



Nicola Chiodetto (Chiodo)

MISTERIOSA MOLTIPLICAZIONE DI COSENI

28 October 2012

Introduzione

Questo articolo si pone in continuità con il precedente: <http://www.electroyou.it/chiodo/wiki/misteriosa-moltiplicazione-di-seni>. Il primo trattava la cosiddetta *equazione ciclotomica*; questo tratterà la sua sorella duale: *l'equazione co-ciclotomica*. Ringrazio PietroBaima perchè mi ha invogliato a cimentarmi nella dimostrazione di cui mi ha dato conferma della validità.

Identità

Mentre l'equazione ciclotomica involveva un'identità contenente una produttoria di seni qui si passa ad una produttoria di coseni. Ricordiamo che l'equazione ciclotomica è l'equazione che si deve risolvere per cercare le radici n-sime dell'unità. Si tratta di risolvere l'equazione $z^n - 1 = 0$. Per un accenno si può fare riferimento a http://it.wikipedia.org/wiki/Equazione_ciclotomica.

L'intento è quindi di risolvere la seguente:
$$\prod_{k=1}^{n-1} 2 \cos \left(\frac{k\pi}{n} \right) = \sin \left(\frac{n\pi}{2} \right).$$

Dimostrazione

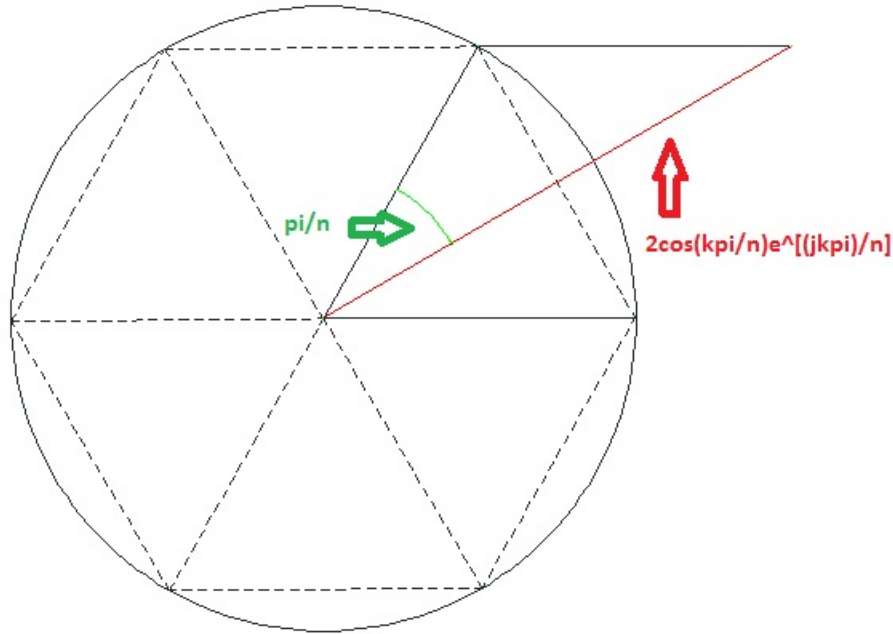
Osserviamo la produttoria di sinistra e otteniamo che la funzione coseno può essere definita in campo complesso come:

$$\cos \left(\frac{k\pi}{n} \right) = \frac{e^{j \frac{k\pi}{n}} + e^{-j \frac{k\pi}{n}}}{2}.$$

La produttoria si riscrive come:

$$\prod_{k=1}^{n-1} \frac{e^{j \frac{2k\pi}{n}} + 1}{e^{j \frac{k\pi}{n}}}.$$

Ora osserviamo la seguente figura (si tratta della somma dei due numeri complessi $e^{j \frac{2k\pi}{n}} + 1$):



Co-ciclotomica1.jpg

Si ottiene quindi:

$$\prod_{k=1}^{n-1} 2 \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) e^{j\frac{k\pi}{n}} = \prod_{k=1}^{n-1} e^{j\frac{2k\pi}{n}} + 1.$$

Passiamo tramite il limite già visto nell'articolo precedente che descrive le soluzioni della seguente: $z^n + 1 = 0$

$$\prod_{k=1}^{n-1} e^{j\frac{2k\pi}{n}} + 1 = \lim_{z \rightarrow 1} \prod_{k=1}^{n-1} e^{j\frac{2k\pi}{n}} + z = \lim_{z \rightarrow 1} z^n + 1 = 2.$$

Ora possiamo notare che la produttoria iniziale per n pari è nulla in quanto esisterà sempre un fattore trigonometrico $\cos$ che possiederà argomento multiplo di $\frac{\pi}{2}$.

Per questo ci concentriamo solo sui termini n dispari.

Abbiamo dimostrato che:

$$\prod_{k=1}^{n-1} 2 \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) e^{j\frac{k\pi}{n}} = \prod_{k=1}^{n-1} e^{j\frac{2k\pi}{n}} + 1 = 2.$$

Estraendo il termine $e^{j\frac{k\pi}{n}}$:

$$\prod_{k=1}^{n-1} 2 \cos \left(\frac{k\pi}{n} \right) = \frac{2}{e^{j \frac{k\pi}{n}}} = \frac{2}{j^{n-1}}.$$

In quanto vale:

$$e^{\frac{j\pi(1+2+\dots+n-1)}{n}}; \quad S_n = \frac{n(n+1)}{2}; \quad S_{n-1} = \frac{(n-1)(n)}{2}.$$

Quindi: $e^{\frac{j\pi(n-1)}{2}} = j^{n-1}.$

Ora c'è un 2 di troppo per far tornare i conti! Siccome si tratta di numeri dispari (abbiamo già escluso i numeri pari n) si deve estrarre dalla produttoria (non l'abbiamo ancora fatto) il termine con $n = 1$ ovvero rappresentante di $(z + 1)$ che comporta un fattore pari a $2\cos(0) = 2$. Estratto questo 2 si semplificherebbe con il 2 al secondo membro dell'identità raggiunta in precedenza e resterebbe solo: $\frac{1}{j^{n-1}}.$

Con n dispari $n = 1, 3, 5, \dots$ esso è pari proprio a $\sin \left(\frac{n\pi}{2} \right).$

C.v.d.

Conclusioni

E' stato bello cimentarsi in questa ulteriore piccola dimostrazione. Vi auguro ancora di apprezzare sempre la matematica!

Estratto da "<http://www.electroyou.it/mediawiki/index.php?title=UsersPages:Chiodo:misteriosa-moltiplicazione-di-coseni>"