



Nicola Chiodetto (Chiodo)

MISTERIOSA MOLTIPLICAZIONE DI SENI

1 October 2012

Introduzione

Durante il corso di impianti elettrici del terzo anno mi sono imbattuto in una **identità matematica notevole** alquanto bizzarra, necessaria per il calcolo dell'induttanza chilometrica di una linea elettrica. Le spiegazioni del professore titolare del corso sono state assolutamente non esaustive, per cui il sottoscritto ha voluto approfondire la questione dando un certo rigore matematico alla dimostrazione di tale identità. Non ho trovato in nessun libro e nemmeno nella rete una possibile dimostrazione e per questo ho fatto un tentativo. Per questo riporto il mio breve lavoro, se può essere di interesse agli **appassionati elettrici "matematici"**...e non solo.

Linee con conduttori a fascio

Nelle linee elettriche aeree dove vige una tensione di rete particolarmente elevata il campo elettrico nell'intorno dei conduttori di linea può superare la rigidità dielettrica dell'aria.

Il superamento di questo valore provoca generazione di calore, luce, rumore e radio interferenze: questo fenomeno va sotto il nome di *effetto corona*. Le perdite di potenza per unità di lunghezza che si verificano a causa di tale effetto sono stimate dalla formula di Peek:

$$p_c = \frac{2.41}{\delta} (f + 25) \sqrt{\frac{d}{2D_m}} (E - E_{cr})^2 \cdot 10^{-3}.$$

dove E_{cr} è il valore efficace della tensione sopra alla quale si manifesta la corona. All'aumentare del diametro del conduttore si dimostra che aumenta la E_{cr} ; per cui un ragionamento affrettato porterebbe ad aumentare il diametro del singolo conduttore per diminuire la possibilità di insorgenza del fenomeno indesiderato. Così non viene fatto in quanto si andrebbe incontro ad un aumento troppo considerevole del peso dei conduttori e potrebbe manifestarsi un indesiderato effetto pelle. Per questo la soluzione migliore è ricorrere a più subconduttori (un conduttore a fascio) in parallelo, i quali simulano lo stesso comportamento di un solo conduttore. Si dimostra che se n è il numero di subconduttori per fase e la disposizione su una circonferenza è simmetrica il diametro equivalente è:

$$D_e = 2(n \cdot r \cdot R^{n-1})^{\frac{1}{n}}.$$

Dove r è il raggio del subconduttore; R il raggio della circonferenza su cui giacciono i subconduttori. Ed è proprio nel ricavare questa formula che si ottiene la fatidica identità.

Flusso concatenato

Consideriamo per semplicità la seguente figura:

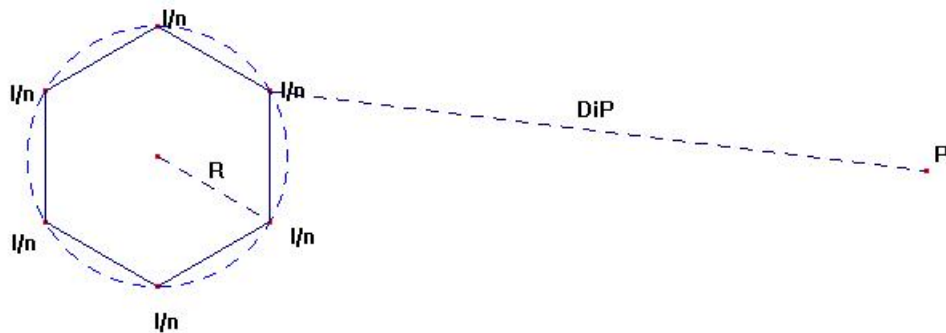


Immagine.JPG

I conduttori disposti lungo la circonferenza di raggio R vedono transitare una corrente pari a I/n . Facciamo un'ipotesi fondamentale: *il punto P fino al quale si vogliono calcolare i flussi concatenati è a distanza molto grande rispetto alle distanze reciproche dei conduttori*. In questo modo si possono considerare le distanze tra ogni singolo subconduttore e P in prima approssimazione uguali. Il flusso concatenato per unità di lunghezza del conduttore i -esimo si può scrivere come (per delucidazioni sulla provenienza delle formule che seguono si può fare riferimento a [1]):

$$\begin{aligned} \Phi_i = & \left[\left(\frac{I}{n} 0.46 \log \left(\frac{D}{D_{i1}} \right) \right) + \left(\frac{I}{n} 0.46 \log \left(\frac{D}{D_{i2}} \right) \right) + \dots \right. \\ & \left. \dots + \left(\frac{I}{n} 0.46 \log \left(\frac{D}{D_{ii}} \right) \right) + \left(\frac{I}{n} 0.46 \log \left(\frac{D}{D_{ni}} \right) \right) \right]. \end{aligned}$$

D_{ii} è definito come il *Geometrical Mean Radius* (GMR raggio medio equivalente):

$$\frac{d}{2} \cdot k''.$$

Dove $k' = 0.46 \log \left(\frac{1}{k''} \right)$.

Il k' tiene conto del flusso interno del conduttore ed è quindi dipendente dal tipo di materiale e dalla formazione (per esempio cavo massiccio o con più conduttori parziali, o con più strati tipo All-Acc).

Per cui ritornando al flusso i -esimo si ha:

$$\Phi_i = I \left[\left(\frac{1}{n} \right) 0.46 \log \left(\frac{D^n}{D_{i1} D_{i2} \dots GMR \cdot D_{in}} \right) \right]$$

$$\Phi_i = I \left[0.46 \log \left(\frac{D^n}{D_{i1} D_{i2} \dots GMR \cdot D_{in}} \right)^{\frac{1}{n}} \right]$$

E ancora:

$$\Phi_i = I \left[0.46 \log \left(\frac{D}{(D_{i1} D_{i2} \dots GMR \cdot D_{in})^{\frac{1}{n}}} \right) \right].$$

Ora il denominatore di quest'ultima può essere riscritto sfruttando la regolarità del poligono di conduttori e facendo uso del *teorema della corda*:

$$D_e = 2 \left[GMR \left(2R \sin \left(\frac{\pi}{n} \right) 2R \sin \left(\frac{2\pi}{n} \right) \dots 2R \sin \left(\frac{(n-1)\pi}{n} \right) \right) \right]^{\frac{1}{n}}.$$

Identità notevole

Il mio intento è quello di dimostrare:

$$2 \sin \left(\frac{\pi}{n} \right) 2 \sin \left(\frac{2\pi}{n} \right) \dots 2 \sin \left(\frac{(n-1)\pi}{n} \right) = n.$$

Dimostrazione

Notiamo che il primo membro dell'equazione precedente non è altro che la produttoria:

$$\prod_{k=1}^{n-1} 2 \sin \left(\frac{k\pi}{n} \right)$$

Da quest'ultima si può estrarre un fattore comune: $2^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n}$

Sfruttiamo la definizione complessa della funzione circolare seno e otteniamo la seguente:

$$2^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \frac{e^{jz} - e^{-jz}}{2j} \text{ con } z = \frac{k\pi}{n}$$

$$\text{Da cui: } \frac{2^{n-1}}{2^{n-1} j^{n-1}} \prod_{k=1}^{n-1} \left(e^{jz} - \frac{1}{e^{jz}} \right) = \frac{1}{j^{n-1}} \prod_{k=1}^{n-1} \frac{e^{2jz} - 1}{e^{jz}}$$

Ora si può estrarre l'esponenziale complesso:

$$\prod_{k=1}^{n-1} \frac{1}{e^{jz}} = \prod_{k=1}^{n-1} \frac{1}{e^{\frac{jk\pi}{n}}}.$$

Prendendo il denominatore si ha:

$$\prod_{k=1}^{n-1} e^{\frac{jk\pi}{n}} = e^{\frac{j\pi}{n}} e^{\frac{j2\pi}{n}} \dots e^{\frac{j(n-1)\pi}{n}}$$

Ora questo è pari a: $e^{\frac{j\pi(1+2+\dots+n-1)}{n}}$

Si tratta di una progressione aritmetica. Sappiamo che la somma di n numeri interi, da 1 fino ad n è data da $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$. Quindi avendo tutti i numeri da 1 ad n-1 sarà:

$$S_{n-1} = \frac{(n-1)(n)}{2}. \text{ Al denominatore ottengo quindi:}$$

$$e^{\frac{j\pi(n-1)}{2}} = j^{n-1}$$

Per cui l'espressione iniziale si riduce alla seguente:

$$\frac{1}{j^{2(n-1)}} \prod_{k=1}^{n-1} \left(e^{2jz} - 1 \right)$$

E con un ulteriore passaggio:

$$-\frac{1}{j^{2n}} \prod_{k=1}^{n-1} \left(e^{2jz} - 1 \right)$$

Analizziamo i valori che può assumere n. Per n dispari ho un numero pari di fattori

della produttoria, quindi posso estrarre un segno - da ogni fattore senza cambiare di segno l'intera produttoria. Sappiamo inoltre che essendo n dispari $j^{2n} = -1$. Per n pari ho un numero dispari di fattori e quindi succede il contrario, estraggo un - cambiando il segno dell'intera produttoria, ma allo stesso tempo ho che adesso $j^{2n} = 1$. Notiamo quindi che in entrambi i casi ottengo che la produttoria diventa:

$$\prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - e^{2jz} \right)$$

Notiamo ora che tutti i termini esponenziali scritti finora all'interno del segno di produttoria sono le radici complesse dell'unità esclusa l'unità stessa. In generale le radici ennesime si troveranno a partire dal polinomio nella forma:

$$p(\sigma) = \sigma^n - 1 = (\sigma - 1)(\sigma - \xi_1)(\sigma - \xi_2) \dots (\sigma - \xi_{n-1})$$

dove $\xi_k = e^{\frac{j2\pi k}{n}}$ con $k = 1, 2, \dots, n-1$.

Nel nostro caso la produttoria è pari a:

$$\prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - e^{2jz} \right) = (\sigma - \xi_1)(\sigma - \xi_2) \dots (\sigma - \xi_{n-1})$$

e può essere scritta come limite:

$$\lim_{\sigma \rightarrow 1} \frac{\sigma^n - 1}{\sigma - 1}$$

Si tratta di una forma indeterminata che si risolve tramite il Teorema di De l'Hopital:

$$\lim_{\sigma \rightarrow 1} \frac{\sigma^n - 1}{\sigma - 1} = \lim_{\sigma \rightarrow 1} \frac{n\sigma^{n-1}}{1} = n.$$

L'equazione polinomiale in precedenza scritta viene chiamata in analisi complessa equazione ciclotomica (che divide la circonferenza) ed è l'equazione che si deve risolvere per cercare le radici n -sime dell'unità. Considerando la circonferenza con centro l'origine e raggio unitario nel piano complesso, le radici dell'equazione giacciono sulla circonferenza unitaria e la dividono in n archi uguali.

Conclusioni

Quando presentai la mia dimostrazione al prof. alla fine di una lezione mi sentii dire che la mia dimostrazione era *troppo poco geometrica*, e che il passaggio tramite

l'analisi era stato già tentato da colleghi (che comunque avevano tentato invano), ma che comunque sarebbe risultato poco didattico. I grandi didatti della scuola patavina sono spaventati da qualche banale trucchetto matematico?..strano..

Solitamente molti ingegneri, come per esempio molti miei colleghi, sottovalutano l'importanza della matematica. Spero che anche grazie a questo mio piccolo contributo ci si possa sempre affascinare delle formule che si utilizzano, per capirne il significato profondo e mai banale, e non ridurle ad un mero strumento di calcolo.

Bibliografia

[1] R.BENATO, L.FELLIN: Impianti elettrici, UTET, Torino, 2011.

[2] CHARLES A. GROSS: Power system analysis, Second edition, John Wiley and Sons, New York, 1986.

Estratto da "<http://www.electroyou.it/mediawiki/index.php?title=UsersPages:Chiodo:misteriosa-moltiplicazione-di-seni>"