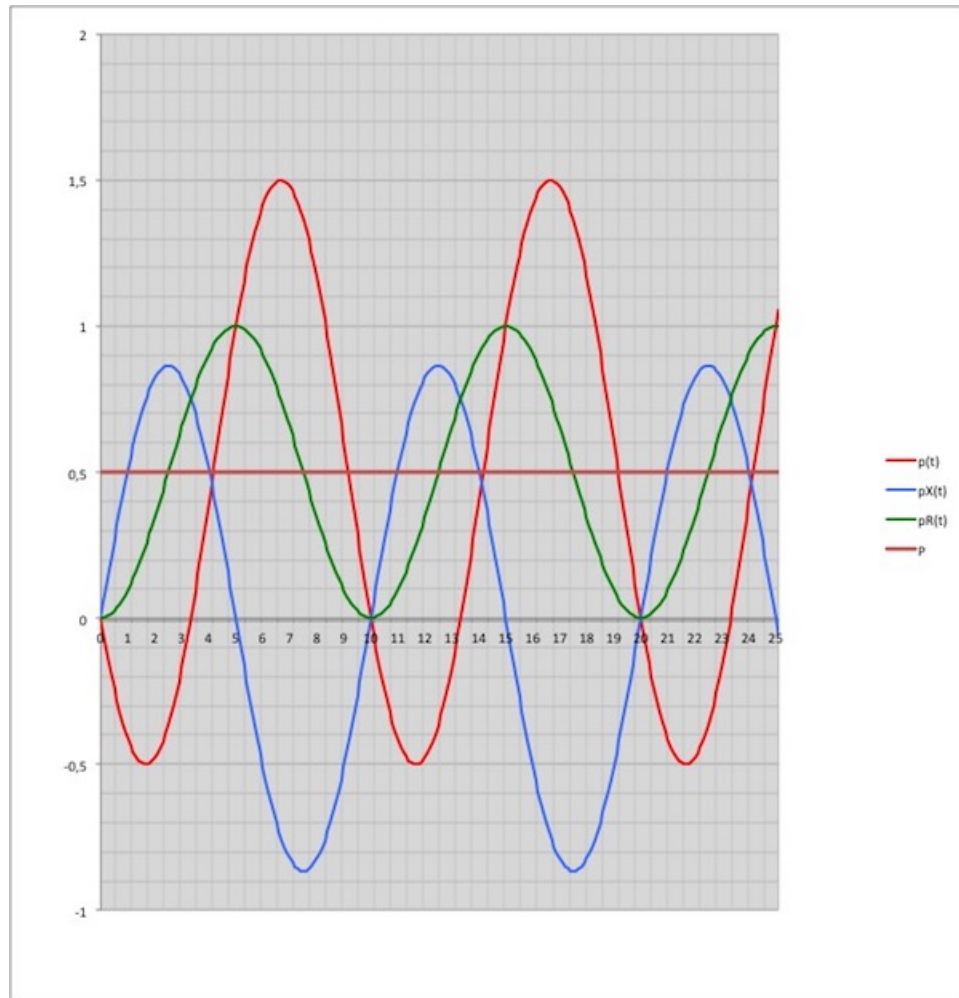
$$p(t) = P - S [\cos (2\omega t - \varphi)] \quad [3]$$

Tale espressione mostra che, a parità di U ed I , quindi di S , al variare di φ la potenza istantanea oscilla intorno al valor medio P sempre con ampiezza pari ad S , quindi con un valore da picco a picco pari a $2S$.

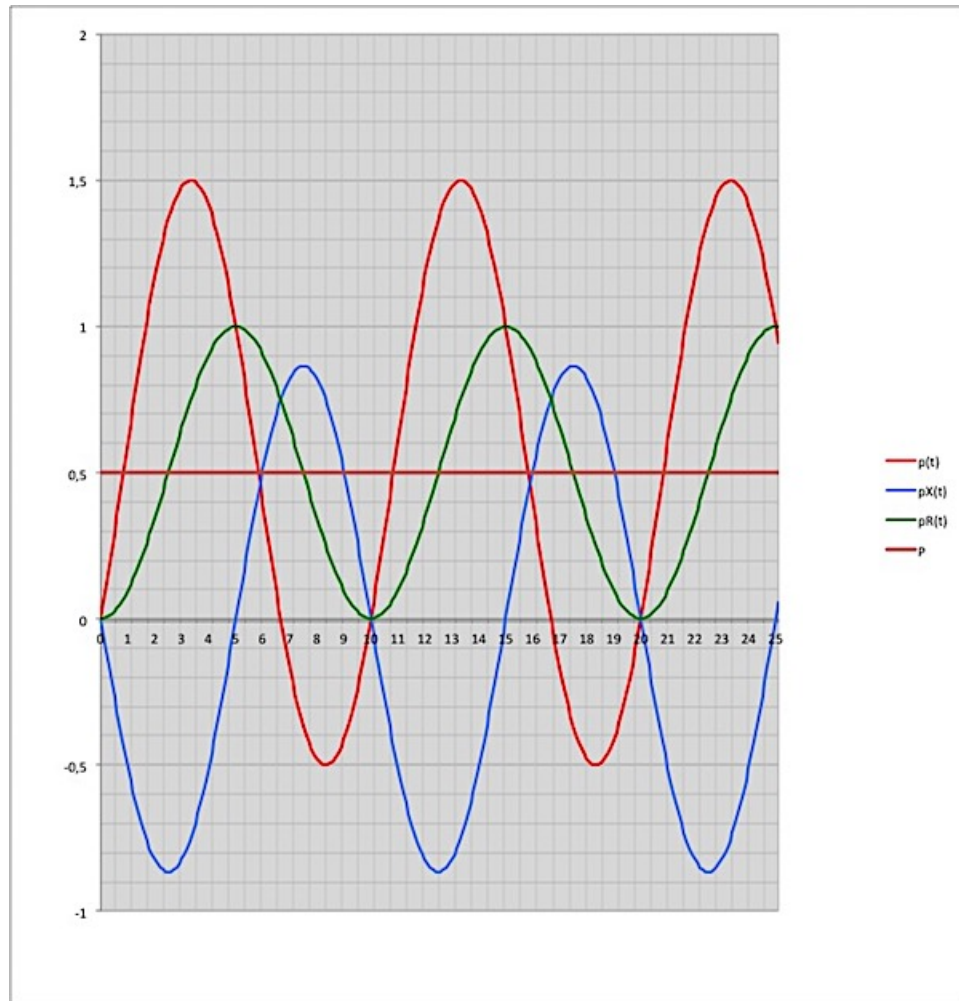
Grafici

Nei grafici mostrati nelle figure seguenti, i valori sono normalizzati al valore della potenza apparente, cioè tutti sono divisi per $S = UI$. L'asse delle ascisse è tarato in millisecondi. La frequenza di tensione e corrente, non rappresentate, sfasate dell'angolo φ (corrente in ritardo), è di $f = 50 \text{ Hz}$, cioè il loro periodo è di $T = 20 \text{ ms}$. Il periodo della potenza istantanea è invece la metà: $T_p = 10 \text{ ms}$.

Carico induttivo



angolo di sfasamento tra tensione e corrente di 60°

Carico capacitivo

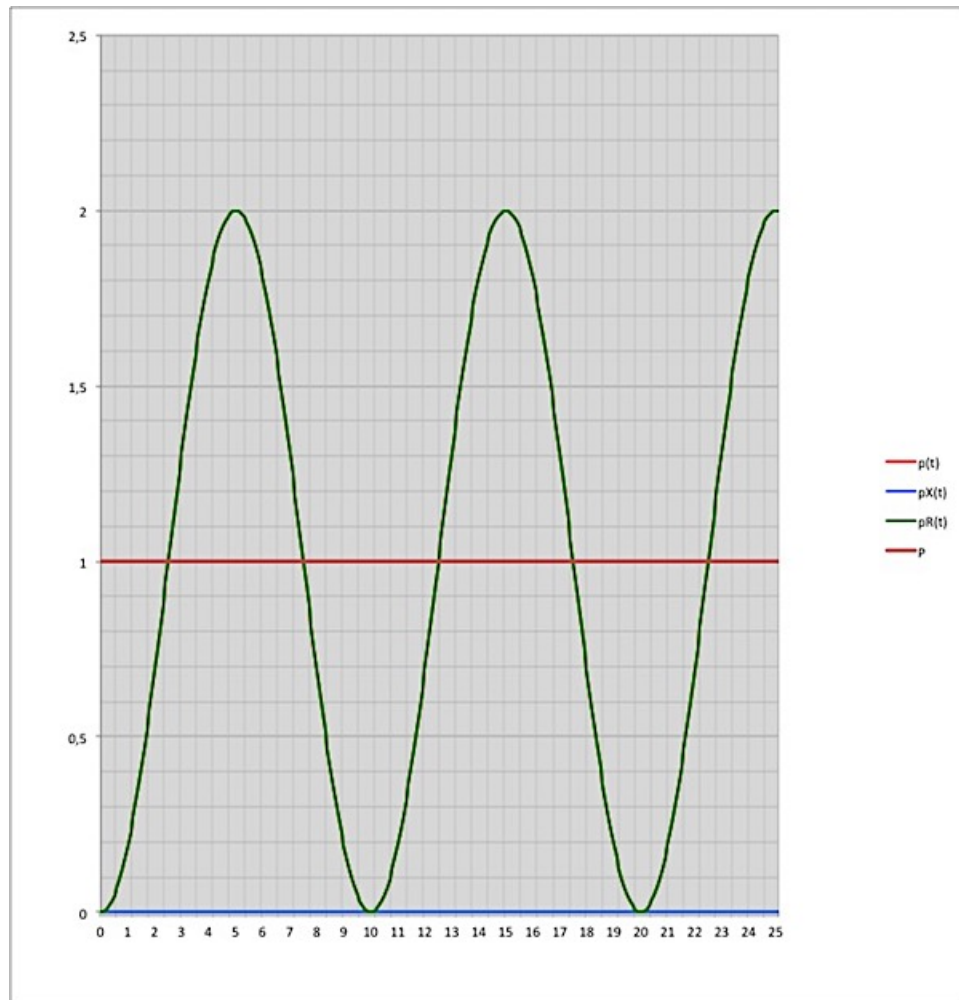
angolo di sfasamento tra tensione e corrente di 60°

Come si può vedere nei due grafici la differenza sta in $p_X(t)$ che sono in opposizione di fase

Carico puramente resistivo

$$\varphi = 0 \Rightarrow P = S; Q = 0$$

$$p(t) = p_R(t) = P (1 - \cos 2\omega t)$$

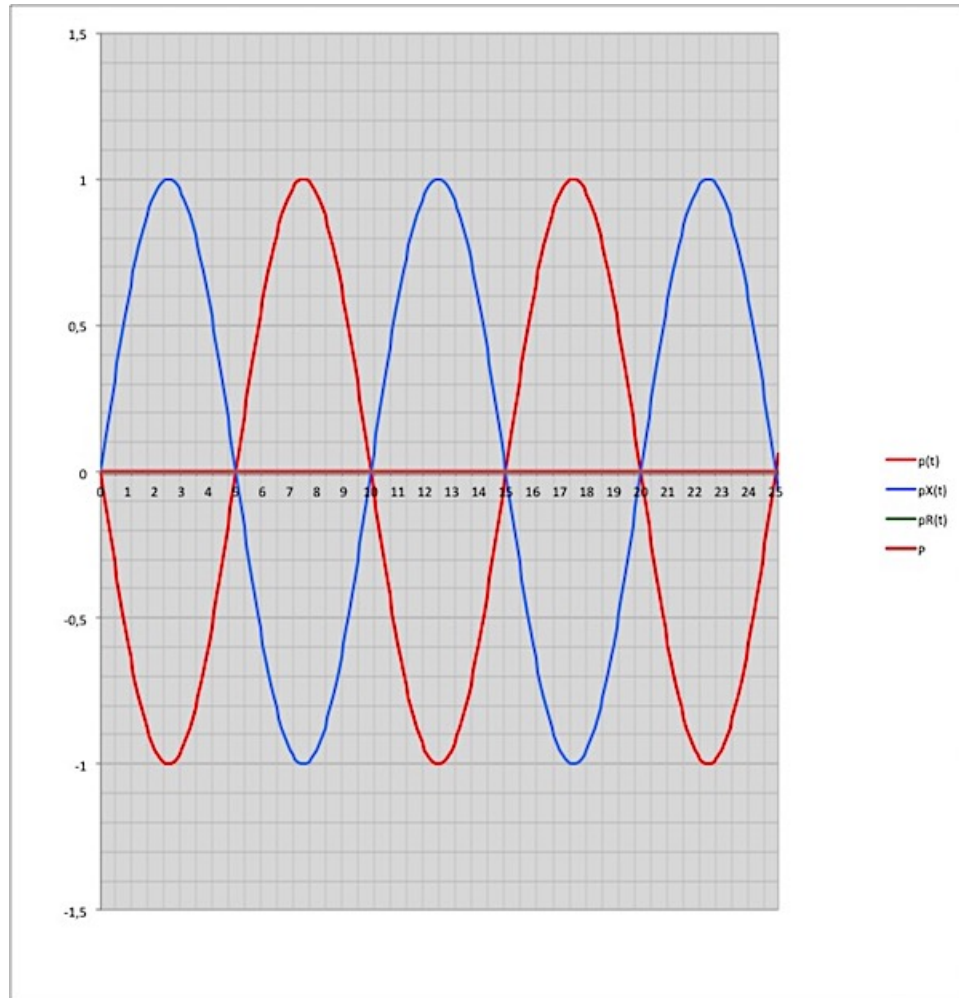


tensione e corrente in fase

Carico puramente induttivo

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow P = 0; Q = S$$

$$p(t) = -p_X(t) = -Q \sin 2\omega t$$

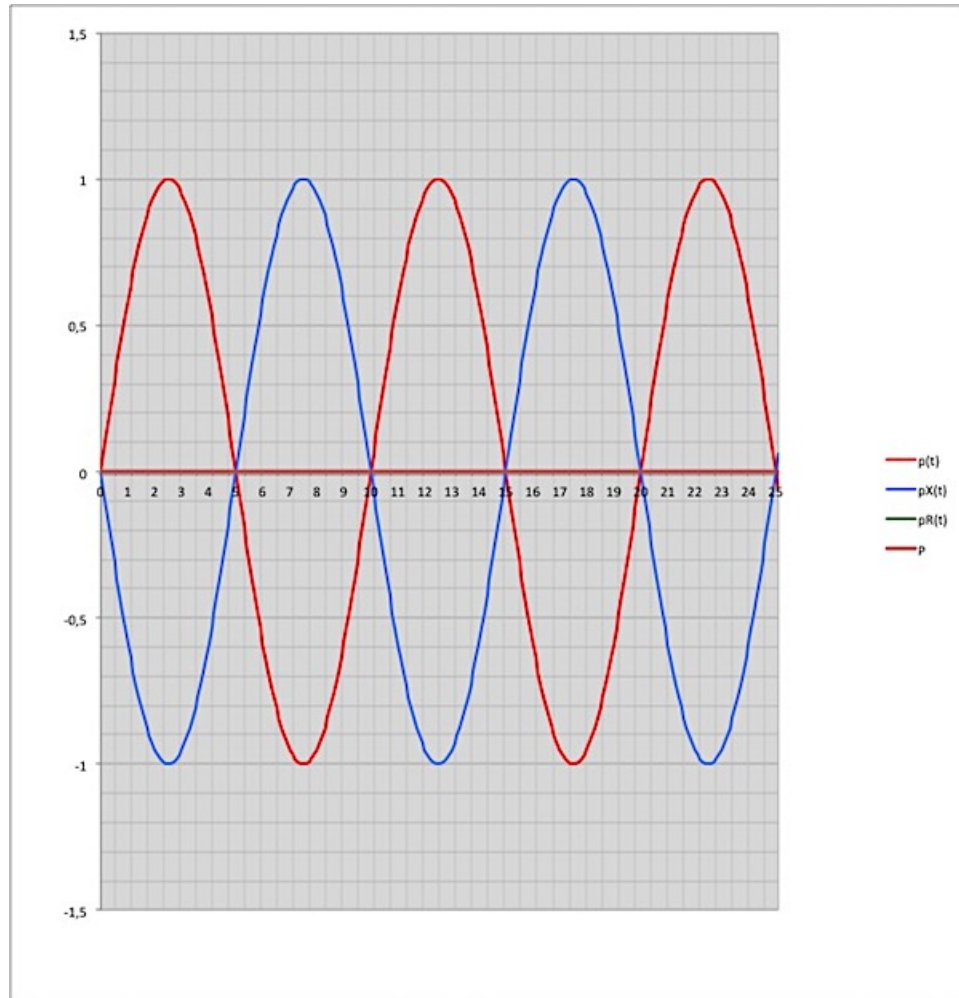


Corrente in quadratura di ritardo sulla tensione

Carico puramente capacitivo

$$\varphi = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow P = 0; Q = -S$$

$$p(t) = -p_X(t) = -Q \sin 2\omega t$$



Corrente in quadratura di anticipo sulla tensione

Potenza complessa

Come noto le grandezze sinusoidali sono trattate con i numeri complessi. Ad ogni sinusoidale è cioè associato un numero complesso che ha in genere modulo pari al valore efficace ed argomento pari alla fase. Tale numero complesso è chiamato fasore. La fase è una funzione del tempo per cui un fasore è in realtà un vettore rotante nel piano, ma tutti i fasori corrispondenti a sinusoidi della stessa frequenza ruotano alla stessa velocità angolare che è la pulsazione della sinusoidale. Ciò consente di svincolarsi dalla velocità di rotazione, quindi dalla frequenza, e di considerare la situazione fasoriale in un determinato istante, in genere l'istante zero. Se indichiamo con $\dot{U}$ e $\dot{I}$, rispettivamente i fasori di tensione e corrente,

si definisce potenza complessa l'espressione

$$\dot{S} = \dot{S} = \dot{U}I^* = P + jQ = S\angle\phi \quad [4]$$

dove con I^* è indicato il numero complesso coniugato del numero complesso che rappresenta il fasore $\dot{I}$

La necessità di considerare il complesso coniugato della corrente sta nel fatto di dover conservare per il segno della parte immaginaria di Q , lo stesso segno dell'argomento dell'impedenza del carico che l'assorbe. Infatti

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{Z} = \frac{U \angle \alpha}{Z \angle \varphi} = \frac{U}{Z} \angle \alpha - \varphi$$

$$I^* = \frac{U}{Z} \angle \varphi - \alpha$$

$$\dot{S} = \dot{U} I^* = U \angle \alpha \cdot \frac{U}{Z} \angle \varphi - \alpha = \frac{U^2}{Z} \angle \varphi = S \angle \varphi = S \cos \varphi + j S \sin \varphi = P + jQ$$

Nota: tenendo conto che l'argomento dei fasori tensione e corrente dipende dalla stessa velocità angolare ω , l'argomento del loro prodotto è funzione del doppio della loro velocità, cioè il fasore potenza complessa ruota nel piano al doppio della velocità angolare di tensione e corrente. Non è quindi rappresentabile sul loro stesso piano. Si era già visto comunque che la pulsazione della potenza è il doppio di quella di tensione e corrente.

Uso di S, P, Q

Progetto di linee

Quando si progetta una linea di trasmissione lo scopo è trasmettere all'utilizzatore l'energia attiva P

Il carico necessita pure di una certa potenza reattiva Q quindi, in definitiva di una certa potenza apparente S .

Il trasporto produce una caduta di tensione lungo la linea, caduta che deve essere contenuta entro determinati limiti per assicurare la corretta alimentazione all'arrivo e limitare le perdite in linea.

Considerando una linea trifase di resistenza r e reattanza x per unità di lunghezza, la caduta può essere calcolata con la formula approssimata

$$\Delta U \approx \sqrt{3} I l (r \cos \varphi + x \sin \varphi)$$

dove I è la corrente in linea, l la lunghezza della linea, $\cos \varphi$ il fattore di potenza del carico

Possiamo scriverla in questo modo, dopo aver posto $\{R_l\} = r l$, $\{X_l\} = x l$, che sono resistenza e reattanza totale della linea,

$$\frac{\Delta U}{U} \approx \frac{1}{U} \sqrt{3} I l (r \cos \varphi + x \sin \varphi)$$

quindi

$$\frac{\Delta U}{U} \approx \frac{S l}{U^2} (r \cos \varphi + x \sin \varphi) \quad [5]$$

dalla quale si vede che la caduta relativa di tensione dipende dal "momento di carico" $S l$ che possiamo considerare la prestazione richiesta alla linea e che, per limitarla adeguatamente si deve necessariamente usare una tensione elevata, in quanto diminuisce con il quadrato della stessa.

La caduta relativa possiamo anche scriverla in questo modo, dopo aver posto $R_l = rl$, $X_l = xl$, che sono resistenza e reattanza totale della linea

$$\begin{aligned}\Delta U &\approx \sqrt{3}I_l (R_l \cos \varphi + X_l \sin \varphi) \\ \frac{\Delta U}{U} &\approx \frac{1}{U} \sqrt{3}I_l (R_l \cos \varphi + X_l \sin \varphi) = \\ &= \frac{(R_l \sqrt{3}I_l U \cos \varphi + \sqrt{3}I_l U \sin \varphi X_l)}{U^2}\end{aligned}$$

quindi

$$\Delta U \approx \frac{R_l P + X_l Q}{U^2} \quad [6]$$

Assegnata la tensione U e la potenza P da trasferire, per limitare la caduta relativa si può intervenire su R , X e Q

La riduzione di R non si può spingere oltre un certo limite in quanto l'aumento di sezione che comporta diventa antieconomico. Inoltre in genere è $XQ > RP$ per cui conviene agire su X e su Q . La riduzione di X può ottenersi avvicinando i conduttori, ma più di tanto non si può per ragioni di isolamento. Inoltre l'intervallo dei valori di induttanza che si può ottenere per tutti i livelli di tensione è compreso tra 0,8 ed 1,3 mH/km.

X può essere ridotta con una compensazione serie, inserendo cioè in serie alla linea una capacità di reattanza X_c che si sottrae alla X per fornire la reattanza totale. E' un provvedimento da valutare attentamente perché in presenza di componenti armoniche può dar luogo a risonanze con elevate sovratensioni.

Si può infine minimizzare la Q e questa è la soluzione più efficace: è il cosiddetto rifasamento che si ottiene con banchi di condensatori in parallelo al carico. Essi in pratica forniscono localmente ai carichi parte o anche tutta della potenza reattiva induttiva di cui hanno bisogno, riducendo la potenza reattiva transitante in linea, cioè lo scambio della stessa tra generatore ed utilizzatore.

Teorema di Boucherot

Il teorema afferma che in una rete lineare alimentata da generatori sinusoidali, la somma delle potenze complesse di tutti i bipoli è nulla. Ciò significa che la somma delle potenze attive generate dai generatori è uguale alla somma delle potenze attive assorbite dagli utilizzatori attivi e passivi, il che corrisponde al principio di conservazione dell'energia. Inoltre anche la somma algebrica delle potenze reattive è nulla. Si ricorda che sono positive le potenze reattive assorbite dagli induttori, negative quelle assorbite dai condensatori.

Se ci riferiamo ad una sezione di linea bifilare indicando con P e Q le potenze attive e reattive che l'attraversano si può scrivere che esse sono uguali alla somma aritmetica delle potenze attive di tutti i bipoli a valle della sezione ed alla somma algebrica di tutte le loro potenze reattive.

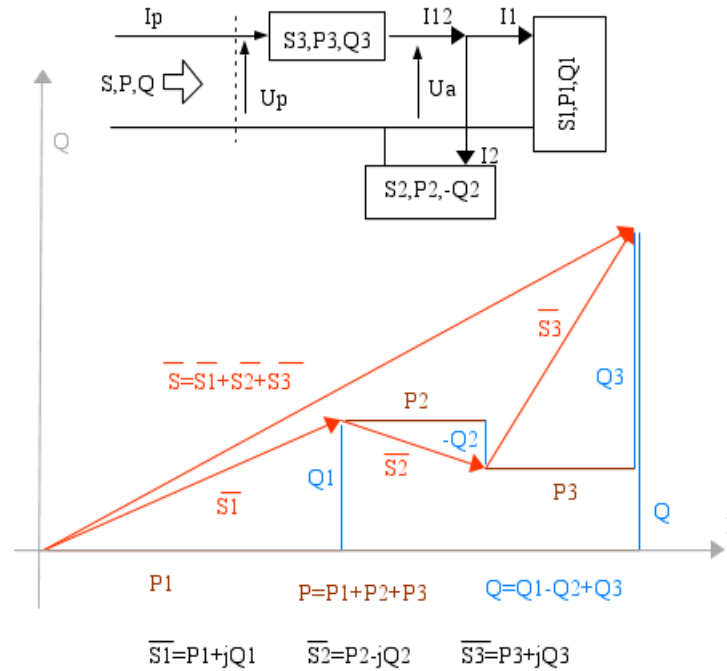
$$P = P_1 + P_2 + \dots + P_n$$

$$Q = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n$$

Per la potenze complesse occorre invece effettuare la **somma vettoriale**

$$\dot{S} = \dot{S}_1 + \dot{S}_2 + \dots + \dot{S}_n$$

E' un teorema molto comodo nell'analisi delle linee ed è noto come metodo delle potenze. Il metodo è di seguito mostrato sinteticamente graficamente ed analiticamente



$$I_1 = \frac{S_1}{U_a}$$

$$I_2 = \frac{S_2}{U_a}$$

$$S_{12} = \sqrt{(P_1 + P_2)^2 + (Q_1 - Q_2)^2}$$

$$I_{12} = \frac{S_{12}}{U_a}$$

$$P = P_1 + P_2 + P_3$$

$$Q = Q_1 - Q_2 + Q_3$$

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

$$I_p = I_{12}$$

$$U_p = \frac{S}{I_p}$$

Potenza in un sistema trifase simmetrico ed equilibrato

La simmetria delle tensioni implica che le tensioni stellate dei generatori siano

$$e_1(t) = E_M \sin \omega t$$

$e_2(t) = E_M \sin (\omega t - 120^\circ)$ l'equilibrio dei carichi comporta che le correnti siano

$$e_3(t) = E_M \sin (\omega t + 120^\circ)$$

$$i_1(t) = I_M \sin(\omega t - \varphi)$$

$$i_2(t) = I_M \sin(\omega t - 120^\circ - \varphi)$$

$$i_3(t) = I_M \sin(\omega t + 120^\circ - \varphi)$$

la potenza istantanea trifase è la somma delle potenze istantanee delle tre fasi per il principio di conservazione dell'energia

$p(t) = e_1 i_1 + e_2 i_2 + e_3 i_3$ Sostituendo ed eseguendo i calcoli sulla moltiplicazioni delle funzioni trigonometriche per ciascuna fase, analogamente a quanto fatto nel caso monofase, avremo

$$p(t) = E_M I_M \left(\sin \omega t \cdot \sin(\omega t - \varphi) + \sin(\omega t - 120^\circ) \cdot \sin(\omega t - 120^\circ - \varphi) + \sin(\omega t + 120^\circ) \cdot \sin(\omega t + 120^\circ - \varphi) \right) =$$

$$= \frac{E_M I_M}{2} \left[3 \cos \varphi - \left(\cos(2\omega t - \varphi) + \cos(2\omega t - 120^\circ - \varphi) + \cos(2\omega t + 120^\circ - \varphi) \right) \right]$$

Quindi, risultando nulla la somma dei tre termini entro parentesi tonda

$$p(t) = 3EI \cos \varphi = \sqrt{3}UI \cos \varphi = P$$

la potenza istantanea è dunque costante e si identifica quindi con la potenza media

Per potenza apparente e reattiva valgono le espressioni

$$S = 3EI = \sqrt{3}UI$$

$$Q = 3EI \sin \varphi = \sqrt{3}UI \sin \varphi$$

Usando queste espressioni nell'analisi di una linea trifase si può convenientemente far ricorso al metodo delle potenze in modo analogo a quanto visto per la linea monofase.

E : valore efficace della tensione stellata

U : valore efficace della tensione concatenata

I : valore efficace della corrente di linea

Conclusioni

Riporto la risposta che avevo inserito nel thread che ha dato origine a questo articolo

Non è che [S,P,Q,p] siano potenze di tipo diverso. La potenza elettrica è sempre il prodotto della tensione per l'intensità di corrente. Attiva, reattiva, apparente sono parametri che caratterizzano una potenza elettrica quando le due grandezze sono sinusoidali e le unità di misura che si usano hanno sempre la stessa dimensione fisica. (Tra l'altro c'è chi sostiene che non dovrebbe nemmeno esistere il var). La potenza complessa poi non è altro che un espediente matematico per considerare i tre parametri precedenti in modo compatto. Si tratta di parametri comodi nello studio, nella progettazione e nell'analisi dei circuiti. La potenza reattiva riguarda i bipoli che immagazzinano energia, cioè induttori e condensatori, ed è sempre all'interno del circuito elettrico; quella attiva è relativa ai bipoli che trasformano l'energia elettrica in energia di tipo diverso, energia che quindi esce dal circuito elettrico trasformandosi, ad esempio in calore, nei resistori. La potenza apparente è il parametro che serve per il dimensionamento dei componenti essendo legata unicamente ai valori efficaci di tensione e di corrente, che definiscono quale deve essere l'isolamento tra i conduttori e la loro sezione.

Riferimenti

- Impianti elettrici - Roberto Bennato, Lorenzo Fellin - Wolters Kluwer Italia - ed. 2011
- Elettrotecnica Generale - Giovanni Someda - Ed. Patron 1968
- [Caduta di tensione industriale](#)
- [Linee di trasmissione: costanti fondamentali](#)
- [Riferimento storico su teorema di Boucherot](#)

Estratto da "<http://www.electroyou.it/mediawiki/index.php?title=UsersPages:Admin:potenza-in-regime-sinusoidale>"