



asdf

UN BREVE VIAGGIO ATTRAVERSO GLI SPAZI VETTORIALI

4 November 2011

Con questo articolo, stavolta, proviamo a compiere un "viaggetto" attraverso gli **spazi vettoriali**.

Come sempre avremo a che fare con un campo **K** al quale apparterranno i "nostri" scalari.

Definizione di spazio vettoriale

Consideriamo un insieme non vuoto **V** in cui siano **definite** due operazioni:

- **somma vettoriale**: essa associa ad ogni coppia di vettori **u, v** appartenenti a **V** la somma **u + v** in **V**;
- **moltiplicazione per uno scalare**: essa associa ad ogni vettore **u** appartenente a **V** e ad ogni scalare **k** appartenente a **K** il prodotto **ku** in **V**.

Ebbene **V** è detto **spazio vettoriale sul campo K** se valgono i seguenti assiomi, comunque vengano presi i vettori **u, v** e **w** appartenenti a **V**:

- $(u + v) + w = u + (v + w)$;
- in **V** esiste un vettore, detto **vettore nullo** (o **vettore zero**), indicato con **0**, per il quale vale la seguente relazione: $u + 0 = 0 + u = u$;
- in **V**, per ogni **u**, esiste un vettore indicato con **-u** e detto **opposto di u** tale che: $u + (-u) = (-u) + u = 0$;
- $u + v = v + u$;
- per ogni scalare **k** appartenente a **K**: $k(u + v) = ku + kv$;
- per ogni scalare **a, b**, appartenenti a **K**: $(a + b)u = au + bu$;
- per ogni scalare **a, b**, appartenenti a **K**: $(ab)u = a(bu)$;
- detta **1** l'**unità** di **K**: $1u = u$.

Risulta chiaro che **u, v** e **w** siano gli elementi dello spazio vettoriali, che chiameremo d'ora in poi **vettori**.

Gli assiomi citati nell'elenco di prima si dividono in due tipologie:

- i primi quattro hanno a che fare con la **struttura additiva** di **V** e possono essere riassunti affermando che **V** è un **gruppo commutativo** dal punto di vista dell'addizione;

- i restanti quattro hanno a che fare con l'**azione** di K su V .

Da questi ultimi derivano delle ulteriori semplici proprietà:

- per ogni scalare k appartenente a K e 0 appartenente a V , $k0 = 0$;
- per ogni 0 appartenente a K e per ogni vettore u appartenente a V , $0u = 0$;
- se $ku = 0$ con k appartenente a K e il vettore u appartenente a V , allora si ha che $k = 0$ oppure $u = 0$ (vettore nullo);
- per ogni scalare k appartenente a K e per ogni vettore u appartenente a V :
 $(-k)u = k(-u) = -ku$.

Qualche esempio di spazio vettoriale

Di seguito riportiamo alcuni esempi di spazi vettoriali.

Spazio K^n

Detto K un campo arbitrario, la notazione K^n indica l'insieme delle n -ple di elementi di K . K^n è uno spazio vettoriale su K e abbiamo utilizzato le seguenti operazioni:

- **somma vettoriale:**

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$$

- **moltiplicazione per uno scalare:**

$$k(a_1, a_2, \dots, a_n) = (ka_1, ka_2, \dots, ka_n)$$

Il vettore nullo è l' n -pla di zeri: $0 = (0, 0, \dots, 0)$.

L'opposto di un vettore è definito da:

$$-(a_1, a_2, \dots, a_n) = (-a_1, -a_2, \dots, -a_n)$$

Spazio polinomiale $P(t)$

Chiameremo $P(t)$ l'insieme di tutti i polinomi reali nella forma seguente:

$$p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_s t^s, \quad s = (1, 2, \dots)$$

dove i coefficienti $\mathbf{a}_i$ sono scalari appartenenti al campo K .

$\mathbf{P}(t)$ allora è uno spazio vettoriale su K , con le operazioni:

- **somma vettoriale:** $p(t) + q(t)$ è la operazione di somma di polinomi in $\mathbf{P}(t)$;
- **moltiplicazione per uno scalare:** $kp(t)$ è l'operazione già nota di prodotto per uno scalare k di un polinomio $p(t)$.

Si denota, in maniera analoga a quanto fatto prima, un **polinomio zero** denotato con $\mathbf{0}$.

Spazio matriciale $\mathbf{M}_{m,n}$

La notazione $\mathbf{M}_{m,n}$ denota l'insieme delle matrici $m \times n$ sul campo K arbitrario.

$\mathbf{M}_{m,n}$ è uno spazio vettoriale su K con le operazioni usuali di somma vettoriale e moltiplicazione per uno scalare.

Spazio delle funzioni $F(X)$

Detto X un insieme qualsiasi non vuoto e K un campo arbitrario. $F(X)$ è uno spazio vettoriale su K rispetto alle operazioni che seguono:

- **somma vettoriale:** consideriamo l'insieme $F(X)$ di tutte le funzioni da X a K . La somma di due funzioni $\mathbf{f}$ e $\mathbf{g}$ appartenenti ad $F(X)$, che è la funzione $\mathbf{f} + \mathbf{g}$ appartenente a $F(X)$, è definita da:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \text{ per ogni } x \text{ appartenente ad } X$$

- **moltiplicazione per uno scalare:** il prodotto di una funzione $\mathbf{f}$ appartenente ad $F(X)$ per uno scalare k appartenente a K è la funzione $\mathbf{kf}$ appartenente ad $F(X)$, così definita:

$$(kf)(x) = kf(x), \text{ per ogni } x \text{ appartenente ad } X$$

Il vettore zero in $f(x)$ è la funzione $\mathbf{0}$ che associa ad ogni x appartenente ad X lo scalare 0 (appartenente a K):

$$0(x) = 0.$$

Per ogni funzione f , è definita anche la funzione **-f** detta **opposto della funzione f** così definita:

$$(-f)(x) = -f(x), \text{ per ogni } x \text{ appartenente ad } X$$

Combinazioni lineari

Dato uno spazio vettoriale V su un campo K , un vettore v in V è una **combinazione lineare di vettori $u_1, u_2, \dots, u_n$** in V se esistono degli scalari **$a_1, a_2, \dots, a_n$** appartenenti a K tali che si abbia:

$$v = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n.$$

Oppure v è combinazione lineare dei vettori $u_1, u_2, \dots, u_n$ se esiste una soluzione dell'equazione che segue:

$$v = x_1 u_1 + x_2 u_2 + \dots + x_n u_n$$

dove gli $x_1, x_2, \dots, x_n$ sono scalari incogniti.

Sistemi span

Dato uno spazio vettoriale V su K . Si dice che i vettori $u_1, u_2, \dots, u_m$ appartenenti a V formano un **sistema span** di V se ogni vettore in V è combinazione lineare dei vettori $u_1, u_2, \dots, u_m$, cioè se si verifica la seguente relazione:

$$v = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_m u_m$$

dove $a_1, a_2, \dots, a_m$ sono scalari di K .

Sottospazio vettoriale

Consideriamo, come sempre, il nostro spazio vettoriale generico V sul campo K . Sia W un sottoinsieme di V . Diremo che W è un **sottospazio** di V se W è a sua volta uno spazio vettoriale su K rispetto alle operazioni (già viste) di somma vettoriale e moltiplicazione per uno scalare.

Un modo per verificare se W è sottospazio o meno consiste nel verificare gli otto assiomi enunciati per uno spazio vettoriale in principio di articolo.

Ad ogni modo di seguito sono elencati semplici criteri di riconoscimento di un sottospazio:

- il vettore zero appartiene a W ;
- per ogni u, v appartenenti a W e per ogni k appartenente a K : $u + v$ appartiene a W e ku appartiene a W .

L'ultima condizione espressa può essere "riassunta" nella seguente:

$$\text{per ogni } u, v \in W \text{ e per ogni } a, b \in K : au + bv \in W$$

Inoltre dato uno spazio vettoriale V , esso contiene due sottospazi detti **banali** che sono V stesso e il sottospazio contenente il solo vettore zero.

Intersezione di sottospazi vettoriali

Detti U e W due sottospazi di uno spazio vettoriale V . Vogliamo appurare che l'intersezione tra i due spazi vettoriali $U \cap W$ è ancora un sottospazio vettoriale di V . Iniziamo col dire che il vettore nullo (il vettore zero 0) appartiene sia a U che a W in quanto sono sottospazi vettoriali. Quindi il vettore nullo appartiene anche a $U \cap W$.

Supposto che u, v appartengano a $U \cap W$, allora u, v apparterranno sia a U che a W .

Inoltre essendo U e W sottospazi valgono per essi le proprietà:

$$\text{per ogni } u, v \in W \text{ e per ogni } a, b \in K : au + bv \in W \text{ e } au + bv \in U$$

quindi si ha: $au + bv \in U \cap W$.

Concludendo: $U \cap W$ è sottospazio di V .

Dipendenza ed indipendenza lineare

Dato uno spazio vettoriale V su un campo K , affermiamo che:

i vettori $v_1, v_2, \dots, v_m$ sono **linearmente dipendenti su K** se esistono degli scalari $a_1, a_2, \dots, a_m$ appartenenti a K non tutti nulli tali che:

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_m v_m = 0.$$

In caso contrario essi si dicono **linearmente indipendenti su K** .

Esempio 1

I seguenti vettori u, v e w :

$$u = (1, 1, 0), v = (1, 3, 2), w = (4, 9, 5)$$

sono linearmente dipendenti perchè:

$$3u + 5v - 2w = 3(1, 1, 0) + 5(1, 3, 2) - 2(4, 9, 5) = (0, 0, 0) = 0$$

perchè esistono degli scalari non tutti nulli (in questo caso essi sono 3, 5, -2) tali che la combinazione lineare di cui sopra sia pari a 0.

Esempio 2

I seguenti vettori invece sono linearmente indipendenti:

$$u = (1, 2, 3), v = (2, 5, 7), w = (1, 3, 5)$$

Infatti formiamo l'equazione vettoriale $xu + yv + zw = 0$, dove x, y e z sono degli scalari incogniti. Andando a svolgere:

$$x \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + y \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} + z \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

otteniamo che:

$$x = 0, y = 0, z = 0$$

In altre parole l'unica combinazione lineare che rispetti l'equazione vettoriale di cui sopra è a coefficienti tutti nulli, ergo i tre vettori sono linearmente indipendenti.

Base e dimensione

Diamo di **base** due definizioni equivalenti tra loro:

- **Definizione A:** un insieme di vettori $S = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ è detto **base** di V se valgono le due condizioni: **(1)** S è linearmente indipendente, **(2)** S è un sistema span per V ;
- **Definizione B:** un insieme di vettori $S = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ è detto **base** di V se ogni vettore v di V è combinazione lineare dei vettori della base in modo unico.

Importante è il seguente **teorema**:

dato uno spazio vettoriale V che ammette una base di m elementi e un'altra base di n elementi. Allora certamente $m = n$.

Uno spazio vettoriale V , se possiede una base di n elementi, si dice di **dimensione finita n** e si scrive : $\dim V = n$

Lo spazio vettoriale $S = \{0\}$, ha dimensioni 0 per definizione, mentre uno spazio vettoriale di dimensione non finita è detto di **dimensione infinita**.

Introduciamo anche il seguente **lemma**:

poniamo $V = \text{span}(v_1, v_2, \dots, v_n)$ e supponiamo che $\{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ sia linearmente indipendente. Allora $m \leq n$ e si ha:

$$V = \text{span}(w_1, \dots, w_m, v_{i_1}, \dots, v_{i_{n-m}})$$

quindi $n + 1$ o più vettori qualsiasi di V sono linearmente dipendenti.

Dimensione di un sottospazio

Sia W un sottospazio vettoriale di V che è n -dimensionale. Si ha che $\dim W \leq n$. Qualora invece si avesse $\dim W = n$, allora è chiaro che $W = V$.

Torniamo un momento alle matrici...

Data la matrice $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ di ordine $\mathbf{m} \times \mathbf{n}$ su un campo K , le righe di A : $R_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n})$, $R_2 = (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n})$, $\dots$, $R_m = (a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn})$ sono viste come vettori in K^n , generano in esso un sottospazio detto **spazio delle righe di A** e indicato con: $rowsp(A) = span(R_1, R_2, \dots, R_m)$.

Analogamente, quanto detto per le righe può essere detto per le colonne di A . Si parla di **spazio delle colonne di A** e si indica con $colsp(A)$.

Consideriamo, a titolo di esempio, la seguente matrice $\mathbf{A}$ in forma a scala, in cui sono stati messi in evidenza i pivot:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 5 & 6 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ebbene, un risultato importantissimo è il seguente: **le righe non zero di una matrice in forma a scala sono linearmente indipendenti.**

Possiamo quindi, sulla base di quanto detto finora, dare una definizione "nuova" di **rango**:

il rango di una matrice A è equivalente alla dimensione dello spazio delle righe di A o al numero massimo di righe linearmente indipendenti di A .

Bibliografia

"Algebra lineare" - Lipschutz, Lipson

Estratto da "<http://www.electroyou.it/mediawiki/index.php?title=UsersPages:Asdf:un-viaggio-attraverso-gli-spazi-vettoriali>"