



asdf

LE APPLICAZIONI LINEARI

28 January 2012

Lo scopo del seguente articolo è quello di effettuare un'introduzione alle applicazioni lineari. Il punto di partenza sono i tre articoli riguardanti [le matrici](#), [i sistemi di equazioni lineari](#) e [gli spazi vettoriali](#), sperando di essere chiaro e corretto nella trattazione e di offrire agli utenti un buon articolo (qualora dovessi aver fatto degli errori, me ne scuso, e vi chiedo in anticipo di segnalarmeli al fine di correggerli al più presto).

Buona lettura.

Dalle applicazioni...

Partiamo da due insiemi A e B . Se supponiamo che ad ogni elemento appartenente ad A sia assegnato un unico elemento appartenente a B , la "collezione" di queste assegnazioni è detta **applicazione** o **mappa** da A in B .

L'insieme A è detto **dominio** dell'applicazione mentre B è detto **codominio**.

La simbologia adottata per definire una applicazione f da A in B è la seguente:

$$f : A \rightarrow B$$

Si scriverà $f(a)$ e si leggerà f di a , riferendosi all'unico elemento di B che la funzione f assegna ad a appartenente ad A . E' quindi il valore di f in A o, alternativamente, l'**immagine** di a rispetto ad f .

Fatte chiare queste premesse iniziali, consideriamo ora un'applicazione $f : A \rightarrow B$. Se A' è un sottoinsieme qualsiasi di A , $f(A')$ è l'insieme delle immagini degli elementi appartenenti al sottoinsieme A' ; parimenti, se B' è un sottoinsieme di B , allora $f^{-1}(B')$ starà ad indicare l'insieme degli elementi di A le cui immagini sono appartenenti tutte a B' :

$$f(A') = \{f(a) : a \in A'\} \text{ e } f^{-1}(B') = \{a \in A : f(a) \in B'\}$$

Si dirà che $f(A')$ è l'immagine di A' , $f^{-1}(B')$ è l'immagine inversa, o anche preimmagine, di B' .

Più precisamente, l'insieme di tutte le immagini, cioè $f(A)$ è detto immagine o **range** di f .

Ad ogni applicazione $f : A \rightarrow B$ corrisponde il sottoinsieme $A \times B$ dato da $\{(a, f(a)) : a \in A\}$, detto anche **grafico** di f .

Due applicazioni $f : A \rightarrow B$ e $g : A \rightarrow B$ sono **uguali** se $f(a) = g(a)$ per ogni a appartenente ad A , se, in altre parole, hanno lo stesso grafico.

La negazione di $f = g$ si scrive $f \neq g$ e si esplica nell'enunciato che segue:

$$\text{esiste un elemento } a \in A \text{ tale che } f(a) \neq g(a)$$

Un esempio di applicazione

Sia V lo spazio vettoriale dei polinomi su R e sia $p(t) = 3t^2 - 5t + 2$.

La **derivata** definisce un'applicazione $D : V \rightarrow V$ in cui, per ogni polinomio $f \in V$, si ha $D(f) = df/dt$. Ad esempio:

$$D(3t^2 - 5t + 2) = 6t - 5$$

Applicazioni matriciali

Sia A una matrice qualsiasi $m \times n$ su un campo K . A definisce un'applicazione:

$$F_A : K^n \rightarrow K^m$$

nel seguente modo:

$$F_A(u) = Au$$

dove i vettori K^n e K^m sono scritti come colonne.

Per fare un esempio, supponiamo che :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 5 \\ 2 & 3 & -6 \end{bmatrix} e u = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \end{bmatrix}$$

si avrà allora che:

$$F_A(u) = Au = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 5 \\ 2 & 3 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -36 \\ 41 \end{bmatrix}$$

Composizione delle applicazioni

Consideriamo due applicazioni $f : A \rightarrow B$ e $g : B \rightarrow C$:

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

La **composizione** di f e g , indicata con $(g \circ f)$, è l'applicazione $g \circ f : A \rightarrow C$ definita da:

$$(g \circ f)(a) \equiv g(f(a))$$

Cioè, si applica prima f ad A e poi applichiamo g a $f(a) \in B$ in modo da ottenere $g(f(a))$.

La composizione di applicazioni soddisfa la **legge associativa**.

Siano:

$$f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C, h : C \rightarrow D$$

Allora:

$$(h \circ (g \circ f))(a) = h((g \circ f)(a)) = h(g(f(a)))$$

$$((h \circ g) \circ f)(a) = (h \circ g)(f(a)) = h(g(f(a)))$$

Perciò $(h \circ (g \circ f))(a) = ((h \circ g) \circ f)(a)$ per ogni a appartenente ad A , dunque $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Applicazioni iniettive e suriettive

Presentiamo ora, in via formale, alcuni tipi di applicazioni:

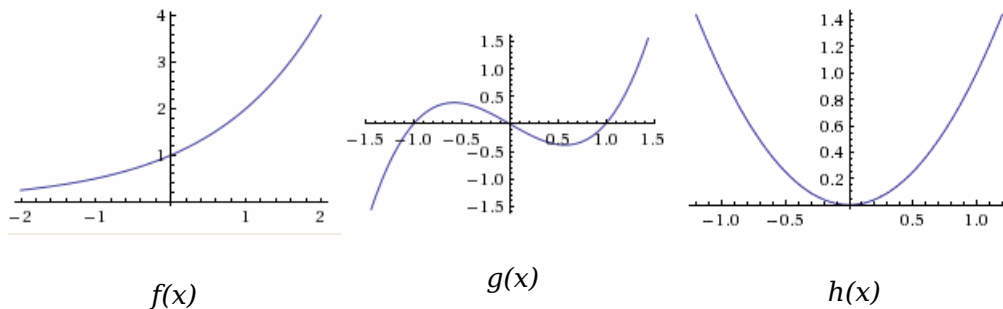
- un'applicazione $f : A \rightarrow B$ si dice **iniettiva** (o $1 - 1$) se elementi diversi di A hanno immagini diversi, cioè:
 1. se $a \neq a'$ implica $f(a) \neq f(a')$
 2. se $f(a) = f(a')$ implica $a = a'$
- un'applicazione $f : A \rightarrow B$ si dice **suriettiva** (f applica A su B) se ogni $b \in B$ è immagine di almeno un $a \in A$;
- un'applicazione $f : A \rightarrow B$ che è iniettiva e allo stesso tempo suriettiva è detta **biiettiva**.

Un'interpretazione geometrica

Abbiamo le tre funzioni $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definite da:

$$f(x) = 2^x, \quad g(x) = x^3 - x, \quad h(x) = x^2$$

i cui grafici (eseguiti con l'ausilio di [WolframAlpha](#)) sono rispettivamente i seguenti:



L'applicazione f è iniettiva: geometricamente significa che ogni retta orizzontale non contiene più di un punto di f .

L'applicazione g è suriettiva: geometricamente significa che ogni retta orizzontale contiene almeno un punto di g .

L'applicazione h non è né iniettiva né suriettiva: ad esempio 2 e -2 hanno la stessa immagine 4, mentre -16 non è immagine di alcun elemento di $\mathbb{R}$.

Applicazione identità ed inversa

Dato un insieme A non vuoto, l'applicazione $f : A \rightarrow A$ definita da $f(a) = a$, cioè, in altre parole, l'applicazione che ad ogni elemento di A associa se stesso, è definita come **applicazione identità**; è denotata con 1_A o 1 o con I .

Data invece $f : A \rightarrow B$, diciamo che $g : B \rightarrow A$ è l'**inversa** di f , indicata con f^{-1} , se:

$$f \circ g = 1_B \text{ e } g \circ f = 1_A$$

Va sottolineato che f ha una inversa **se e solo se** è una corrispondenza biunivoca tra A e B , cioè se f è sia iniettiva che suriettiva. Infine se $b \in B$, allora $f^{-1}(b) = a$, dove a è l'unico elemento di A tale che $f(a) = b$.

...alle applicazioni lineari

Partiamo con la seguente **definizione**.

Siano U e V degli spazi vettoriali sullo stesso campo K . Un'applicazione $F : V \rightarrow U$ sarà detta **applicazione lineare**, o **trasformazione lineare** se soddisfa le due condizioni:

1. per ogni vettore $v, w \in V$, $F(v + w) = F(v) + F(w)$;
2. per ogni scalare $k \in K$ e ogni vettore $v \in V$, $F(kv) = kF(v)$.

Quindi $F : V \rightarrow U$ è lineare se **conserva** le due operazioni fondamentali su uno spazio vettoriale, cioè somma vettoriale e moltiplicazione per uno scalare.

Da notare che se si sostituisce $k = 0$ nella condizione 2 prima citata, si ha $F(0) = 0$. Quindi: **un'applicazione lineare manda sempre il vettore zero nel vettore zero**.

Per qualunque scalare $a, b \in K$ ed ogni vettore $v, w \in V$ si ha:

$$F(av + bw) = F(av) + F(bw) = aF(v) + bF(w) .$$

Più in generale per ogni scalare $a_i \in K$ e ogni vettore $v_i \in V$ si può ottenere la **proprietà fondamentale** delle applicazioni lineari:

$$F(a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n) = a_1F(v_1) + a_2F(v_2) + \cdots + a_nF(v_n)$$

Un esempio di applicazione lineare

Consideriamo lo spazio vettoriale $V = P(t)$ dei polinomi sul campo reale R . Siano $u(t)$ e $v(t)$ polinomi qualsiasi in $P(t)$ e sia k uno scalare qualunque.

Sia $D : V \rightarrow V$ l'applicazione derivata. Si può provare che:

$$\frac{d(u+v)}{dt} = \frac{du}{dt} + \frac{dv}{dt} \text{ e } \frac{d(ku)}{dt} = k \frac{du}{dt}.$$

Quindi $D(u+v) = D(u) + D(v)$ e $D(ku) = kD(u)$: **l'applicazione derivata è lineare.**

Importante è il seguente **teorema**.

Dati due spazi vettoriali U e V su un campo K e siano $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ una base di V e $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ dei vettori qualsiasi (completamente arbitrari) in U .

Allora esiste un'unica applicazione lineare $F : v \rightarrow U$ tale che $F(v_1) = u_1, F(v_2) = u_2, \dots, F(v_n) = u_n$.

In sostanza questo teorema stabilisce che un'applicazione lineare è **completamente determinata dai suoi valori sugli elementi di una base**.

Le matrici intese come applicazioni lineari

Data una matrice $m \times n$ qualsiasi A . Ricordandoci del fatto che un'applicazione $F_A : K^n \rightarrow K^m$ come $F_A(u) = Au$ di K^n e che K^m sono scritti come vettori colonna, mostriamo che F_A è lineare:

$$F_A(v+w) = A(v+w) = Av + Aw = F_A(v) + F_A(w)$$

$$F_A(kv) = A(kv) = k(Av) = kF_A(v)$$

In altri termini, utilizzando A per indicare l'applicazione, abbiamo che

$$A(v + w) = Av + Aw \text{ e } A(kv) = k(Av)$$

Quindi l'applicazione matriciale A è **lineare**.

Isomorfismo tra spazi vettoriali

Dati due spazi vettoriali V ed U su K sono detti **isomorfi**, indicandoli come $V \cong U$, se esiste un'applicazione lineare biettiva $F : V \rightarrow U$. L'applicazione F è detta **isomorfismo** tra V ed U .

Dato uno spazio vettoriale V a dimensione n e data una base S di V , l'applicazione:

$$v \mapsto [v]_S$$

che manda ogni $v \in V$ nel suo vettore delle coordinate relativo alla base S è un isomorfismo tra V e K^n .

Nucleo ed immagine di un'applicazione lineare

Partiamo da due definizioni

Sia $F : V \rightarrow U$ un'applicazione lineare.

Il **nucleo** (o **kernel**) di F , lo si indica con $\ker F$, è l'insieme degli elementi in V , che sono mandati nel vettore 0 in U . Cioè:

$$\ker F = \{v \in V : F(v) = 0\}$$

L'**immagine** (o **range**) di F , la si indica con $\text{Im } F$, è l'insieme dei punti immagine in U . Cioè:

$$\text{Im } F = \{u \in U : \text{esiste } v \in V \text{ per il quale } F(v) = u\}$$

Enunciamo ora il seguente **teorema**.

Data una applicazione lineare $F : V \rightarrow U$, l'immagine di F è un sottospazio di U ed il nucleo di F è un sottospazio di V .

Inoltre, poniamo che i vettori $v_1, \dots, v_m$ generino uno spazio vettoriale V e, che la $F : V \rightarrow U$ sia lineare. Allora $F(v_1), F(v_2), \dots, F(v_m)$ genera $\text{Im } F$.

Nucleo ed immagine di un'applicazione lineare

Prendiamo ad esempio una matrice qualsiasi A 3×4 e sia la base canonica $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ di K^4 (scritta come colonne):

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{bmatrix} \quad e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A può essere intesa come un'applicazione lineare $A : K^4 \rightarrow K^3$, dove i vettori di K^4 e K^3 sono visti come vettori colonne. Ora, la base usuale di vettori genera K^4 e quindi le loro immagini Ae_1, Ae_2, Ae_3, Ae_4 generano l'immagine di A . Ma i vettori Ae_1, Ae_2, Ae_3, Ae_4 sono più precisamente le colonne di A :

$$Ae_1 = [a_1, b_1, c_1]^T, \quad Ae_2 = [a_2, b_2, c_2]^T, \quad Ae_3 = [a_3, b_3, c_3]^T, \quad Ae_4 = [a_4, b_4, c_4]^T$$

L'immagine di A , quindi, è lo spazio delle colonne di A .

Il nucleo di AA consiste in tutti i vettori v per i quali $Av = 0$. Ciò significa che il nucleo di A è lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo $AX = 0$, detto **spazio nullo** di A .

Enunciando formalmente ciò che è stato esposto finora, abbiamo quanto segue.

Data una matrice A $m \times n$ su un campo K vista come un'applicazione lineare $A : K^n \rightarrow K^m$. Si ha :

$$\ker A = \text{nullsp}(A) \text{ e } \text{Im } A = \text{col sp}(A)$$

Rango di un'applicazione lineare

Data un'applicazione lineare $F : V \rightarrow U$, il **rango** di F è definito come la dimensione della sua immagine:

$$\text{rango}(F) = \dim(\text{Im } F)$$

Infine enunciamo il seguente teorema: data una applicazione lineare $F : V \rightarrow U$ (V è di dimensioni finite). Allora:

$$\dim(V) = \dim(\ker F) + \dim(\text{Im } F)$$

Applicazioni ai sistemi di equazioni lineari

Sia $AX = B$ la forma matriciale di un sistema con m equazioni lineari e n incognite. La matrice A può essere vista come applicazione lineare:

$$A : K^n \rightarrow K^m$$

La soluzione dell'equazione $AX = B$ può essere vista come preimmagine del vettore $B \in K^m$ rispetto all'applicazione lineare A . La soluzione dell'equazione omogenea associata $AX = 0$ può essere vista come nucleo dell'applicazione lineare A .

In virtù del teorema enunciato prima:

$$\dim(\ker A) = \dim(\ker K^n) - \dim(\text{Im } A) = n - \text{rango}(A)$$

n , però, è esattamente il numero delle incognite del sistema omogeneo $AX = 0$.

Possiamo quindi enunciare il seguente **teorema**.

La dimensione dello spazio delle soluzioni W del sistema omogeneo di equazioni lineari $AX = 0$ è $s = n - r$ con n numero delle incognite e r rango della matrice dei coefficienti A .

Operazioni con le applicazioni lineari

Le applicazioni lineari sono combinabili in varie modalità e se ne possono ottenere delle nuove.

Supponiamo che ad esempio $F : V \rightarrow U$ e $G : V \rightarrow U$ siano delle applicazioni lineari su un campo K .

La somma $F + G$ e la moltiplicazione kF ($k \in K$) sono definite in questo modo (come applicazioni che vanno da V in U):

$$(F + G)(v) \equiv F(v) + G(v) \quad e \quad (kF)(v) \equiv kF(v)$$

Dimostriamo che se F e G sono lineari, anche $F + G$ e kF sono lineari. Per qualsiasi vettore $v, w \in V$ e qualsiasi scalare $a, b \in K$ si avrà:

$$\begin{aligned}
 (F + G)(av + bw) &= F(av + bw) + G(av + bw) \\
 &= aF(v) + bF(w) + aG(v) + bG(w) \\
 &= a(F(v) + G(v)) + b(F(w) + G(w)) \\
 &= a(F + G)(v) + b(F + G)(w) \\
 (kF)(av + bw) &= kF(av + bw) = k(aF(v) + bF(w)) \\
 &= akF(v) + bkF(w) = a(kF)(v) + b(kF)(w)
 \end{aligned}$$

Quindi $F + G$ e kF sono lineari.

E' valido inoltre il teorema che segue. Dati due spazi vettoriali V ed U su un campo K , la collezione di tutte le applicazioni lineari da V in U con le operazioni prima citate di addizione e moltiplicazione per uno scalare formano uno spazio vettoriale su K . Esso è denotato con:

$$\text{hom}(V, U)$$

ed è detto **omomorfismo**.

Composizione di applicazioni lineari

Dati tre spazi vettoriali V, U, W sullo stesso campo K e tre applicazioni lineari $F : V \rightarrow U$ e $G : U \rightarrow W$, possiamo rappresentare le applicazioni in questo modo:

$$V \xrightarrow{F} U \xrightarrow{G} W$$

La funzione composizione $G \circ F$ è l'applicazione da V in W , definita $(G \circ F)(v) = G(F(v))$.

Dimostriamo che $G \circ F$ è lineare se F e G sono anche lineari.

Si avrà che per ogni $v, w \in V$ e ogni scalare $a, b \in K$,

$$\begin{aligned}
 (G \circ F)(av + bw) &= G(F(av + bw)) = G(aF(v) + bF(w)) \\
 &= aG(F(v)) + bG(F(w)) = a(G \circ F)(v) + b(G \circ F)(w)
 \end{aligned}$$

cioè $G \circ F$ è lineare.

Bibliografia

Algebra lineare - Lipschutz, Lipson.

Estratto da "<http://www.electroyou.it/mediawiki/index.php?title=UsersPages:Asdf:le-applicazioni-lineari>"