



Carlo C (carlocc)

PENDOLI RISONANTI

31 October 2010

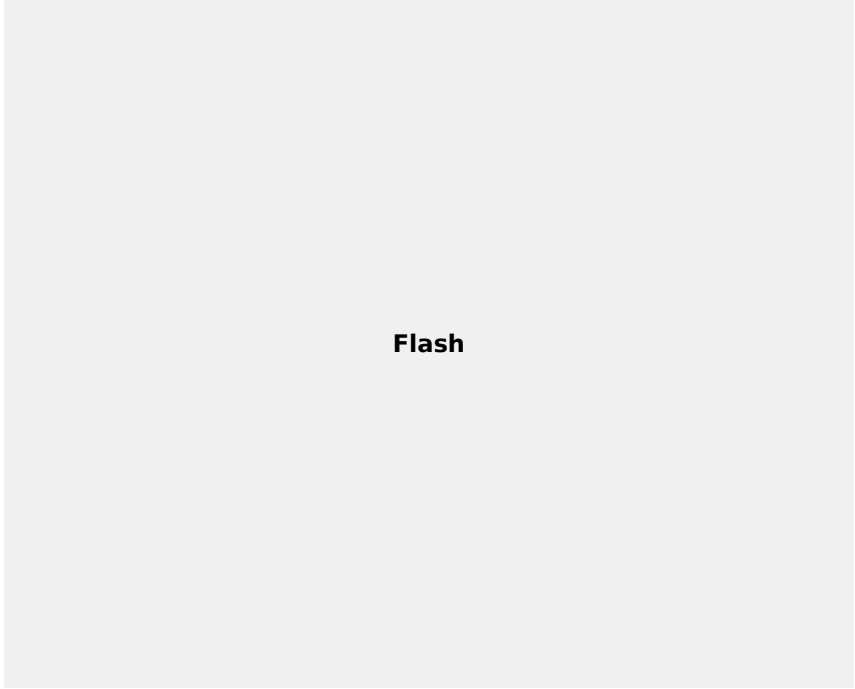
Antefatto

Era una notte buia e tempestosa -avrebbe scritto il braccio più famoso al mondo- invece no! Era un tiepido pomeriggio di settembre e stavo bighellonando in una di quelle "**fiere della scienza**" dove si illustrano piccoli esperimenti ad uso di bambini di tutte le età. Così tra un prisma ottico e una FFT su di un PC un esperimento attira la mia attenzione.

Due pendoli

Si tratta semplicemente di **due pendoli** uguali -leggi pezzetto di spago più un peso- sospesi insieme ad uno spago orizzontale. Così l'addetto lancia uno dei pendoli lasciando l'altro a riposo, naturalmente il primo comincia ad oscillare diminuendo pian piano di ampiezza mentre il secondo inizia a muoversi -ed io penso: ovvio lo spago orizzontale lavora come una molla di torsione e trasmette una coppia dal primo al secondo, alla fine oscilleranno tutti e due con la stessa ampiezza.

E invece no! Il primo pendolo diminuisce l'ampiezza delle oscillazioni fino a fermarsi ed in questo momento il secondo oscilla con l'ampiezza con cui era stato lanciato il primo -trascuriamo gli attriti-. Ora i ruoli si invertono, il primo ricomincia a muoversi ed il secondo a diminuire l'ampiezza...e via così.



Flash

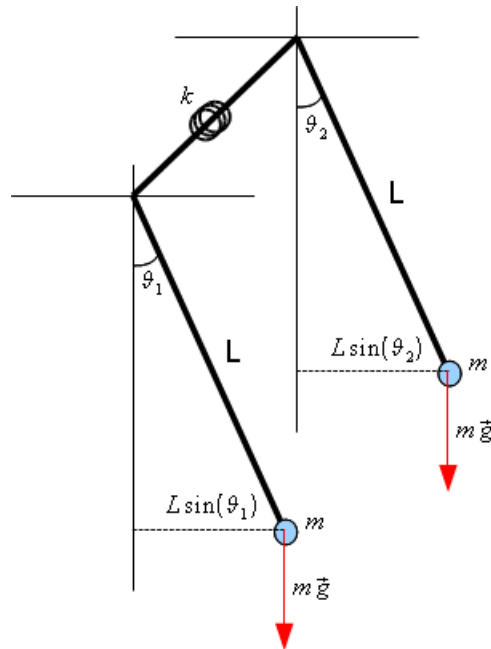
Try this at home! Così la sera stessa a casa "traffucando" con dello spago e due grossi bulloni sono riuscito ad ottenere lo stesso effetto. Si deve solo legare l'estremità superiore dei due fili dei pendoli al filo orizzontale e sperimentare un po' sulla distanza tra i due pendoli e la tensione del filo orizzontale.

Poi scatta la necessità di saperne di più....

Analisi dinamica

Modello del sistema

Due pendoli uguali formati da una massa puntiforme m , una barretta di massa zero lunga L e "connessi da una molla di torsione che trasmette una coppia proporzionale alla differenza di angolo cui è sottoposta. Lascero fuori gli attriti (come vedremo complicherebbero molto la vita).



p2.png

Si scrive il secondo principio di Newton, nella forma per moti rotativi, per il primo pendolo

$$\sum \tau = I \ddot{\vartheta}_1$$

dove $\sum \tau$ è la somma di tutti i momenti applicati, I è il momento di inerzia rispetto all'asse z uscente dal piano del foglio e $\ddot{\vartheta}_1$ è l'accelerazione angolare.

La somma dei momenti è data da (assumiamo positivi angoli, velocità e accelerazioni angolari uscenti dal foglio)

$$\sum \tau = -mgL \sin(\vartheta) + k(\vartheta_2 - \vartheta_1)$$

dove

- mg è la forza peso
- $L \sin(\vartheta_1)$ è il braccio di tale forza
- Il segno è giustamente negativo perchè si oppone allo spostamento che l'ha generata
- $k(\vartheta_2 - \vartheta_1)$ è la componente data dalla molla, positiva se $\vartheta_2 > \vartheta_1$

Nella "solita" ipotesi di pendolo oscillante con angolo "molto piccolo" linearizziamo il sistema

$$\vartheta_1 \approx 0 \quad \Rightarrow \quad \vartheta_1 \approx \sin(\vartheta_1)$$

e quindi

$$\sum \tau = -mgL\vartheta_1 + k(\vartheta_2 - \vartheta_1) = -(mgL + k)\vartheta_1 + k\vartheta_2$$

il momento di inerzia di una massa puntiforme distante L dal polo vale

$$I = mL^2$$

e sostituendo tutto si arriva a

$$-(mgL + k)\vartheta_1 + k\vartheta_2 = mL^2\ddot{\vartheta}_1$$

che riordinata e divisa per mL^2 diventa

$$\ddot{\vartheta}_1 + \left(\frac{g}{L} + \frac{k}{mL^2}\right)\vartheta_1 - \frac{k}{mL^2}\vartheta_2 = 0$$

si definiscono:

- $\omega^2 = \frac{g}{L}$ la pulsazione di un pendolo isolato (al quadrato)
- $h^2 = \frac{k}{mL^2}$ una costante che indica il "grado" di interazione tra i pendoli

ottenendo infine

$$\ddot{\vartheta}_1 + (\omega^2 + h^2)\vartheta_1 - h^2\vartheta_2 = 0$$

Procedendo in modo del tutto analogo per il secondo pendolo si ottiene (occhio al segno della coppia della molla!) un'equazione analoga, il sistema è quindi governato da:

$$\begin{cases} \ddot{\vartheta}_1 + (\omega^2 + h^2)\vartheta_1 - h^2\vartheta_2 = 0 \\ \ddot{\vartheta}_2 + (\omega^2 + h^2)\vartheta_2 - h^2\vartheta_1 = 0 \end{cases}$$

Integrazione dell'omogenea

Ricavando ad esempio ϑ_2 dalla prima, sostituendo nella seconda e riarrangiando un po' i termini si ottiene l'omogenea

$$\vartheta_1^{(4)} + 2(\omega^2 + h^2)\vartheta_1^{(2)} + (\omega^4 + 2h^2\omega^2)\vartheta_1 = 0$$

che ha equazione caratteristica

$$\lambda^4 + 2(\omega^2 + h^2)\lambda^2 + \omega^4 + 2h^2\omega^2 = 0$$

che è di quarto grado, ma mancando gli esponenti dispari si può risolvere semplicemente sostituendo $\Lambda = \lambda^2$ per ottenere

$$\Lambda^2 + 2(\omega^2 + h^2)\Lambda + \omega^4 + 2h^2\omega^2 = 0$$

Se avessimo considerato gli attriti avremmo avuto tutti gli esponenti.... con conseguenti corpose difficoltà! Tornando all'equazione di secondo grado:

$$\frac{\Delta}{4} = \omega^4 + 2h^2\omega^2 + h^4 - \omega^4 - 2h^2\omega^2 = h^4$$

$$\Lambda_0 = -\omega^2 - h^2 \pm h^2 = \begin{cases} -(\omega^2 + 2h^2) = -\Omega^2 \\ -\omega^2 \end{cases}$$

dove abbiamo definito Ω . Estraeendo poi le due radici abbiamo le quattro soluzioni

$$\lambda_0 = \begin{cases} \pm j\omega \\ \pm j\Omega \end{cases}$$

quindi considerato che ovviamente ricerchiamo soluzioni reali una forma di esprimere lo spazio delle soluzioni è:

$$\vartheta_1(t) = Ae^{j\omega t} + A^*e^{-j\omega t} + Be^{j\Omega t} + B^*e^{-j\Omega t} \text{ con } A, B \in \mathbb{C}$$

e dove l'apice asterisco indica il complesso coniugato.

Condizioni al contorno

Quarto ordine, due costanti complesse cioè due coppie di numeri da determinare, indubbiamente abbiamo bisogno di quattro condizioni. Per $t=0$ lo stato del sistema è noto quindi:

$$\vartheta_1(0) = \vartheta_0 \text{ angolo iniziale da cui lascio partire il primo pendolo.}$$

$$\vartheta_1^{(1)}(0) = 0 \text{ velocità iniziale, parte da fermo.}$$

$$\vartheta_1^{(2)}(0) = -(\omega^2 + h^2)\vartheta_0 \text{ accelerazione iniziale, nell'ipotesi che il secondo pendolo sia verticale a riposo.}$$

$$\vartheta_1^{(3)}(0) = 0 \text{ in } t=0 \text{ l'accelerazione non varia, comincia subito dopo.}$$

Quindi mi servono le prime tre derivate di $\vartheta_1(t)$

$$\vartheta_1^{(1)}(t) = j\omega Ae^{j\omega t} - j\omega A^*e^{-j\omega t} + j\Omega Be^{j\Omega t} - j\Omega B^*e^{-j\Omega t}$$

$$\vartheta_1^{(2)}(t) = -\omega^2 Ae^{j\omega t} - \omega^2 A^*e^{-j\omega t} - \Omega^2 Be^{j\Omega t} - \Omega^2 B^*e^{-j\Omega t}$$

$$\vartheta_1^{(3)}(t) = -j\omega^3 Ae^{j\omega t} + j\omega^3 A^*e^{-j\omega t} - j\Omega^3 Be^{j\Omega t} + j\Omega^3 B^*e^{-j\Omega t}$$

a dato che in $t=0$ tutti gli esponenziali valgono 1 posso scrivere il sistema di quattro equazioni

$$\begin{cases} A + A^* + B + B^* = \vartheta_0 \\ j\omega A - j\omega A^* + j\Omega B - j\Omega B^* = 0 \\ -\omega^2 A - \omega^2 A^* - \Omega^2 B - \Omega^2 B^* = -(\omega^2 + h^2)\vartheta_0 \\ -j\omega^3 A + j\omega^3 A^* - j\Omega^3 B + j\Omega^3 B^* = 0 \end{cases}$$

che semplificato diventa

$$\begin{cases} 2\Re(A) + 2\Re(B) = \vartheta_0 \\ -2\omega\Im(A) - 2\Omega\Im(B) = 0 \\ 2\omega^2\Re(A) + 2\Omega^2\Re(B) = (\omega^2 + h^2)\vartheta_0 \\ 2\omega^3\Im(A) + 2\Omega^3\Im(B) = 0 \end{cases}$$

in effetti si nota che sono due sistemi indipendenti uno sulle parti reali dei coefficienti, l'altro sulle immaginarie ciascuno di due equazioni in due incognite: La prima e la terza

$$\begin{cases} 2\Re(A) + 2\Re(B) = \vartheta_0 \\ 2\omega^2\Re(A) + 2\Omega^2\Re(B) = (\omega^2 + h^2)\vartheta_0 \end{cases}$$

$$\text{risolte ci danno } \Re(A) = \Re(B) = \frac{\vartheta_0}{4}$$

La seconda e la quarta invece formano un sistema omogeneo -la colonna dei termini noti vale 0- e se $\omega \neq 0$ e $\Omega \neq 0$ linearmente indipendente -se una pulsazione fosse zero non si muoverebbe nessun pendolo- e quindi l'unica soluzione è $\Im(A) = \Im(B) = 0$

E sostituendo nella soluzione dell'omogenea otteniamo (finalmente)

$$\vartheta_1(t) = \frac{\vartheta_0}{4}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}) + \frac{\vartheta_0}{4}(e^{j\Omega t} + e^{-j\Omega t}) = \frac{\vartheta_0}{2}(\cos(\omega t) + \cos(\Omega t))$$

Secondo pendolo

Sostituendo l'espressione dell'angolo del primo pendolo appena calcolata nel sistema di equazioni differenziali impostato all'inizio si ricava anche l'espressione per il secondo pendolo.

Riassumendo i risultati:

$$\vartheta_1(t) = \frac{\vartheta_0}{2} \cos(\omega t) + \frac{\vartheta_0}{2} \cos(\Omega t)$$

$$\vartheta_2(t) = \frac{\vartheta_0}{2} \cos(\omega t) - \frac{\vartheta_0}{2} \cos(\Omega t)$$

$$\text{con } \omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \quad \Omega = \sqrt{\omega^2 + 2h^2} \quad h^2 = \frac{k}{mL^2}$$

Analisi dei risultati

Angoli

Ciascuno dei due pendoli si muove con un angolo che è la somma di due moti armonici di pulsazione diversa, vediamo di chiarire cosa significa. Esprimo il risultato come somma di esponenziali complessi, come si fa per le grandezze elettriche a regime sinusoidale permanente, per evidenziare ampiezza, pulsazione e fase dell'oscillazione risultante.

Per il primo pendolo si ha che

$$\vartheta_1(t) = \frac{\vartheta_0}{2} \Re \left(e^{j\omega t} + e^{j\Omega t} \right) = \frac{\vartheta_0}{2} \Re \left(e^{j\frac{\omega+\Omega}{2}t} \left(e^{-j\frac{\Omega-\omega}{2}t} + e^{j\frac{\Omega-\omega}{2}t} \right) \right)$$

$$\text{e definendo } \omega_0 = \frac{\Omega + \omega}{2} \quad \text{e} \quad \sigma = \frac{\Omega - \omega}{2}$$

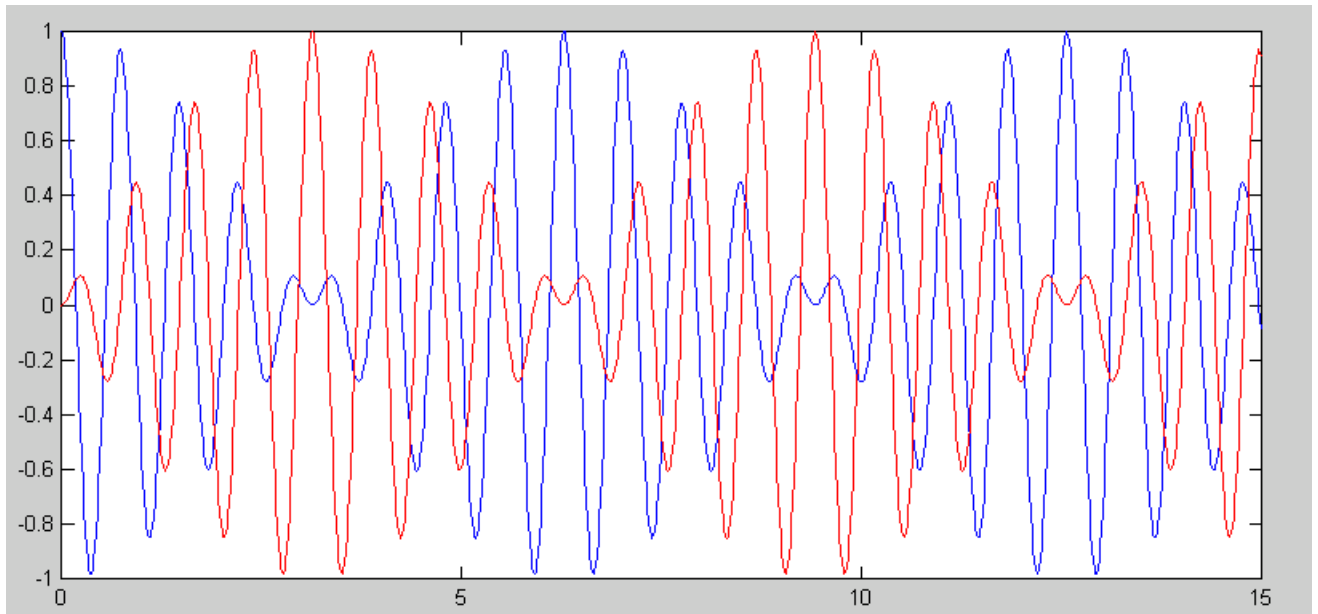
$$\vartheta_1(t) = \frac{\vartheta_0}{2} \Re \left(e^{j\omega_0 t} (e^{-j\sigma t} + e^{j\sigma t}) \right) = \vartheta_0 \cos(\omega_0 t) \cos(\sigma t)$$

In definitiva si tratta di un moto armonico di pulsazione ω_0 il cui inviluppo -valore massimo- varia come $\cos(\sigma t)$.

Analogamente per il secondo pendolo si arriva a

$$\vartheta_2(t) = \vartheta_0 \sin(\omega_0 t) \sin(\sigma t)$$

Riportando questi risultati su di un grafico otteniamo:



pg1.PNG

(In blu il pendolo che parte da ϑ_0 , in rosso l'altro, unità arbitrarie)

Notiamo l'effetto approssimativamente prodotto nel video, il pendolo lanciato diminuisce l'ampiezza delle oscillazioni fino a fermarsi, l'altro inizia ad oscillare sempre più ampiamente, poi i ruoli si invertono. Si nota anche "l'inversione di fase" che avviene quando un pendolo si ferma e poi riparte, cosa che verifica l'involuppo sinusoidale delle oscillazioni.

Coppia della molla

E' interessante fare la differenza tra gli angoli dei due pendoli, in fondo questa grandezza è l'ingresso" del sistema molla che governa l'interazione dei pendoli:

$$\vartheta_2 - \vartheta_1 = -\vartheta_0 \cos(\Omega t)$$

Notiamo che la molla è sottoposta ad un angolo che varia sinusoidalmente, con ampiezza costante e pulsazione $\Omega \neq \omega_0$ diversa da quella di oscillazione dei pendoli.

Le coppie elastiche applicate ad i due pendoli sono ovviamente proporzionali secondo la costante della molla e di segno opposto:

$$\tau_{m1} = -\tau_{m2} = -k\vartheta_0 \cos(\Omega t)$$

L'ampiezza costante dell'oscillazione di queste coppie rende poco evidente come possa indurre lo scambio di energia tra i due pendoli, in fondo in questa relazione non c'è un termine tipo σT che richiama l'involuppo delle oscillazioni dei pendoli.

La chiave di lettura sta nella differente velocità angolare del moto dei pendoli rispetto al coppia della molla.

In effetti si potrebbe integrare la coppia della molla ottenendo, per il teorema dell'impulso, la variazione di momento angolare.

Eseguendo questa operazione su di un multiplo intero del periodo di oscillazione dei pendoli si ha l'effetto di "filtrare" le variazioni istantanee ed ottenere solo l'involuppo.

Definendo $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ il periodo di oscillazione dei pendoli: si avrebbe che ,ad esempio per il primo, la variazione alla fine dell'n-esimo periodo vale:

$$\Delta L_1(n) = \int_0^{nT_0} \tau_{m1} dt = -k\vartheta_0 \int_0^{nT_0} \cos(\Omega t) dt = -\frac{k\vartheta_0}{\Omega} [\sin(\Omega t)]_0^{nT_0}$$

cioè esplicitando $\Omega = \omega_0 + \sigma$:

$$\Delta L_1(n) = -\frac{k\vartheta_0}{\Omega} \sin(n\omega_0 T_0 + n\sigma T_0) = -\frac{k\vartheta_0}{\Omega} \sin(n\sigma T_0)$$

dove si è considerato che $n\omega_0 T_0 = n2\pi$ è ininfluente:

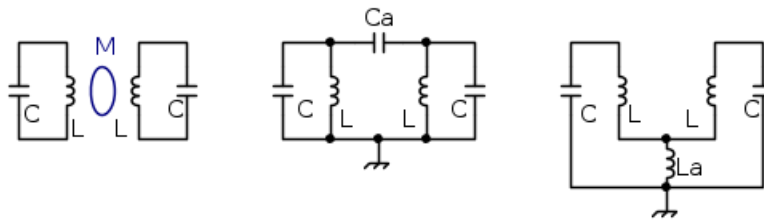
forzando un po' (ipotesi $\sigma \ll \omega_0$), si può ritornare nel dominio della variabile continua t considerando che $n = \frac{t}{T_0}$ per ottenere infine:

$$\Delta L_1 = -\frac{k\vartheta_0}{\Omega} \sin(\sigma t)$$

dove riconosciamo il termine σt che governa l'involuppo delle oscillazioni dei pendoli.

Conclusioni

Pendoli? Ho detto pendoli? ...avrei potuto dire circuiti risonanti e non sarebbe cambiato nulla! In effetti l'analogia con due circuiti risonanti LC mutuamente accoppiati è evidente:



Analizzando uno qualsiasi dei circuiti qui sopra si otterrebbero equazioni del tutto simili a quelle ottenute per i pendoli, infatti nei quattro casi si hanno due sistemi del secondo ordine interagenti in maniera non dissipativa.

Ed infine perchè non fare invece una simulazione? Beh, abbiamo fatto di più, abbiamo fatto l'esperimento! E perchè secondo me un'analisi matematica mostra più chiaramente i fenomeni che regolano il sistema e mette in evidenza cose che forse potrebbero passare inosservate ad esempio in un grafico SciLab.

Questo vuole essere niente più di un esercizio di fisica ad uso e consumo di chi come me trova piacevole investire tempo e fatica in queste cose squisitamente inutili.

La simulazione è molto utile quando si ha ad esempio un problema pratico da

risolvere velocemente o quando la mole dei calcoli da eseguire sconsiglia vivamente l'approccio manuale e diventa indispensabile per quei problemi in cui l'integrazione numerica è l'unica via possibile. Comunque come più volte ricordato sui forum è indispensabile una preparazione di base che permetta di leggerne criticamente i risultati, sapere cosa inserire e cosa attendersi.

Estratto da "<http://www.electroyou.it/mediawiki/index.php?title=UsersPages:Carloc:pendoli-risonanti>"