

Claudio Bonechi (clavicordo)

Valutazione, giudizio e matematica

4 January 2026

Indice

- [1 Introduzione](#)
 - [1.1 Modelli di valutazione](#)
 - [1.2 Valutazione e giudizio](#)
- [2 Algebra lineare](#)
 - [2.1 Vettori](#)
 - [2.2 Rappresentazione geometrica \(caso particolare\)](#)
 - [2.3 Vettori come descrizione di sistemi reali](#)
 - [2.4 Prodotto scalare](#)
 - [2.5 Significato operativo del prodotto scalare](#)
 - [2.6 Distanza euclidea](#)
 - [2.7 Interpretazione operativa](#)
 - [2.8 La forma bilineare: quando la valutazione euclidea non è sufficiente](#)
 - [2.9 Esempio elettrico](#)
 - [2.10 Esempio di economia](#)
 - [2.10.1 Esempio numerico semplice](#)
 - [2.10.2 Valutazione puramente lineare \(prodotto scalare\)](#)
 - [2.10.3 Valutazione bilineare](#)
- [3 Conclusione](#)

Introduzione

Durante la vita ciascuno di noi si trova spesso a dover valutare qualcosa: un comportamento, una qualità, un risultato, un'attività o molto altro. Fin da piccoli valutiamo il cibo e veniamo valutati dai genitori in vari aspetti; poi arrivano la scuola, con giudizi e voti, e più avanti le relazioni umane, il lavoro, il tempo libero. Nessuno è esente dal valutare e dall'essere valutato.

Quando parliamo di persone, però, il rischio è confondere una valutazione “tecnica” con un vero e proprio giudizio sulla persona. Un esempio: un insegnante assegna un voto confrontando le risposte con ciò che ci si aspettava; questa è una valutazione funzionale, legata alla prestazione del momento. Ma se lo stesso insegnante, vedendo un 4/10, pensa “Questo studente è scarso in matematica”, allora sta trasformando un dato puntuale in

un'etichetta sulla persona. In questo caso non sta più valutando una prova: sta dando un giudizio, cioè attribuendo allo studente una caratteristica "di essere" sulla base di un singolo risultato. È una confusione pericolosa, perché mescola la prestazione con il valore della persona.

La separazione tra valutazione e giudizio, termini spesso confusi, è fondamentale, perché la loro sovrapposizione può produrre effetti distorsivi anche gravi. Non è sempre semplice distinguerli, e per farlo bisognerebbe forse ricorrere alla filosofia, disciplina nella quale non sono particolarmente competente. Tuttavia, confrontandosi con chi se ne occupa, emerge che già Platone (e, in modo diverso, Aristotele) distingueva tra opinione (doxa) e conoscenza (episteme), attribuendo a quest'ultima un valore più alto e un ruolo di riferimento per la comunità. Chi affronta il tema in modo più preciso è però Kant, che nella *"Critica del giudizio"* distingue tra *giudizio determinante* e *giudizio riflettente*.

Richiamo questa distinzione solo per analogia: per noi, infatti, da una parte c'è la valutazione, intesa come confronto tecnico; dall'altra il giudizio, cioè il gesto umano di attribuire un senso a quel confronto.

La scienza, ad esempio, sospende il giudizio sui risultati che produce, ma non può evitare di esercitarlo nella costruzione degli strumenti con cui valuta: nella scelta delle variabili, dei modelli, delle soglie e degli indicatori. In questo senso il giudizio non scompare, ma si sposta a monte, nella struttura stessa della valutazione. Eventi storici come lo sgancio delle bombe atomiche durante la Seconda guerra mondiale mostrano però che, quando il giudizio si traduce in decisioni operative, può generare conseguenze profondamente problematiche, talvolta tragiche.

Modelli di valutazione

Esistono molti modi di valutare qualcosa. Una valutazione può essere semplice e immediata, oppure complessa e laboriosa, fino al punto da dover essere sospesa, come accade quando non si riesce a individuare il colpevole di un crimine. Per ottenere una visione più chiara dell'argomento, è utile esaminare i diversi modi in cui si può condurre una valutazione il più possibile obiettiva. Si scopre così che sono stati elaborati vari modelli valutativi, spesso utilizzati in combinazione dalle diverse discipline a seconda delle circostanze. Tra questi, possiamo mettere in evidenza i seguenti.

A. Modelli descrittivi

- **Classificazione.** Inserire un oggetto in una categoria. Es.: "questo vino è un Chianti Classico". È una valutazione tipologica, non metrica, usata in linguistica, psicologia, biologia, estetica.
- **Interpretazione.** La valutazione è ermeneutica, ossia cerca di attribuire un senso. Es.: "questo comportamento indica insicurezza". Confina col giudizio,

può sembrarlo, ma non è giudizio. È il modello della psicoanalisi, della critica letteraria, della sociologia interpretativa.

- **Ordinamento (ranking).** Consiste nel disporre oggetti secondo un ordine crescente, ($a < b < c < \dots$), oppure decrescente. È un modello relazionale usato in teoria delle preferenze, economia, teoria delle decisioni, machine learning (ranking, recommendation systems), filosofia (ordinamenti morali, gerarchie di valori)
- **Valutazione comparativa (pairwise comparison).** È un modello distinto dall'ordinamento perché non costruisce una scala completa e confronta solo coppie. Es.: “questa ipotesi spiega più dati dell'altra”.
- **Misura (assoluta o relativa).** È un'operazione che consiste nel confrontare un oggetto con un riferimento convenzionale, chiamato “unità di misura”.

B. Modelli normativi

- **Attribuzione di un valore.** Es.: “Questo gesto è giusto”; “questa macchina vale 1000 euro”. Il valore può essere etico, estetico, economico, ecc. Usata in economia, in filosofia morale, nell'arte.
- **Valutazione normativa (prescrittiva).** Diversa dalla “misura della deviazione”. Non misura quanto ci si discosta da una norma ma si stabilisce la norma stessa, o definisce uno standard. Es.: “la soglia accettabile è 0,05”, “il limite di velocità deve essere 50 km/h”, “Norme tecniche UNI emesse da Ente Italiano di Normazione”. È il modello della filosofia morale, del diritto, delle policy, della standardizzazione tecnica.
- **Misura di una deviazione.** Presuppone uno standard (norma, obiettivo, criterio) e misura quanto l'oggetto se ne discosta. È un modello quantitativo, tipico della scienza, della tecnologia, della qualità industriale, della statistica, della scuola tradizionale, ma usato anche in economia, psicologia sociale, comunicazione.

C. Modelli decisionali

- **Decisione tra alternative.** La valutazione è un calcolo di conseguenze: riguarda la scelta da fare. Es.: “è meglio investire qui o lì?”; “quale strategia massimizza il risultato?”.
- **Valutazione predittiva.** Riguarda ciò che sarà. Es.: “questo investimento avrà un rendimento del 5%”. È diversa dalla decisione, che usa la previsione, ma non coincide con essa.

D. Modelli generativi

- **Valutazione costruttiva** (progettazione, creazione)

Valutazione e giudizio

Che cos'è dunque la valutazione? E' un **processo cognitivo** che:

- - prende un **oggetto**
- - lo colloca in un **modello**
- - produce un **esito** (categoria, numero, ordine, significato, scelta...)

Il **giudizio**, nella tradizione filosofica, è un tipo particolare di valutazione che implica una presa di posizione personale o collettiva e si riferisce quasi sempre ai valori culturali, morali e sociali di una comunità.

Mentre la **valutazione** è descrittiva, comparativa, quantitativa, interpretativa, il **giudizio** è prescrittivo, normativo, assertivo.

In moltissimi ambiti si cerca di applicare la **matematica** alla **valutazione**, e credo sia capitato a tutti di incontrarne esempi: dalle stime dell'errore nelle misure elettriche e meccaniche alla statistica, dagli spettri di frequenza alla teoria dei grafi, dai problemi di minimo e massimo vincolati alle misure di informazione, di complessità o di simmetria, e così via. In certi casi la matematica impiegata è molto sofisticata e certamente esula dalle mie competenze. Qui cerco infatti di dare un'idea dell'uso di strumenti matematici relativamente semplici, quelli dell'**algebra lineare**: vettori e loro operazioni, forme bilineari ed eventualmente multilineari.

Quando le relazioni da valutare coinvolgono più di due insiemi di grandezze, la forma bilineare si estende in modo naturale a funzioni che combinano tre, quattro o più vettori. In algebra lineare queste funzioni si chiamano forme multilineari e si rappresentano tramite oggetti che generalizzano le matrici. Non è necessario entrare nei dettagli: basta pensare a una "matrice multidimensionale" che permette di valutare interazioni simultanee tra più fattori. Questi oggetti, noti come *tensori*, non aggiungono complessità concettuale rispetto a ciò che abbiamo già visto: sono semplicemente il passo successivo dopo vettori e matrici. Il loro ruolo è lo stesso — raccogliere coefficienti e strutture di relazione — ma in contesti dove le variabili da mettere in relazione non sono due, bensì tre o più. Per il nostro scopo è sufficiente sapere che, quando la valutazione richiede di combinare più dimensioni contemporaneamente, i tensori forniscono un contenitore ordinato e trasparente per farlo, esattamente come le matrici lo fanno per le forme bilineari, forme che esamineremo brevemente nel seguito dell'articolo.

Sono strumenti utilizzati in campi anche molto diversi e applicabili a quasi tutti i modelli di valutazione riportati sopra, con l'eccezione dei modelli normativi più strettamente prescrittivi, cioè quelli che stabiliscono direttamente ciò che è giusto, obbligatorio o moralmente valido all'interno di una comunità: ambiti in cui la **matematica** può fornire **supporto tecnico**, ma **non** sostituire la **deliberazione etica** o **giuridica**.

Algebra lineare

I vettori sono oggetti fondamentali dell'algebra lineare, la disciplina che studia, tra l'altro, spazi vettoriali, trasformazioni lineari, matrici, autovalori e autovettori, decomposizioni, sottospazi, basi e dimensioni. È il linguaggio che organizza e governa tutte le strutture lineari, incluse le forme bilineari (e multilineari) e le operazioni sui vettori, fornendo una descrizione unificata degli spazi e degli operatori che li trasformano.

La linearità è una struttura estremamente potente: quando un fenomeno può essere modellato in forma lineare, i vantaggi computazionali e analitici sono notevoli, grazie alla possibilità di utilizzare decomposizioni, metodi numerici stabili e soluzioni esplicite. In questo articolo consideriamo solo una parte dell'apparato dell'algebra lineare, quella che meglio si presta al tema della valutazione.

Vettori

Come al solito, mi scuso per la mancanza di rigore matematico su quanto dirò di seguito; d'altra parte senza un discorso introduttivo sui vettori mi riuscirebbe difficile proseguire. Un vettore $\mathbf{v}$ è uno strumento matematico usato per rappresentare un oggetto o un sistema attraverso un insieme ordinato di grandezze numeriche. Formalmente, un vettore è una **n-upla** di numeri, ossia di scalari ordinati $(v_1, \dots, v_n)$, che chiamiamo **componenti**, ed è rappresentato con una lettera in grassetto (o con una freccina posta sopra) che equivale alla n-upla:

$$\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$$

Dal punto di vista matematico, i vettori appartengono a uno **spazio vettoriale**, cioè a una struttura astratta di dimensione n in cui valgono regole precise per somma e moltiplicazione per uno scalare. Quando in uno spazio vettoriale detto **euclideo** scegliamo un sistema di riferimento e una **base**, questo spazio può essere rappresentato tramite coordinate cartesiane. Se lo spazio è a tre dimensioni x, y, z possiamo scegliere una base ortogonale (tre vettori unitari indipendenti $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ con un estremo nell'origine degli assi, detti "**versori**" e l'altro estremo su ciascuno degli assi) e rappresentare il vettore come **somma pesata** dei tre versori, dove i "pesi" sono le componenti v_x, v_y, v_z :

$$\mathbf{v} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k} = \mathbf{v}_x + \mathbf{v}_y + \mathbf{v}_z$$

[Vettore in 3 dimensioni](#)

Vettore in 3 dimensioni

Rappresentazione geometrica (caso particolare)

Nel caso più noto, quando $n = 2$ o $n = 3$ e le componenti rappresentano coordinate spaziali nello spazio fisico, il vettore può essere rappresentato geometricamente come un segmento orientato:

- la lunghezza rappresenta il **modulo** (o intensità): in realtà il nome corretto è "**norma**"
- l'orientamento della retta rappresenta la **direzione**
- la freccia indica il **verso**

Il modulo si indica con $|v|$ e numericamente è uguale alla **norma**, che si indica con $\|v\|$. Questa rappresentazione è molto utile, ma va ricordato che non tutti i vettori sono vettori geometrici.

"Modulo" sarebbe il nome riservato al contesto geometrico euclideo, mentre la norma $\|v\|$ è un nome più generale, ma, prescindendo dal rigore linguistico, continuerò per comodità a usarli entrambi, dato che si calcolano allo stesso modo a partire dalle componenti, applicando il Teorema di Pitagora generalizzato per n dimensioni:

$$|v| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2}$$

Vettori come descrizione di sistemi reali

Un **vettore** può rappresentare un **insieme di grandezze** scelte per descrivere lo stato o le caratteristiche di un oggetto, anche quando tali grandezze non hanno nulla di "geometrico". È però importante distinguere le **grandezze reali** dalle **coordinate matematiche**: le **prime** possono essere tra loro **correlate o vincolate** (per esempio da leggi fisiche o relazioni statistiche), mentre le **secondo** sono semplicemente i **valori** che quelle grandezze assumono rispetto a una base dello spazio vettoriale.

Il numero di componenti n non indica quante grandezze siano "indipendenti" nel senso fisico o statistico, ma quanti **gradi di libertà matematici** abbiamo scelto per descrivere l'oggetto. In termini tecnici, è la **dimensione dello spazio vettoriale** in cui il vettore è collocato: uno spazio in cui le coordinate sono indipendenti per definizione, anche se le grandezze che rappresentano possono non esserlo affatto.

Esempio. Consideriamo una **batteria** agli ioni di litio. Il suo **stato interno** può essere descritto mediante un insieme di **variabili di stato**, cioè grandezze fisiche scelte per caratterizzare in modo completo l'evoluzione dinamica del sistema. Queste grandezze non sono necessariamente indipendenti nel senso fisico — possono infatti essere correlate o vincolate da relazioni termiche, elettriche o di invecchiamento — ma vengono trattate come coordinate indipendenti all'interno del modello matematico, in quanto rappresentano i gradi di libertà scelti per descrivere il sistema.

In un **modello di stato**, quando un oggetto è descritto da più coordinate, lo rappresentiamo mediante un **vettore di stato**. Tale vettore raccoglie in forma ordinata i valori assunti dalle variabili di stato in un dato istante di tempo.

Per la batteria possiamo adottare, ad esempio, le seguenti **variabili di stato**:

- q carica residua (C o Ah)
- T temperatura interna (K)
- R resistenza interna (Ω)
- α parametro di invecchiamento (state of health)

Il vettore di stato risulta quindi:

$$\mathbf{s}(t) = (q(t), T(t), R(t), \alpha(t))$$

Si tratta di un vettore di stato a 4 dimensioni, non geometrico nel senso moderno: un elemento di che rappresenta un **punto** nello **spazio delle configurazioni del sistema**. Il tempo non compare come componente del vettore perché le variabili di stato sono funzioni del tempo, non coordinate temporali. Dire che il sistema è descritto da quattro componenti equivale a dire che il modello adottato possiede 4 gradi di libertà, cioè 4 dimensioni nello spazio di stato.

Il grande **vantaggio** di questa rappresentazione è che, una volta descritto lo **stato** come **vettore**, possiamo utilizzare direttamente gli **strumenti dell'algebra lineare** — matrici, trasformazioni, modelli di evoluzione — per effettuare diversi tipi di **valutazione**, senza doverci preoccupare della natura fisica delle singole grandezze.

In generale, se gli oggetti sono rappresentati tramite vettori, diventa naturale usare **operazioni vettoriali** per valutare le **relazioni** tra di essi, ad esempio il grado di somiglianza.

Prodotto scalare

Quando vogliamo confrontare due vettori, una delle operazioni fondamentali è il **prodotto scalare** (o dot product, o inner product), indicato con il simbolo “ $\cdot$ ”. È un'operazione che associa uno **scalare** a una **coppia di vettori** $\mathbf{v}, \mathbf{w}$. In uno spazio euclideo con base ortonormale esso si scrive come:

$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + \dots + v_n w_n$ Questa espressione algebrica ha una chiara interpretazione geometrica:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = |\mathbf{v}| |\mathbf{w}| \cos \theta$$

dove θ è l'angolo compreso tra i due vettori.

Da questa relazione segue che se i vettori sono paralleli e concordi, il prodotto scalare assume il valore massimo compatibile con i loro moduli; se sono paralleli e discordi, assume il valore minimo (negativo); se sono ortogonali, il prodotto scalare è nullo.

L'angolo θ può essere ricavato da:

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{|\mathbf{v}| |\mathbf{w}|}$$

Il prodotto scalare di un vettore con sé stesso è:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{v}|^2$$

che corrisponde al caso $\theta = 0$.

Queste relazioni restano valide anche quando le componenti non rappresentano coordinate geometriche, ma grandezze qualsiasi (temperatura, consumo, potenza, rumore, ecc.). In tal caso l'“angolo” non è un angolo fisico, ma una misura di similarità tra i profili:

- $\theta = 0$: i profili variano nello stesso modo;
- $\theta = 90^\circ$: non mostrano correlazione lineare;
- $\theta = 180^\circ$: variano in modo opposto.

È un **angolo concettuale**, dunque **non geometrico**.

Significato operativo del prodotto scalare

Il prodotto scalare misura il **grado di allineamento** tra due vettori, tenendo conto sia della **direzione** sia del **modulo**. Per questo motivo può essere interpretato come **una misura di somiglianza direzionale pesata dall'intensità** (modulo), ed è ampiamente utilizzato in molte discipline, come la fisica, l'ingegneria, l'informatica.

Poiché il modulo può influenzare il confronto, è spesso utile usare la **normalizzazione** dei vettori rispetto alle loro **norme**. La normalizzazione conduce al **coseno dell'angolo** tra i vettori, detto anche **coseno di similarità**, che varia tra -1 e 1 , e, nell'uso applicativo, può essere espresso in percentuale. Il **segno** del coseno è particolarmente informativo: indica se le componenti dei due vettori tendono a variare nello stesso verso (valori positivi), in verso opposto (valori negativi) oppure se non mostrano correlazione lineare (valore zero).

Esempio numerico: similarità tra due insiemi di dati.

Supponiamo di descrivere **due oggetti** (due sensori o due macchine, o due segnali medi) mediante **tre caratteristiche** misurate nello stesso modo con un numero intero:

livello A, livello B, livello C.

I **dati** (riferibili a qualsiasi grandezza fisica o di altro tipo) per i **tre livelli** sono rappresentabili da due vettori:

$$\mathbf{v} = (2, 4, 6); \mathbf{w} = (3, 6, 9)$$

Calcoliamo il prodotto scalare:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 2 \cdot 3 + 4 \cdot 6 + 6 \cdot 9 = 84$$

Vogliamo anche normalizzare trovando il **coseno dell'angolo** tra i due vettori

Calcoliamo i moduli:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{(2^2 + 4^2 + 6^2)} = \sqrt{56} \approx 7,48; |\mathbf{w}| = \sqrt{(3^2 + 6^2 + 9^2)} = \sqrt{126} \approx 11,22$$

Ora il prodotto scalare **normalizzato**:

$$(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) / (|\mathbf{v}| |\mathbf{w}|) = 84 / (\sqrt{56} \cdot \sqrt{126}) \approx 1$$

Il valore ottenuto molto vicino a 1 indica **altissima**, quasi massima, **similarità strutturale**: i due vettori descrivono **lo stesso "profilo"**, anche se con ampiezze diverse.

Introduciamo un **terzo oggetto** e il relativo terzo vettore che lo descrive:

$$\mathbf{u} = (6, 4, 2)$$

che ha lo stesso modulo (norma) di $\mathbf{v}$. Facciamo il prodotto scalare con $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = 2 \cdot 6 + 4 \cdot 4 + 6 \cdot 2 = 40$$

che molto più piccolo di 84. Normalizzando, il **coseno di similarità** risulta uguale a circa 0,714 (circa 44,4°).

Vediamo che $\mathbf{u}$ contiene nelle componenti gli **stessi valori** di $\mathbf{v}$, ma **distribuiti in modo opposto**: i due oggetti **non** sono **simili** dal punto di vista **strutturale**.

Distanza euclidea

Consideriamo ora un'altra importante operazione vettoriale, usata nei problemi di valutazione: la **distanza euclidea** tra due vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$.

Essa è definita come **norma** del vettore differenza $\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|$ in $\mathbb{R}^n$: La distanza euclidea misura “quanto due vettori, interpretati come punti nello spazio (l'altra estremità può essere nell'origine degli assi), sono lontani” in senso metrico. In realtà la differenza vettoriale è **invariante rispetto alla traslazione**.

Applichiamola al nostro caso:

- $d(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \sqrt{[(3-2)^2 + (6-4)^2 + (9-6)^2]} = \sqrt{14} \approx 3,7$
- $d(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = \sqrt{[(6-2)^2 + (4-4)^2 + (2-6)^2]} = \sqrt{32} \approx 5,7$

Anche per la distanza euclidea è quasi sempre necessaria una **normalizzazione**. Ne esistono di vari tipi ma le più usate sembrano essere:

- **distanza angolare** $d_{\text{ang}} = \theta/\pi$, usata in geometria, fisica ($=0 \rightarrow$ vettori identici; $=1 \rightarrow$ vettori opposti)
- **cosine distance** $d_{\text{cos}} = 1 - \cos \theta$, usata in Machine Learning ($=0 \rightarrow$ vettori identici; $=2 \rightarrow$ vettori opposti)

Nel nostro esempio:

- $\cos \theta (\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} / (\|\mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\|) = 84 / (\sqrt{56} \sqrt{126}) \approx 1$; $\theta (\mathbf{v}, \mathbf{w}) \approx 0$; $d_{\text{ang}} = 0$
- $\cos \theta (\mathbf{v}, \mathbf{u}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} / (\|\mathbf{v}\| \|\mathbf{u}\|) = 40 / (\sqrt{56} \sqrt{56}) \approx 0,714$; $\theta (\mathbf{v}, \mathbf{u}) = 0,775$ rad; $d_{\text{ang}} = 0,247$

Interpretazione operativa

I due strumenti, prodotto scalare e distanza euclidea, danno **risposte a domande diverse**.

Si usa il **prodotto scalare** (o il coseno di similarità) quando interessa:

- confrontare l'andamento relativo dei dati
- capire se due profili hanno la stessa struttura
- ignorare (o ridurre) l'effetto dell'ampiezza assoluta
- riconoscere pattern simili

I campi di impiego sono:

- analisi dei segnali
- pattern recognition
- machine learning
- confronto tra profili di consumo
- risposta in frequenza, spettri

Si usa la **distanza euclidea** (eventualmente la distanza angolare) quando interessa:

- in un lotto di componenti prodotti lo scostamento reale, componente per componente,

dallo standard utilizzato

- sapere “quanto” un oggetto è diverso da un altro
- conoscere la distanza assoluta tra due (o più) oggetti

Campi di impiego:

- tolleranze industriali
- controllo qualità
- errori di misura
- confronto tra stati fisici reali

In sostanza il **prodotto scalare** confronta la **forma** mentre la **distanza euclidea** confronta la **differenza**. Oppure, detto in modo più operativo:

- due vettori possono essere molto **simili** (alto prodotto scalare) ma **non vicini** (uno di modulo molto più grande dell'altro, angolo piccolo)
- due vettori possono essere **vicini** ma **non simili** nella struttura (distanza euclidea piccola, componenti simili ma distribuiti diversamente)

Il **prodotto scalare** consente di dare una **valutazione** complessiva della **similarità strutturale** tra due oggetti, misurando quanto le loro caratteristiche crescono o diminuiscono insieme. Il **criterio** è quello della **coerenza pesata**. Facciamo un esempio.

Supponiamo che un **oggetto** (ad esempio una macchina) sia descritto da un **vettore** con le componenti seguenti:

- potenza
- consumo
- rumore
- vibrazioni

Poniamo che **due macchine** abbiano **entrambe**:

- potenza alta
- consumo alto
- rumore basso
- vibrazioni medie

→ Se il prodotto scalare è **alto** → significa che il loro profilo è **coerente**.

→ Se invece una ha potenza alta e l'altra bassa, una consuma molto e l'altra poco, ecc. → il prodotto scalare è **basso**. Significa che i **profili non** sono **allineati**.

Naturalmente i significati di “alto” e “basso” che riguardano l'ampiezza delle singole componenti vanno contestualizzati.

Se si usa la **normalizzazione**, il criterio di valutazione si svincola dall'ampiezza e diventa “quanto i vettori puntano nella stessa direzione”, ossia sulla loro similarità

strutturale pura. La **similarità strutturale** significa che le componenti, prese a due a due, mantengono il loro **rapporto quasi costante**.

Esempio: $v = (1000, 10, -6)$; $w = (490, 5, 1, -3, 04)$; si vede bene che il rapporto tra componenti corrispondenti v/w è ≈ 2 .

Quando il **prodotto scalare** è **negativo** significa che, in media, le componenti dei due vettori:

- crescono in direzioni opposte,
- mostrano pattern contrari,
- hanno una coerenza strutturale negativa,
- si indeboliscono invece di rinforzarsi.

Le caratteristiche che sono alte in un vettore tendono a essere basse nell'altro. Se prevalgono i termini negativi, la somma totale diventa negativa. Quindi **il segno** del prodotto scalare è un **indicatore** diretto di **orientamento relativo**.

La matematica dei vettori è **una delle forme più trasparenti di valutazione**: permette di vedere come qualcosa si discosta da un criterio, quanto si avvicina a un modello, in che modo due oggetti risultano simili o diversi. Così la valutazione diventa chiara, esplicita, controllabile, mentre il giudizio rimane un atto umano. O almeno così dovrebbe essere, soprattutto quando si parla di **IA**, la cui struttura operativa è di natura matematica. È un tema da non sottovalutare, come mostrano le **preoccupazioni** espresse da diversi premi Nobel riguardo alla possibilità che l'IA eserciti **un'ingerenza crescente** in ambiti che richiedono deliberazione etica o politica (cfr. De Caro – Giovanola, "Intelligenze, etica e politica dell'IA", Il Mulino, 2025). L'IA, quando interpellata, dovrebbe limitarsi a fornire **valutazioni**, **non** emettere **giudizi**.

La forma bilineare: quando la valutazione euclidea non è sufficiente

Il prodotto scalare è uno strumento di partenza molto utile: permette di misurare allineamenti, definire angoli, lunghezze e ortogonalità, e genera la metrica euclidea (la distanza tra due vettori è la norma della loro differenza, e la norma deriva dal prodotto scalare di un vettore con sé stesso). Tuttavia presenta alcuni **limiti**, di cui 3 sono i più rilevanti.

Il **primo** è che pesa tutte le componenti dei vettori allo stesso modo, tramite la semplice moltiplicazione delle componenti corrispondenti. In molti casi, però, alcune componenti devono avere un peso maggiore, altre minore, e altre ancora devono poter essere ignorate.

Il **secondo** è che il prodotto scalare standard tratta le componenti come ortogonali e non accoppiate, ossia tra loro indipendenti; in molte applicazioni reali, tuttavia, le componenti sono strutturalmente correlate, rendendo tale prodotto inadeguato a descriverne le relazioni.

Il **terzo** è che la metrica euclidea da esso indotta è isotropa e altamente simmetrica, e proprio per questo non consente di introdurre pesi, direzioni privilegiate, vincoli o altre caratteristiche geometriche dello spazio, come l'anisotropia.

Per superare questi limiti si utilizza una **forma bilineare** del tipo:

$$B(v,w) = v^T A w$$

Si tratta di una funzione costituita da un prodotto di 3 matrici, di cui due sono vettori (v^T e w) e una (A) è una matrice quadrata detta "di rappresentazione". Inoltre v^T è il vettore v trasposto, ossia scritto come riga invece che come colonna:

$$v = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{bmatrix}$$

$$v^T = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{bmatrix}$$

In questo modo ogni vettore di dimensione n diventa una matrice di n righe e di una sola colonna.

Notare che, nella notazione matriciale, i vettori sono rappresentati come vettori colonna e non vengono più indicati in grassetto.

Nel caso generale A può essere qualunque (purché **quadrata**); tuttavia, quando si vuole utilizzare B come strumento di valutazione simmetrica — ad esempio per definire pesi, correlazioni o una metrica nello spazio — si richiede che A sia simmetrica e definita positiva. In questo modo la forma bilineare diventa una **generalizzazione del prodotto scalare** e consente di introdurre pesi e accoppiamenti tra le componenti. "Simmetrica" significa che la matrice è quadrata e che $A_{ij} = A_{ji}$ per ogni i, j e cioè $A = A^T$. "Definita positiva" significa quanto segue: quando la forma bilineare è applicata su un solo vettore non nullo, si ottiene sempre un valore strettamente positivo, ossia:

$$B(v,w) = v^T A w > 0 \quad \text{per ogni } v \neq 0$$

La forma bilineare si può esplicitare:

$$B(v,w)=\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \\ w_1 & w_2 & \cdots & w_n \end{bmatrix}$$

Come il prodotto scalare, anche la **forma bilineare** B restituisce **un unico valore numerico** per ogni coppia di vettori e per una matrice associata A. Si tratta quindi di una funzione bilineare nelle variabili "v" e "w", parametrizzata dalla matrice A.

La matrice A può assumere **significati diversi** a seconda del ruolo che le viene attribuito, ma il suo compito è sempre **strutturale**: essa determina il modo in cui i due vettori vengono messi in relazione. In questo senso A è lo **strumento interpretativo** che definisce la **geometria dello spazio** e incorpora il **criterio di valutazione**. La scelta di A appartiene al dominio del **giudizio**; la **valutazione** emerge invece come **risultato della funzione B(v,w)**. In applicazioni diverse, la matrice A può essere interpretata come:

- matrice dei **pesi**,
- matrice di **interazione**,
- matrice di **rilevanza**.

Si vede subito come una **forma bilineare** sia una **generalizzazione del prodotto scalare**. Infatti, quando la matrice A coincide con la matrice identità **I** =

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

, il prodotto matriciale Aw diventa semplicemente $Iw = w$ e

$$B(v,w)=v^T I w = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$$

Esempio elettrico

Facciamo un semplice esempio con un circuito elettrico. In regime stazionario, la potenza dissipata è $P=V \cdot I$ dove: **V**= tensione **I**= corrente

Consideriamo un circuito con due rami resistivi indipendenti, a ognuno dei quali è applicata una corrente, rispettivamente I_1 e I_2 ramo 1: resistenza R_1 , corrente

Il ramo 2: resistenza R_2 , corrente I_2 ,

Definiamo i vettori:

$$I = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

$$V = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

Relazione costitutiva (Ohm generalizzato)

Per un circuito resistivo lineare la forma vettoriale è:

$V = AI$ dove A è la matrice delle resistenze:

$A = \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix}$ che come si vede è una matrice diagonale. La potenza totale dissipata nel circuito è una forma bilineare in I e V : $P(I, V) = I^T V$

in cui, dal punto di vista matematico, la matrice A è la matrice Identità e viene sottintesa. In effetti la scrittura coincide con il prodotto scalare $I \cdot V$

Sostituendo $V=AI$:

$$P(I) = I^T AI$$

che è una forma quadratica in I , cioè la forma bilineare applicata allo stesso vettore due volte.

Accoppiamento tra rami. Se i rami sono accoppiati (mutua induzione, reti non ideali) possiamo introdurre un coefficiente di accoppiamento k :

$$A = \begin{bmatrix} R_1 & k \\ k & R_2 \end{bmatrix}$$

$$P = R_1 I_1^2 + 2k I_1 I_2 + R_2 I_2^2$$

N.B. Il termine " k " non rappresenta un semplice resistore che connette i due rami.

Il termine $2k I_1 I_2$ è:

- interazione tra rami
- energia dissipata o trasferita per accoppiamento

Notiamo che il prodotto scalare misurerebbe solo la somma delle potenze locali. La forma bilineare invece introduce:

- struttura del circuito
- interazioni fisiche reali
- topologia della rete

Ossia, la **matrice A** rappresenta il **circuito**.

Esempio di economia

Immaginiamo ora di avere un **mercato** molto semplice con due beni:

- Bene 1
- Bene 2

Introduciamo i **vettori di profilazione**

Quantità acquistate (consumatore) : vettore

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

x_1 : quantità acquistata del bene 1

x_2 : quantità acquistata del bene 2

Prezzi (mercato) : vettore $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$

y_1 : prezzo del bene 1

y_2 : prezzo del bene 2

La **struttura** del mercato è rappresentata dalla **matrice**

$$A = \begin{bmatrix} \text{scriptstyle 1} & \text{scriptstyle 0,3} \\ \text{scriptstyle 0,6} & \text{scriptstyle 1,2} \end{bmatrix}$$

dove:

$$A = \begin{bmatrix} \text{valore diretto pane} & \text{influenza vino to pane} \\ \text{influenza pane to vino} & \text{valore diretto vino} \end{bmatrix}$$

1 → compatibilità diretta bene 1 ↔ bene 1

1,2 → compatibilità diretta bene 2 ↔ bene 2

0,3 → sostituibilità incrociata (domanda 2 soddisfatta anche dal bene 1)

0,6 → effetto incrociato opposto

Introduciamo la **forma bilineare**

$$B(x,y) = x^T A y$$

Il numero $B(x,y)$ misura quanto bene l'offerta incontra la domanda, tenendo conto delle sostituzioni. Naturalmente, essendo B una funzione, è facile fare simulazioni, attribuendo una serie di valori a " x " e a " y " (che sono vettori, ricordiamolo) e variando A opportunamente. Essendo molte le variabili, entrano in gioco le **teorie economiche** per stabilire i **criteri di simulazione**, cioè costruire la matrice A . Per esempio:

- microeconomia neoclassica → ? quasi diagonale, interazioni deboli
- teoria dei beni complementari → ? con termini fuori diagonale positivi
- teoria della sostituibilità → termini fuori diagonale negativi

- modelli di consumo culturale → ? asimmetrica* modelli di mercato regolato → ? con pesi imposti dall'esterno .

Esempio numerico semplice

- Bene 1: pane
- Bene 2; vino

Introduciamo i vettori di profilazione

Quantità acquistate (consumatore) : $x = \begin{bmatrix} 10 \\ 4 \end{bmatrix}$

Prezzi (mercato) : $y = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$

La struttura del mercato è rappresentata dalla matrice

$A = \begin{bmatrix} \text{scriptstyle } 1 & \text{scriptstyle } 0,3 \\ \text{scriptstyle } 0,6 & \text{scriptstyle } 1,2 \end{bmatrix}$

dove:

$A = \begin{bmatrix} \text{valore diretto pane} & \text{influenza vino to pane} \\ \text{influenza pane to vino} & \text{valore diretto vino} \end{bmatrix}$

Valutazione puramente lineare (prodotto scalare)

Spesa totale: $= 10 \cdot 2 + 4 \cdot 5 = 40$

Normalizzando:

$\cos \theta = x \cdot y / (\|x\| \|y\|) \approx 40 / 58 = 0,6897$

Si può rilevare che il **valore normalizzato** ottenuto con il prodotto scalare, cioè il coseno tra i vettori delle quantità acquistate e dei prezzi, rappresenta una **misura di similarità strutturale tra i due profili**. Nel nostro esempio il coseno vale circa 0,69: significa che la **struttura dei consumi** del cliente è **abbastanza coerente** con la **struttura dei prezzi del mercato**. Dove il prezzo è più basso (pane) la quantità acquistata è maggiore, e dove il prezzo è più alto (vino) la quantità è minore: i due profili “puntano” nella stessa direzione. Il **coseno**, quindi, non misura convenienza o utilità, ma indica **quanto le due configurazioni** raccontano la **stessa storia**, indipendentemente dalle grandezze assolute.

Valutazione bilineare

Usiamo la forma bilineare vista sopra inserendo i dati dell'esempio.

$$B(x,y) = x^T A y$$

In generale, una forma bilineare non richiede che la matrice A sia simmetrica o definita positiva: qualsiasi matrice quadrata genera una forma bilineare ben definita. Per questo motivo, anche una matrice non simmetrica può essere utilizzata come matrice di struttura del mercato, quando l'obiettivo è costruire una funzione di valutazione che pesi e combini le componenti in modo direzionale.

Solo quando si vuole interpretare B come una metrica o come una misura simmetrica e normalizzabile di similarità tra profili, allora è necessario che A sia simmetrica e (semi)definita positiva (non entro nella distinzione tra definita e semidefinita positiva). Nel caso presente, invece, la forma bilineare è usata come strumento di valutazione economica, e quindi non è soggetta a tali vincoli geometrici.

Svolgendo i calcoli otteniamo $B = 63,8$ che, normalizzato in modo analogo al prodotto scalare, fornisce:

$B_{\text{norm}} = 1,1$ **Interpretazione economica di B**

$1,00 \rightarrow$ interazione neutra (come un mercato “piatto”)

$> 1 \rightarrow$ struttura di mercato favorevole

$< 1 \rightarrow$ struttura penalizzante

Qui $1,10$ significa che a parità di quantità e prezzi, la struttura del mercato valorizza questa combinazione di beni di **circa il 10%** rispetto a una valutazione puramente dimensionale.

Notiamo che i **due valori normalizzati** — quello ottenuto con il prodotto scalare e quello derivato dalla forma bilineare — **non sono confrontabili**, perché si basano su metriche differenti. Nel primo caso la metrica è quella euclidea; nel secondo caso la matrice A introduce una geometria diversa, che riflette la struttura del mercato. I due spazi risultanti non sono geometricamente equivalenti e quindi i valori normalizzati non possono essere messi a confronto diretto.

Facendo riferimento a valori generici della matrice

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

a_{11} — Valutazione diretta del bene 1

(pane $\rightarrow$ pane)

- Misura quanto il sistema valorizza il bene 1 in sé
- È un peso intrinseco

Dipende da:

- domanda strutturale
- politiche di sostegno
- ruolo sociale del bene

Esempio:

- Se il pane è bene essenziale $a_{11} \rightarrow$ alto
- Se è marginale $\rightarrow a_{11}$ basso

a_{22} — Valutazione diretta del bene 2

(vino $\rightarrow$ vino)

È analogo a a_{11} , ma si riferisce al secondo bene.

Riflette le seguenti caratteristiche:

- valore culturale
- margine
- posizionamento di mercato

Esempio: Vino pregiato, export-oriented $\rightarrow a_{22} > a_{11}$

a_{12} — Effetto del bene 2 sulla valorizzazione del bene 1

(vino $\rightarrow$ pane)

Qui entriamo nella parte strutturale vera, cioè quanto la presenza / il prezzo / la quantità del bene 2 modificano il valore economico del bene 1. È un effetto incrociato.

Esempi:

- Pane e vino come beni complementari $\rightarrow a_{12} > 0$
- Vino di lusso che sposta consumo dal pane $\rightarrow a_{12} < 0$
- Mercati indipendenti $\rightarrow a_{12} = 0$

? $a_{21} > 0$ — Effetto del bene 1 sulla valorizzazione del bene 2

(pane $\rightarrow$ vino)

- Simmetrico concettualmente a a_{12} , ma non necessariamente uguale
- Esprime una possibile asimmetria del sistema

Esempio:

- Il pane aumenta il consumo di vino (trattorie) $\rightarrow a_{21} > 0$
- Ma il vino non aumenta molto il consumo di pane $\rightarrow a_{12} < a_{21}$

Questo è il motivo per cui A **non** deve essere **simmetrica** in economia. Infatti nella matrice

$A = \begin{bmatrix} \text{valore diretto pane} & \text{influenza vino} \\ \text{influenza pane} & \text{valore diretto vino} \end{bmatrix}$

gli **elementi diagonali** misurano il **valore diretto**, quelli **fuori diagonale** misurano le **relazioni**.

Conclusione

Spero di aver dato almeno un'idea di come si possa costruire una valutazione attraverso strumenti matematici espliciti, in modo che non sia un atto arbitrario ma un processo strutturato e distinguibile dal giudizio.

Vettori, norme, prodotti scalari e forme bilineari — l'algebra lineare in generale — servono più di ogni altro strumento matematico a rendere visibile ciò che spesso resta implicito.

Ogni scelta di un criterio, ogni peso assegnato a una componente, ogni relazione introdotta tra grandezze è una decisione di progetto; e la matematica permette di mostrarla con chiarezza, senza ambiguità.

Un modello di valutazione non è mai neutrale, ma può essere reso trasparente, così da trasformare la valutazione in un'operazione controllabile, ripetibile, condivisibile. Il giudizio, invece, dovrebbe restare un atto umano, che nessuna formula può sostituire.

Anche se il condizionale mi pare inevitabile in un'epoca — la nostra — in cui automazione e intelligenza artificiale tendono a trasformare ogni decisione in un output, ricordare questa distinzione è essenziale: la matematica può guidare la valutazione, ma il giudizio — quello autentico — deve rimanere responsabilità nostra.

Estratto da "<https://www.electroyou.it/mediawiki/index.php?title=UsersPages:Clavicordo:provvisorio>"