asdf

LA CONDUZIONE TERMICA

31 January 2012

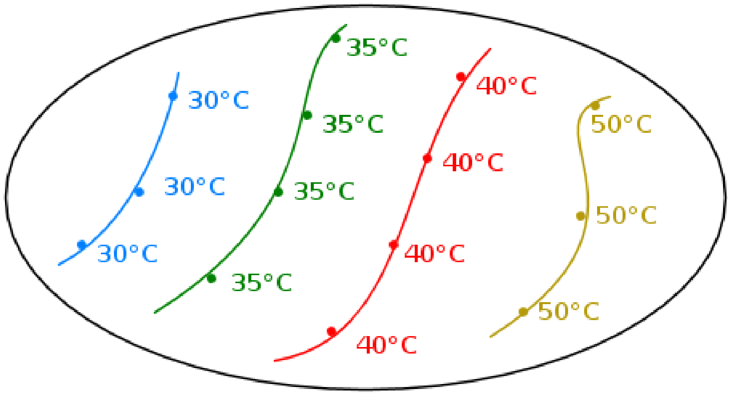
Premessa

Spinto dalla lettura dell'articolo **Analogia elettrotermica** di **admin**, con il seguente articolo ho voluto riordinare gli appunti presi a lezione un (bel) po' di tempo fa, con l'intento di trattare, limitatamente alle mie conoscenze, l'argomento della conduzione, sperando come sempre di mettere a disposizione degli utenti di ElectroYou una utile fonte di consultazione.
Buona lettura.

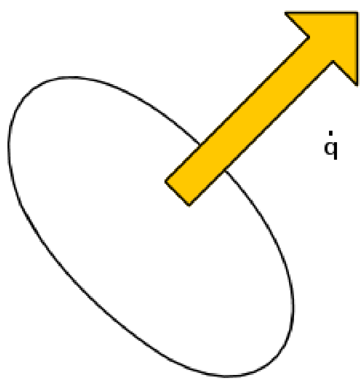
La conduzione

La **conduzione** rappresenta un meccanismo di trasmissione del calore che avviene all'interno di corpi in fase solida, liquida o gassosa senza un movimento apparente della materia. Il trasferimento avviene per mezzo della cessione di energia cinetica da parte di molecole poste nella zona a temperatura più elevata a molecole poste in una zona adiacente a temperatura più bassa.
Se si fa riferimento ai solidi metallici, al trasferimento di energia si aggiunge anche il moto degli elettroni liberi.

Consideriamo un corpo materialmente omogeneo ed isotropo in fase solida, liquida o gassosa e che sia in quiete rispetto ad una terna di riferimento inerziale, all'interno del quale siano presenti zone caratterizzate da temperature differenti.
All'interno del corpo esisteranno superfici, chiamate **superfici isoterme**,che sono luoghi di punti con la stessa temperatura; sono superfici che non verranno mai ad intersecarsi. Ci si aspetta quindi un trasferimento di energia in modalità calore secondo il meccanismo della **conduzione**, da una zona all'altra del corpo stesso.



In un punto generico del corpo definiamo il **flusso termico** $\dot{q}$ che è l'energia termica trasmessa per unità di tempo e per unità di superficie ed è misurato in $\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$ ed è valutabile con la legge che il francese **Jean Fourier** derivò sperimentalmente.
Egli arrivò a stabilire che il flusso termico non è altro che un vettore diretto in direzione ortogonale alla superficie isoterma che passa per quel determinato punto, nel verso delle temperature decrescenti ed avente modulo proporzionale al gradiente della temperatura nella medesima direzione.



Analiticamente parlando si ha:

$$\dot{q} = -k\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}n}$$

Se andiamo a scomporre il vettore lungo gli assi di un sistema cartesiano ortogonale, i cui versori siano $\overrightarrow{h}$, $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$, otteniamo:

$$\dot{q} = \overrightarrow{h}\,\dot{q}_x + \overrightarrow{i}\,\dot{q}_y + \overrightarrow{j}\,\dot{q}_z$$

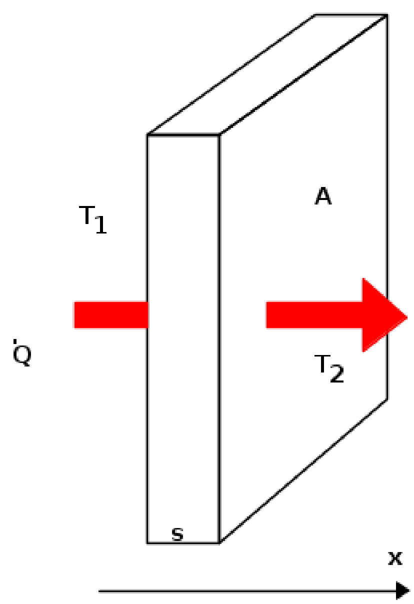
$$\dot{q}_x = -k\frac{\partial T}{\partial x}$$

$$\dot{q}_y = -k\frac{\partial T}{\partial y}$$

$$\dot{q}_z = -k\frac{\partial T}{\partial z}$$

Un caso particolare

Consideriamo la situazione specifica di una **parete piana** di materiale omogeneo, in cui lo spessore sia piccolo rispetto alle altre due dimensioni della parete, attraverso cui si vuole studiare la trasmissione del calore.



In ipotesi di **regime stazionario** (cioè, praticamente, tutte le grandezze in gioco restano immutate nel tempo) ed ipotizzando che le facce interna ed esterna siano isoterme e a diversa temperatura, si verifica che le isoterme sono superfici piane parallele alle face estreme della parete. Il flusso termico sarà in ogni punto

perpendicolare alla parete e la temperatura dipenderà da una sola coordinata spaziale, l'ascissa x nella situazione della figura sovrastante. Si parlerà così di **flusso monodimensionale**.
In tali condizioni, dalla legge di Fourier, si deduce che la potenza termica che attraversa una qualunque (superficie) isoterma della parete è:

$$\dot{Q} = \dot{q}A = -kA\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}$$

giacché sono nulle le componenti del flusso termico relativamente alla direzioni y e z.

Si arriva quindi a:

$$\dot{Q}dx = -kA\mathrm{d}T$$

che integrata con le **condizioni al contorno** che seguono:

$$T_1 = T(0), \quad T_2 = T(s)$$

diventa:

$$\int_0^s \dot{Q}dx = \int_{T_1}^{T_2} -kA\mathrm{d}T \quad .$$

Quindi al variare della posizione nella lastra la potenza termica rimane costante giacché l'energia interna è una grandezza conservativa e, in ipotesi già specificata di regime stazionario, non può essere accumulata. In caso di lastra piana anche l'area della superficie isoterma è costante e se risolviamo gli integrali prima scritti si ottiene:

$$\dot{Q}s = kA(T_1 - T_2)$$

che risolta rispetto a $\dot{Q}$ fornisce la seguente relazione:

$$\dot{Q} = kA\frac{(T_1 - T_2)}{s}$$

in cui:

- $\dot{Q}$ è la **potenza termica** che attraversa la lastra (misurata in W);
- A è l'**area della sezione normale al flusso termico** (misurata in m^2);
- s è lo **spessore della parete** (misurato in m;
- h è la **conducibilità termica** del materiale (misurata in W / mK);
- T_1 e T_2 sono le **temperature delle facce estreme della parete** (misurate in K).

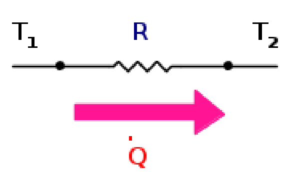
L'espressione ricavata prima può essere riscritta come:

$$\dot{Q} = \frac{T_1 - T_2}{R}$$

dove

$$R = \frac{s}{kA} \quad .$$

R è chiamata **resistenza termica conduttiva della parete piana** ed è uguale al rapporto tra lo spessore della parete e il prodotto della conducibilità termica del materiale che costituisce la parete per l'area della superficie di scambio.
Essa si misura in K / W o in $^\circ\mathrm{C}/\mathrm{W}$.
La potenza termica, così come è stata espressa, rimanda all'idea del sistema fisico come un **circuito** (analogia che richiameremo anche nel seguito della trattazione) costituito da una **resistenza**, s / kA, attraversata da una potenza termica, $\dot{Q}$, sotto una "**differenza di potenziale**" $(T_1 - T_2)$, come mostrato schematicamente nella figura che segue:



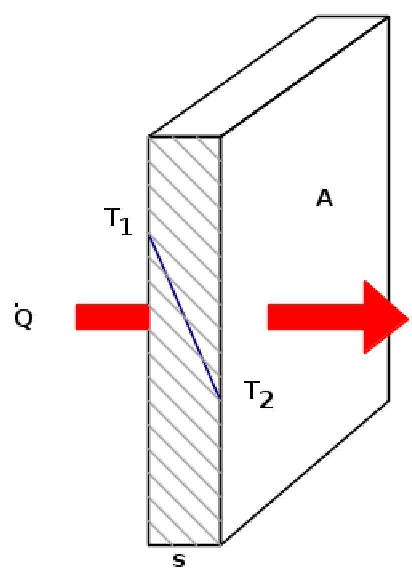
La relazione di Fourier per calcolare la potenza termica può essere intesa come "analoga" alla legge di Ohm che lega la corrente che attraversa una resistenza alla differenza di potenziale elettrico ai suoi capi. Va detto peraltro che, in generale, un materiale che è buon conduttore elettrico è anche un buon conduttore termico.

Una delle grandezze da cui dipende la resistenza termica del materiale costituente la lastra è la **conducibilità termica** del materiale, che è una proprietà del materiale e misura la capacità del materiale di condurre il calore.
I materiali con elevata conducibilità termica sono detti **conduttori** mentre gli **isolanti** presentano una bassa conducibilità termica.
Nella seguente tabella sono mostrati gli ordini di grandezza della conducibilità termica per alcune sostanze "note":

gas a pressione ambiente	$10^2 \div 10^{-1}$ W/mK
liquidi	$10^{-1} \div 10$ W/mK
solidi non metallici	$1 \div 10$ W/mK
solidi metallici	$10 \div 10^2$ W/mK

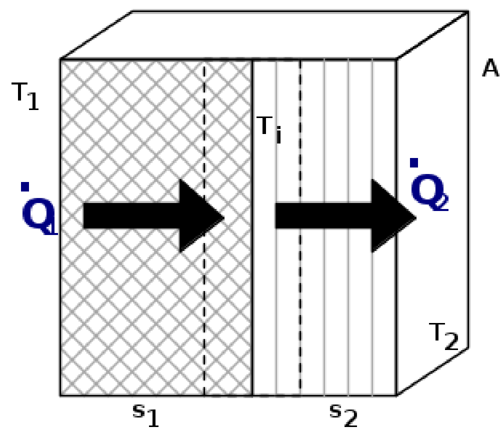
La conduzione in regime stazionario

Ci troviamo in regime stazionario.
Nel caso di una lastra piana, dalla costanza della potenza termica e delle temperature discende anche la costanza del flusso termico. Anche il gradiente di temperatura è costante e la temperatura varia quindi in maniera lineare nella parete.



Strati adiacenti

Consideriamo una parete composta (visibile nella figura sotto) da due strati adiacenti di materiali con spessori differenti s_1 e s_2 e con differenti conducibilità termiche k_1 e k_2.
T_1 e T_2 sono le temperature uniformi delle superfici estreme e T_i è la temperatura della superficie che separa i due strati, che è anch'essa isoterma.



Per quanto riguarda il primo strato:

$$\dot{Q}_1 = \frac{T_1 - T_i}{R_1}$$

dove

$$R_1 = \frac{s_1}{k_1 A} \quad .$$

Per quanto riguarda il secondo strato:

$$\dot{Q}_2 = \frac{T_i - T_2}{R_2}$$

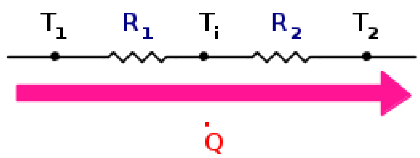
dove

$$R_2 = \frac{s_2}{k_2 A} \quad .$$

Da un bilancio di energia eseguito sul volume di controllo tratteggiato a cavallo della superficie di separazione tra i due strati si ha:

$$\dot{Q}_1 = \dot{Q}_2 = \dot{Q} \quad .$$

La **rete termica** relativa alla parete formata da due strati adiacenti di diverso materiale è costituita da due **resistenze termiche** R_1 e R_2 connesse **in serie** ai cui capi è applicata la "differenza di potenziale" che è ovviamente il salto di temperatura tra le facce esterne della parete, cioè $(T_1 - T_2)$.



Dalle relazioni relative a ciascuno dei due strati di materiale si ha:

$$T_1 - T_i = \dot{Q} R_1 \qquad T_i - T_2 = \dot{Q} R_2$$

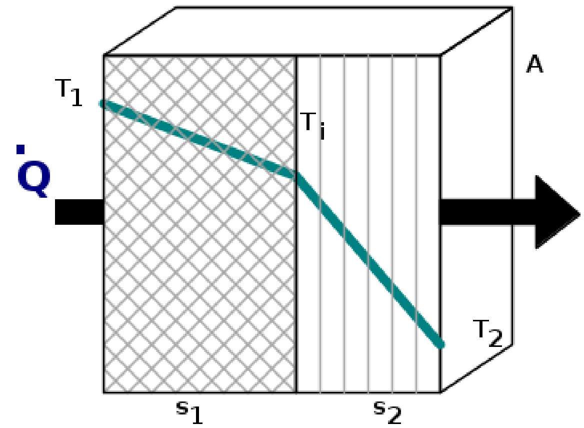
sommandole membro a membro si ha:

$$\dot{Q} = \frac{T_1 - T_2}{R_1 + R_2} = \frac{T_1 - T_2}{R}$$

dove

$$R = R_1 + R_2$$

L'**andamento** della temperatura in questa "tipologia" di parete è descritto da una linea spezzata, con pendenza maggiore nello strato con minore conducibilità termica.

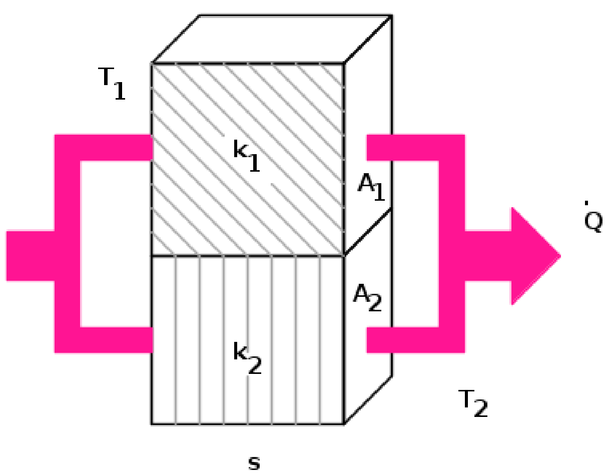


La temperatura all'interfaccia tra i due strati di materiale è fornita dalla relazione:

$$T_i = T_1 - \dot{Q}R_1 = T_2 + \dot{Q}R_2 \ .$$

Strati sovrapposti

Consideriamo ora una parete di spessore s che è composta stavolta da due strati sovrapposti di materiali con differente conducibilità termica k_1 e k_2 e siano T_1 e T_2 le temperature uniformi delle superfici estreme della parete A_1 e A_2.



Riferendoci al primo strato:

$$\dot{Q}_1 = \frac{T_1 - T_2}{R_1}, \qquad R_1 = \frac{s}{k_1 A_1} \quad .$$

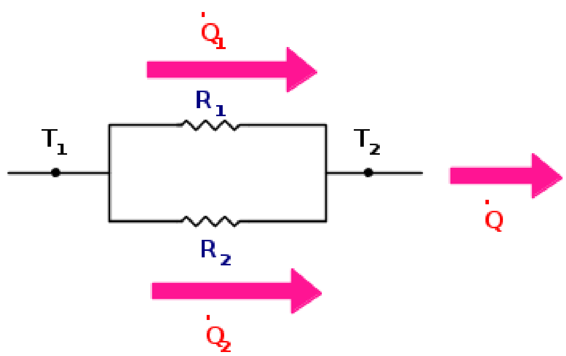
Riferendoci al secondo strato:

$$\dot{Q}_2 = \frac{T_1 - T_2}{R_2}, \qquad R_2 = \frac{s}{k_2 A_2} \quad .$$

Eseguendo un bilancio di energia sul volume di controllo a cavallo di una delle due facce la potenza termica che attraversa tutta la parete è somma delle potenze termiche che attraversano ciascuno strato che la compone:

$$\dot{Q} = \dot{Q}_1 + \dot{Q}_2$$

I due strati sono attraversati da potenze termiche diverse ma sono sottoposti a stessa differenza temperatura: in tal caso i due strati sono collegati **in parallelo**.



Se sommiamo le espressioni delle potenze termiche si ha:

$$\dot{Q} = \dot{Q}_1 + \dot{Q}_2 = (T_1 - T_2)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \quad .$$

Possiamo lavorare con la **conduttanza termica** U (misurata in W / K o $W/°C$), che è il reciproco della resistenza termica:

$$U = \frac{1}{R}$$

ottenendo:

$$\dot{Q} = (T_1 - T_2)(U_1 + U_2)$$

Bibliografia

Appunti di fisica tecnica.