



Claudio Bonechi (clavicordo)

TLC BIGNAMI 1A PARTE

25 November 2019

Premessa

L'intento di questo EYBignami è divulgativo: vuole offrire una panoramica sulle telecomunicazioni senza entrare nei dettagli ma presentando una sintesi dei principali concetti e formule usati nella tecnica delle telecomunicazioni. I contenuti sono estratti dal libro on line "Trasmissione dei Segnali e Sistemi di Telecomunicazione" di Alessandro Falaschi, docente presso l'Università La Sapienza di Roma, che ne ha gentilmente autorizzato l'uso, disponibile integralmente per il **download gratuito** su <http://www.teoriadeisignali.it> e che potrà essere usato per gli approfondimenti. Il prof. Falaschi infatti mette a disposizione il suo libro nel preciso intento di far circolare l'informazione anziché sottrarla al pubblico mettendola in vendita.

Considerata la vastità dell'argomento e volendo evitare una pura raccolta di formule, ho approfittato del capitolo intitolato "Una visione di insieme" copiandolo direttamente e inserendo poi commenti e pezzi dei capitoli successivi. L'attenzione cercherà comunque di concentrarsi sugli aspetti concettuali più che su quelli matematici (visibili direttamente nel libro a chi è interessato) chiedendo scusa in anticipo a coloro che li troveranno esposti in modo troppo elementare. Peraltro, a causa della loro complessità, alcuni argomenti verranno solo accennati.

Introduzione

Il libro è impostato sulla grande divisione tra SEGNALI e SISTEMI considerati come le principali categorie delle telecomunicazioni (comunicazioni "a distanza").

Lo scopo delle telecomunicazioni è trasmettere/ricevere messaggi da una Sorgente (di messaggi) a una Destinazione in modo efficace (riconoscibilità in ricezione) ed efficiente (economicità). Occorre però tenere presente un fatto fondamentale: il **contenuto informativo** dei messaggi è cosa diversa dal loro **supporto energetico**. I *messaggi* sono entità che si muovono nello spazio e per farlo hanno bisogno di supporti energetici, che sono detti "**segnali**". Che siano, luminosi, acustici, tattili, elettrici i segnali implicano sempre variazioni di energia. Senza energia non c'è comunicazione. La comunicazione di cui ci occupiamo qui riguarda solo il trattamento migliore possibile dei *segnali*, sia per renderli adatti alla natura dei messaggi che devono trasportare, sia per consentirne il viaggio attraverso lo spazio e farli riconoscere al destinatario. Per contro, ci disinteressiamo completamente del contenuto informativo (significato) dei messaggi.

Il modello sottostante di Fig. 1.1 è quindi un modello di comunicazione fisica, che riguarda riguarda solo i segnali.

Quando la comunicazione è bidirezionale, come nella telefonia e nell'informatica, il modello va semplicemente raddoppiato e invertito: la Destinazione (o meglio il Destinatario) diventa anche Sorgente e la Sorgente iniziale diventa anche Destinazione.

In generale:

- I SEGNALI sono variazioni di energia (elettromagnetica o acustica) che si propaga nello spazio, a cui "a monte" viene

attribuito un significato finalizzato a trasportare informazione ma che, come si diceva, la tecnica delle telecomunicazioni non tiene in considerazione. Il concetto di "variazione" è fondamentale: senza variazione non c'è informazione, né statica, né tantomeno in movimento..

- I SISTEMI sono apparati fisici che generano i segnali e consentono loro di trasportare messaggi da una sorgente a un destinatario.

Di seguito ho riportato una parte della "visione d'insieme" del libro, per poi focalizzarsi sulla rappresentazione dei segnali analogici.

1.1 Trasmissione dell'informazione

Per inviare un *messaggio informativo* da un luogo ad un altro sono coinvolti un discreto numero di apparati differenti e cooperanti, spesso organizzati *in rete*. La trasmissione può riguardare un messaggio generato al tempo stesso della sua trasmissione, oppure esistente a priori. Il supporto fisico del messaggio, chiamato *segnale*, identifica due categorie molto generali: quella dei segnali *analogici*, e quella dei segnali *numerici*. Nel primo caso rientra ad esempio la voce umana, mentre esempi di segnali numerici sono i documenti conservati su di un computer.

Sorgente, destinatario e canale L'origine del segnale da trasmettere è indicata (vedi Fig. 1.1) come *sorgente*, di tipo analogico o numerico per i due tipi di segnale. Ciò che giace tra sorgente e *destinatario* viene descritto da una entità astratta denominata *canale* di comunicazione, le cui caratteristiche condizionano i messaggi trasmessi.

Distorsioni e disturbi Il canale può ad esempio imporre una limitazione alla *banda di frequenze* del segnale in transito¹; cause fisiche ineliminabili producono inoltre, al lato ricevente, l'insorgere di un segnale di disturbo additivo, comunemente indicato con il termine di *rumore*, che causa la ricezione di un segnale diverso da quello stesso presente all'uscita del canale. Pertanto, ci si preoccupa di caratterizzare il canale in modo da scegliere i metodi di trasmissione più idonei a rendere minima l'alterazione del messaggio trasmesso.

Rapporto segnale-rumore L'entità delle alterazioni subite dal messaggio viene spesso quantificata nei termini del *rapporto segnale rumore* (SNR o SIGNAL-TO-NOISE RATIO), che rappresenta un indice di qualità del collegamento stesso, e che per ora definiamo genericamente come il

¹Approfondiremo nel seguito il senso di questa locuzione; per ora è sufficiente interpretarla in termini generici, ovvero di fedeltà della riproduzione al segnale originario.

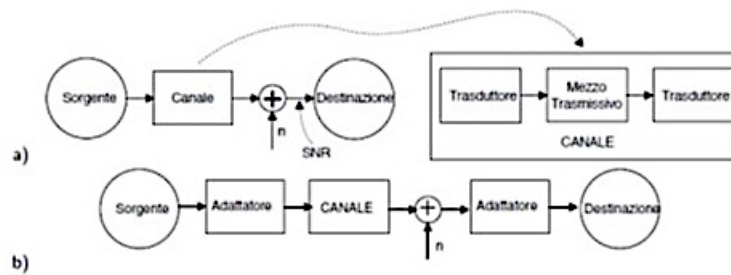


Figura 1.1: Elementi funzionali per la trasmissione dell'informazione

rapporto tra l'entità del segnale utile ricevuto e quello del rumore ad esso sovrapposto, indicato con n nella figura 1.1.

Trasmissione La Fig. 1.1a) evidenzia come il canale, nella realtà fisica, è costituito da un *mezzo trasmissivo* su cui si propaga un segnale di natura elettromagnetica, che viene convertito in tale forma da appositi *trasduttori* di trasmissione e ricezione². Considerando per il momento i trasduttori come facenti parte del canale stesso, proseguiamo l'analisi concentrandoci sugli ulteriori aspetti del processo di comunicazione.

Adattatori La figura 1.1b) evidenzia l'esistenza (in trasmissione, in ricezione od a entrambe le estremità) di dispositivi *adattatori*, che hanno lo scopo di ridurre od eliminare le cause di deterioramento del messaggio introdotte dalla trasmissione: si può ad esempio ricorrere ad *equalizzatori* per correggere la risposta in frequenza di un canale, ad *amplificatori* per contrastare l'attenuazione subita dal segnale, ovvero a *codificatori di linea* per rendere le caratteristiche del segnale idonee ad essere trasmesse sul canale a disposizione.

Rete La trasmissione lungo un canale in uso esclusivo alla coppia sorgente-destinazione è piuttosto raro; di solito i collegamenti sono condivisi tra più comunicazioni, ognuna con differente origine e destinatario. Il problema della condivisione delle risorse trasmissive, ed il coordinamento di queste attività, produce la necessità di analizzare in modo esplicito le *reti di telecomunicazione*, che entrano a far parte integrante dei sistemi di trasmissione dell'informazione.



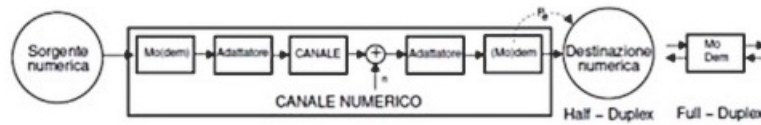
Gli aspetti delle telecomunicazioni brevemente accennati sono immediatamente applicabili a segnali di natura *analogica*, in cui il segnale è definito per tutti gli istanti di tempo, ed assume valori qualsiasi. Nel caso invece in cui il segnale è definito solo per istanti di tempo discreti e valori discreti, si entra nell'ambito delle *trasmissioni numeriche*.

1.2 Trasmissioni numeriche

Sorgente e destinazione numerica il messaggio informativo in questo caso è di natura discreta, ossia ad intervalli di tempo regolari sono prodotti *simboli* appartenenti ad un insieme finito, come ad es. le lettere dell'alfabeto;

²Un classico esempio di trasduttore è quello dell'antenna, nel caso di trasmissione radio.

Modem i simboli che compongono un segnale *numerico* devono essere trasformati in un segnale analogico mediante l'utilizzo di dispositivi chiamati *modem*³ (o *codificatore di linea*), come rappresentato dalla figura seguente, in cui è evidenziato come per una trasmissione unidirezionale⁴ occorra solo *metà* delle funzioni del modem per entrambi i lati del collegamento, mentre nel caso di collegamento *full duplex* (in cui entrambi gli estremi possono essere contemporaneamente sorgente e destinazione) il modem opera allo stesso tempo nelle due direzioni.

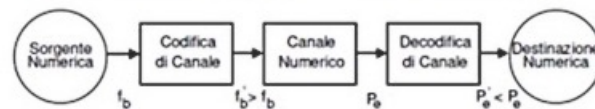


Canale numerico la figura precedente suggerisce come sia possibile racchiudere tutto ciò che è compreso tra i due modem in un *unico* blocco, denominato *canale numerico*. Quest'ultimo è concettualizzato come una entità autonoma, e nel progetto di un sistema di comunicazione numerica è caratterizzato da un *fattore di qualità* individuato dalla ...

Probabilità di errore quando il modem ricevente (in figura indicato come *decisore*) produce un simbolo *diverso* da quello trasmesso si verifica un *errore*, e la frazione di questi eventi rispetto al totale costituisce la *probabilità di errore*. Gli errori sono causati dal *rumore additivo* presente in uscita dal canale analogico, e/o dalle alterazioni introdotte dallo stesso. Evidentemente, le *prestazioni* individuate dalla probabilità di errore sono strettamente legate a quelle individuate dal rapporto segnale-rumore per il canale analogico sottostante.



Codifica di canale Nelle trasmissioni numeriche, si può introdurre una *ridondanza* nella sequenza trasmessa, inviando più simboli di quanti non ne produca la sorgente, e quindi di fatto *aumentando* il numero di simboli da trasmettere per unità di tempo; i simboli in più sono scelti in modo da essere in qualche modo *dipendenti* tra loro, e questa loro caratteristica rende possibile la riduzione della probabilità di errore di cui soffre il canale numerico. Infatti, grazie alla dipendenza (nota) tra i simboli trasmessi, il ricevitore è ora in grado di "accorgersi" che si è verificato un errore, in quanto la dipendenza prevista non è più rispettata; pertanto, il ricevitore può attuare delle contromisure. La ridondanza introdotta può essere così elevata da permettere la correzione di errori isolati⁵, oppure il ricevitore può semplicemente richiedere la *ritrasmissione* del simbolo errato. Le trasformazioni del segnale ora descritte prendono il nome di *codifica di canale*, e devono essere "rimosse" all'uscita dello stesso da un processo inverso di *decodifica*.

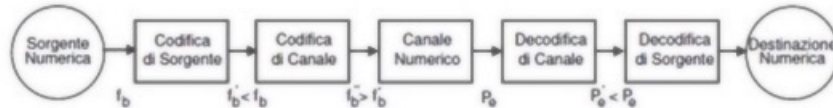


³La parola *Modem* è una contrazione delle due parole *modulatore-demodulatore*.

⁴Nelle trasmissioni unidirezionali, sorgente e destinazione non si scambiano i ruoli. La trasmissione stessa viene anche indicata con il termine di *half-duplex*.

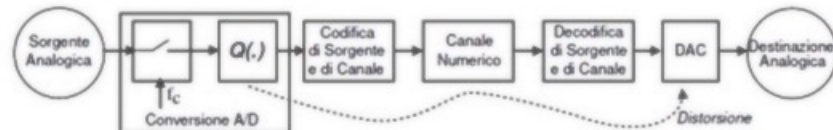
⁵Si parla in questo caso di codifica FEC, ovvero di *Forward Error Correction*.

Codifica di sorgente Possono essere introdotti due ulteriori blocchi, che operano una *codifica* (e relativa *de-codifica*) di *sorgente* sulla sequenza trasmessa, con uno scopo per così dire "inverso" a quello della codifica di canale: infatti, la codifica di sorgente *rimuove le dipendenze* tra i simboli presenti nelle sequenze generate dalla sorgente, ottenendo di fatto una riduzione del numero di simboli da trasmettere per unità di tempo⁶. Un tipico esempio di codifica di sorgente è rappresentato dagli algoritmi di compressione esistenti per i file di computer (come i file *zippati*); in tal caso, il fattore di compressione ottenibile dipende dalla natura del file trattato, ed è tanto maggiore quanto più quest'ultimo presenta caratteristiche di ripetitività e quindi di predicibilità del suo contenuto. In altre parole, l'uscita di un codificatore di sorgente è una sequenza di simboli tendenzialmente *indipendenti* tra loro, nel senso che ogni forma di predicibilità di un simbolo a partire dai circostanti è stata rimossa.



Campionamento e quantizzazione Poniamoci ora il problema di utilizzare un *canale numerico* per effettuare una *trasmissione analogica*. Il vantaggio di tale "contorsione" è da ricercarsi nel migliore comportamento delle trasmissioni numeriche rispetto ai disturbi, nonché alla loro *generalità*⁷. Per ottenere il risultato desiderato, occorre applicare alla sorgente analogica un procedimento di *campionamento*, prelevandone i valori ad istanti discreti, e quindi di *quantizzazione*, rappresentando tali valori mediante un insieme finito di simboli. Il risultato è una sequenza numerica che può essere di nuovo convertita nel segnale originario, utilizzando un dispositivo di conversione *digitale-analogica* (DAC) dal lato del ricevitore. Esempi pratici di quest'ultimo processo sono ben noti, come ad esempio nel caso dei CD audio.

Rumore di quantizzazione La riduzione dei valori campionati nell'ambito di un insieme finito produce una *ulteriore distorsione*, che può essere pensata sommarsi in ricezione al segnale originario, producendo una nuova fonte di degrado. L'entità del rumore dovuto alla quantizzazione è inversamente legata alla *risoluzione del quantizzatore*, ovvero alla capacità di differenziare tra valori di ingresso molto vicini tra loro. In definitiva, la distorsione risulta tanto minore, quanto maggiore è il flusso informativo⁸ prodotto dal quantizzatore, espresso in bit/secondo.



Teoria velocità-distorsione CLAUDE SHANNON enunciò negli anni '50 una serie di teoremi, che sono la base dell'analisi dei sistemi di comunicazione. Tali aspetti sono affrontati al Cap. 11, e possono essere riassunti nei seguenti tre enunciati:

⁶Pensiamo per similitudine ad un imballaggio, il cui contenuto è prima disposto in modo da occupare il minimo volume (codifica di sorgente), ed a cui viene poi aggiunto del materiale antiurto (codifica di canale).

⁷Nei collegamenti numerici, non occorre specializzare il metodo di trasmissione al mezzo a disposizione, anzi quest'ultimo è totalmente "mascherato" dal fornitore del collegamento numerico stesso.

⁸Vedremo infatti al § 4.2.1.1 che un aumento della risoluzione del processo di quantizzazione corrisponde ad un aumento del numero di bit necessari a rappresentare ogni valore (o campione) di segnale.

- un qualsiasi canale pone un limite al massimo flusso informativo che transita in esso. Il limite deriva dai vincoli che il canale impone sulla massima banda **B** del segnale in transito, sulla massima potenza di segnale **S** ricevuta, e sulla potenza di rumore **N** presente al ricevitore. Il massimo flusso di informazione in transito prende il nome di *capacità di canale* **C**, e può essere espresso come $C = B \log_2 \left(1 + \frac{S}{N}\right)$ bit/sec. In questi termini, la massima velocità di trasmissione in un canale può dipendere da una limitazione sulla banda, o sulla potenza, od essere causata da un eccessivo rumore: solo alterando uno di questi fattori (scegliendo un diverso canale), è possibile trasmettere a velocità più elevata;
- una qualsiasi sorgente produce un flusso informativo in bit/secondo tanto più elevato quanto minore è la distorsione introdotta dal processo di quantizzazione;
- considerando una coppia sorgente + canale, dato che il canale limita il massimo flusso informativo prodotto dalla sorgente, quest'ultima verrà necessariamente riprodotta con una distorsione tanto maggiore quanto minore è la capacità di canale. A meno di non impiegare più tempo per la trasmissione.... oppure di cambiare canale (ad esempio, usandone uno con una banda maggiore).

1.3 Segnali analogici, certi ed aleatori

I segnali analogici, indicati con $s(t)$ (con le parentesi tonde), rappresentano l'*andamento nel tempo* di una grandezza fisica. Come esempio possiamo citare il *segnale vocale*, in cui un'onda trasversale di pressione-velocità è convertita in una tensione da un microfono. Oppure citare un *segnale di immagine*, che è bidimensionale, definito quindi su di un piano anziché nel tempo, rappresentato da una grandezza $S(x, y)$ che ne individua la luminanza, e scandito per linee generando un segnale temporale. Un segnale può anche presentare *valori complessi*⁹, e in tal caso assume contemporaneamente due diversi valori (parte reale e parte immaginaria, oppure modulo e fase).

E' importante distinguere tra i segnali cosiddetti *certi* e quelli *aleatori*. Un esempio di *segnale certo* può essere una cosinusoide di cui sia nota sia l'ampiezza che la fase, mentre un *segnale aleatorio* non è noto con esattezza prima che questo venga prodotto (ad esempio il rumore di un ruscello, o le notizie diramate da un telegiornale). L'insieme di tutti i segnali aleatori appartenenti ad una medesima classe viene indicato nel suo complesso come *processo aleatorio*, ed un segnale particolare di questo insieme come una sua *realizzazione*.

1.3.1 Rappresentazione di segnali analogici

Lo studio delle proprietà dei segnali si articola prendendo in considerazione per gli stessi rappresentazioni alternative, scelte in modo da poter valutare più agevolmente le alterazioni subite nel passaggio attraverso sistemi fisici. In particolare, sarà definito lo *sviluppo in serie di Fourier* per la rappresentazione dei segnali periodici, e quindi la *trasformata di Fourier* che descrive una classe più ampia di segnali.

L'analisi di Fourier consente di definire il concetto di *banda occupata* da un segnale, nonché di come la sua potenza e/o energia si *distribuisce in frequenza*; quest'ultimo andamento viene indicato con il termine di *spettro di densità di potenza* (o di *energia*).

⁹Come vedremo al cap. 9, un segnale a valori complessi è il risultato di una particolare rappresentazione, detta *inviluppo complesso*, utile nell'analisi dei segnali modulati.

SEGNALI

Concentriamoci ora sulla descrizione nei **domini del tempo e della frequenza**

È opportuno tenere presente che i segnali subiscono varie trasformazioni durante il processo di telecomunicazione. Spesso (ormai quasi sempre) accade che un segnale generato da una Sorgente venga "trasportato" da un altro segnale che è più adatto al particolare canale usato. Questo si

ottiene tramite il procedimento conosciuto come "modulazione" di un segnale (portante) da parte di un altro segnale (modulante). Quest'ultimo è tipicamente un segnale emesso dalla sorgente, ed è quindi il segnale che trasporta un contenuto informativo, un messaggio. Il segnale detto portante non trasporta informazione. Il segnale modulante può essere:

- **analogico**: rappresentato da una funzione temporale continua
- **numerico**: rappresentato da una funzione temporale discontinua a due o più livelli ma in numero finito.

Descrizione dei segnali

La descrizione dei segnali utile per i calcoli è solo quella matematica: un segnale elettrico viene rappresentato come tensione, corrente, energia, potenza, espresse in funzione del tempo. Per un segnale acustico si usano spesso la pressione sonora o l'intensità sonora.

L'elemento "tempo" è essenziale per i segnali. Anche quando i segnali sono variazioni energetiche nello spazio, come avviene nelle immagini, per la trasmissione ci si riconduce sempre a variazioni nel tempo.

La rappresentazione dei segnali nel tempo, però, non è la più comoda quando si vuole dimensionare la trasmissione e stabilire il comportamento dei segnali.

Poiché l'energia si propaga per onde, ossia per oscillazioni dell'energia stessa, viene comodo rappresentarla a partire dai parametri più semplici delle onde e cioè ampiezza e frequenza. Ma questo si applica immediatamente e facilmente solo al caso dell'oscillazione più semplice, quella sinusoidale.

Mi sembra opportuno fare un'ulteriore precisazione, che mi è stimolata dalla domanda nel Forum Telecomunicazioni posta da uno studente di ingegneria elettronica in merito al significato fisico di certe descrizioni matematiche, che ha ricevuto una risposta molto ben formulata. La precisazione è la seguente: la rappresentazione e descrizione matematica dei segnali riguarda solo la loro forma e non il loro significato fisico, ossia energetico. Ne segue che per usare le formule che la teoria ci fornisce occorre sempre associarle con le **unità di misura appropriate**. Ad esempio, spesso diciamo, frettolosamente, che la potenza associata a una tensione di forma $A \cdot \sin(\omega t)$ è $= A^2$; ma questo è chiaramente sbagliato se non si tiene presente che si sottintende che la suddetta potenza è quella disponibile su un carico resistivo da 1Ω . In questo senso, anche l'uso dei numeri complessi può confondere se non si tiene presente che modulo e fase vanno esaminati con cura per capire come viene descritta l'energia: un esempio è la distinzione tra Potenza apparente, reattiva e attiva.

SEGNALI ANALOGICI

Cominceremo a illustrare gli strumenti che servono per l'analisi dei segnali analogici. Ricordiamoci che sui canali fisici viaggiano SEMPRE segnali ANALOGICI, anche se trasportano segnali numerici (digitali).

Ripasso trigonometrico

Adesso, mi perdonino tutti, torniamo un po' indietro ripassando la funzione “seno” di ϕ , (sulla destra come funzione del tempo ponendo $\phi = \omega t$) :

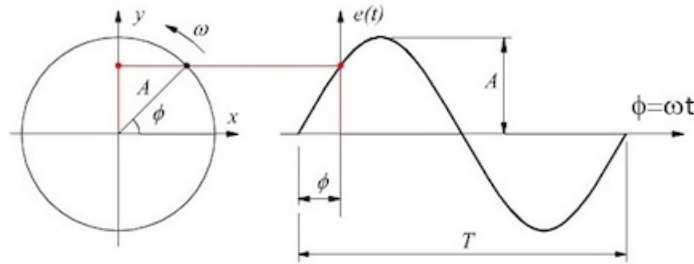


Fig. 2 Funzione "seno"

Nella parte destra della Fig. 3 il punto A è un punto arbitrario di un lato dell'angolo α , perché il rapporto AK/VA si mantiene costante. Ciò consente di scegliere $VA = 1$ e di rappresentare il tutto su un piano cartesiano servendosi di un cerchio (di raggio 1) in cui è inscritto l'angolo α . Il rapporto VK/VA è il coseno di α . Si usano anche i numeri negativi, sia per gli angoli che per seno e coseno. Con questa convenzione l'angolo α è negativo quando è misurato in senso orario ed è positivo quando è misurato in senso antiorario, sempre a partire dall'asse x.

La funzione sinusoidale $y = \sin(\phi)$ lega l'angolo ϕ con un numero definito tramite la trigonometria.

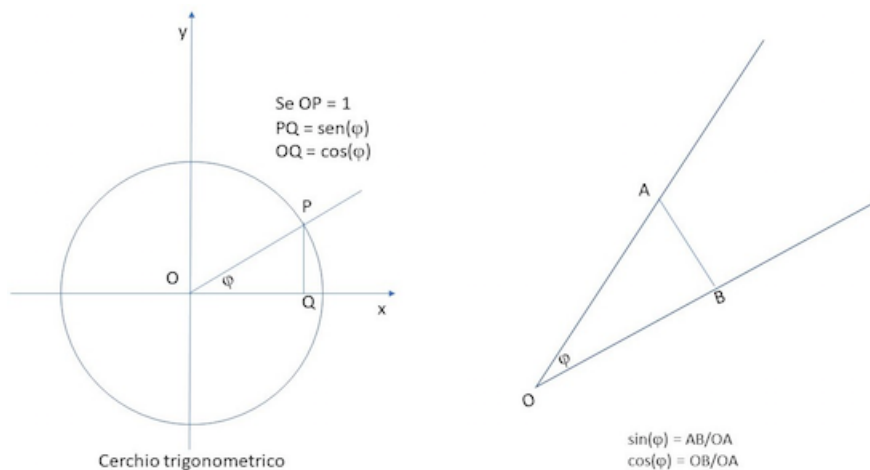


Fig.3 Seno di un angolo, definizione geometrica

Poiché il “grado” come unità di misura dell'angolo è scomodo in quanto incongruo con il Sistema Internazionale delle misure, si iscrive l'angolo in un cerchio e si costruisce il “radiante”, un numero che esprime il rapporto tra l'arco di cerchio sotteso dall'angolo e il raggio del cerchio (che viene posto = 1): sapendo che il rapporto tra l'arco di 360° (cioè la circonferenza) e il raggio vale 2π , con una semplice proporzione si ottiene il valore in radianti di qualsiasi angolo. Dunque 360 gradi = 2π radianti, 180 gradi = π radianti, etc. ; un radiante vale circa 57 gradi. Per la misura degli angoli il radiante sostituisce quindi il grado.

Ma noi vogliamo usare il tempo come variabile indipendente, perchè i segnali si svolgono nel tempo. Comesi passa dall'angolo al tempo? Semplice, tramite la “velocità angolare”, immaginando il raggio del cerchio che gira (in senso antiorario, per convenzione “positivo”) a velocità angolare costante $\omega = \alpha/t$, quindi $\alpha = \omega t$ che si misura in radianti/secondo. Ne consegue che si può scrivere $e(t) = \sin(\omega t)$, mentre l'angolo ωt viene chiamato “fase” e indicato spesso anche con le lettere greche θ oppure φ .

La velocità angolare è = angolo percorso / tempo impiegato a percorrerlo. Nel tempo T l'angolo raggiunge 360 gradi e il seno va a 0 e ricomincia il suo ciclo oscillante, come se l'angolo ripartisse da 0 , ossia diventa **periodico** e T viene detto “**periodo**”.

E se invece che in “radianti al secondo” voglio misurare la velocità angolare in “giri al secondo”? Basta ricordarsi che l'angolo di 360 gradi viene detto “angolo giro”; quindi quanti giri ci sono in T secondi? Esattamente $2\pi/T$. Ne segue che la quantità $1/T$ esprime il numero di giri (o di oscillazioni) al secondo, ed è detta comunemente “frequenza” (f), misurata in “Hertz”, dove $1 \text{ Hz} = 1$ oscillazione o giro al secondo.

Quindi la nostra variabile indipendente diventa il **tempo**, sia pure indirettamente, tramite la relazione $\alpha = \omega t$. Si può visualizzare il $\sin(\omega t)$ guardando un ciclista che pedala: visto esattamente da dietro, ciascun pedale va su e giù con legge sinusoidale.

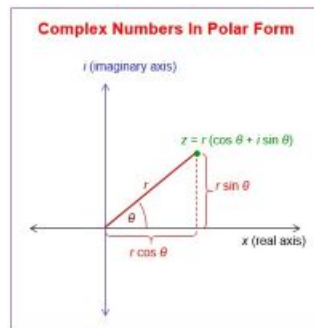
L'altro elemento che individua la sinusoide è l'ampiezza massima “ A ”, che va a moltiplicare la funzione seno (che oscilla tra -1 e $+1$).

Trasformando l'angolo in prodotto della velocità angolare per il tempo abbiamo ottenuto una funzione sinusoidale del tempo (supponendo implicitamente che la velocità angolare rimanga costante, altrimenti la funzione seno è una funzione delle due variabili, ω e t) caratterizzata da due soli parametri: A e ω oppure A e f . A questi due parametri si aggiunge un terzo parametro che segna o la fase di partenza θ_0 oppure la differenza tra due sinusoidi. Questa differenza di fase si traduce immediatamente in distanza temporale (anticipo o ritardo) di una sull'altra, naturalmente conoscendo la frequenza: se la frequenza delle due sinusoidi è la stessa, lo sfasamento si mantiene costante. Ad esempio, se due sinusoidi hanno frequenza di 400 Hz e sono sfasate di 30° , la distanza temporale tra le due è la dodicesima parte ($30/360$ oppure $\pi/6$) di un periodo ($1/400 = 2,5 \text{ ms}$) = $0,208 \text{ ms}$.

Attenzione a non confondere la **fase** con lo **sfasamento** (che è una differenza tra due fasi). La fase aumenta nel tempo in modo continuo con velocità ω , ossia $\theta = \omega t$ oppure $\theta = 2\pi f t$ dato che $\omega = 2\pi f$. Ad esempio, se al tempo 0 la fase vale 0 radianti e se la frequenza è 400 Hz, dopo 2 minuti la fase è (circa) $= 2 \cdot 3,14 \cdot 400 \cdot 2 \cdot 60 = 301.440$ radianti o (esattamente) 48.000 (angoli) giri o oscillazioni.

Usando questi tre parametri, ampiezza massima, frequenza e sfasamento (spesso ne bastano 2) possiamo rappresentare i segnali sinusoidali “nel dominio della frequenza”. Ciò semplifica notevolmente i progetti e i relativi calcoli.

Numeri complessi



Il modo più semplice per farlo è usare i **numeri complessi**! Sembra una contraddizione, ma è così. Infatti, un numero complesso contiene **due** informazioni, **il modulo r e la fase θ , ottenuti dalla rappresentazione sul piano complesso (Reale - Immaginario)**. Dalla figura si vede come la parte immaginaria è $r \sin(\theta)$ mentre la parte reale è $r \cos(\theta)$. Associando il modulo r all'ampiezza max. **A** della sinusoide e la fase (del numero complesso) alla fase $\theta = \omega t$ della sinusoide temporale otteniamo un **fasore**, elemento ben noto agli elettrotecnici:

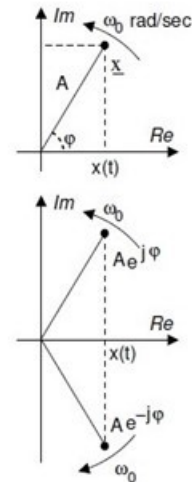
Un segnale del tipo $x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \varphi)$ è completamente rappresentato dal numero complesso $\underline{x} = Ae^{j\varphi}$ detto *fasore*, la cui conoscenza permette di riottenere il segnale originario mediante la relazione $x(t) = \Re\{\underline{x} \cdot e^{j2\pi f_0 t}\}$, che una volta sviluppata⁵ risulta infatti pari a

$$\begin{aligned} x(t) &= \Re\{Ae^{j\varphi} \cdot e^{j2\pi f_0 t}\} = A \cdot \Re\{e^{j(2\pi f_0 t + \varphi)}\} = \\ &= A \cdot \Re\{\cos(2\pi f_0 t + \varphi) + j \sin(2\pi f_0 t + \varphi)\} = \\ &= A \cos(2\pi f_0 t + \varphi) \end{aligned}$$

Osserviamo che il risultato ottenuto può interpretarsi graficamente come l'aver impresso al fasore una rotazione di velocità angolare $\omega_0 = 2\pi f_0$ radianti/secondo in senso antiorario, ed aver proiettato il risultato sull'asse reale. In alternativa, possiamo esprimere il segnale $x(t)$ di partenza anche come

$$x(t) = \frac{1}{2} \left\{ \underline{x} e^{j2\pi f_0 t} + \underline{x}^* e^{-j2\pi f_0 t} \right\} \quad (2.2)$$

Tale operazione coinvolge anche le *frequenze negative*, e corrisponde a tener conto di un secondo vettore rotante, che si muove ora in senso orario, che ha una parte immaginaria di segno sempre opposto al primo, e che è moltiplicato per il coniugato del fasore. Vedremo tra breve che l'ultima espressione fornita è esattamente quella della *serie di Fourier* per il caso in questione.



⁵L'espressione più generale e^{γ} con $\gamma = \alpha + j\varphi$ è ancora un numero complesso, con fase φ e modulo e^{α} . Infatti $e^{\gamma} = e^{\alpha + j\varphi} = e^{\alpha} e^{j\varphi} = e^{\alpha} (\cos \varphi + j \sin \varphi)$.

Dove è stata usata la

2.1.2 Formula di Eulero

L'esponenziale $e^{j\varphi}$ è un particolare numero complesso con modulo pari ad uno², e che quindi si scompone in parte reale ed immaginaria come

$$e^{\pm j\varphi} = \cos \varphi \pm j \sin \varphi \quad (2.1)$$

La relazione (2.1) è nota come *formula di Eulero*³, per mezzo della quale le funzioni trigonometriche possono essere espresse in termini di esponenziali complessi come

$$\cos \varphi = \frac{e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}}{2} \quad \text{e} \quad \sin \varphi = \frac{e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}}{2j}$$

Tali relazioni possono tornare utili nel semplificare i calcoli, trasformando i prodotti tra funzioni trigonometriche in somme di angoli⁴.

La formula di Eulero permette di rappresentare le sinusoidi con degli **esponenziali**. Questo, stranamente, semplifica i calcoli, perché i **prodotti** di esponenziali diventano **somme** (degli esponenti), una fonte di semplificazione che compensa abbondantemente la necessità di ricorrere ai numeri complessi. Un'altro aiuto viene dal considerare in numeri complessi come vettori, utilizzabili anche graficamente con le operazioni vettoriali conosciute. Ad esempio quella per cui la somma di due numeri complessi "coniugati" dà un numero reale, pari alla componente reale di entrambi.

Ora, gli elettrotecnici possono in generale accontentarsi dei soli fasori perché per lo più lavorano con la tensione di rete elettrica 230 V a 50 Hz, che è sinusoidale a frequenza costante (salvo poche eccezioni): il fasore quindi usa solo i due parametri ampiezza e sfasamento.

Spettro di frequenza

Ma nelle telecomunicazioni le frequenze sono tutt'altro che costanti! E, più ancora, i segnali sinusoidali sono l'eccezione e non la regola. Quindi servono rappresentazioni un po' più elaborate per passare al dominio della frequenza.

Si comincia allora con segnali ancora periodici, ma di qualsiasi forma e frequenza di ripetizione $F = 1/T$

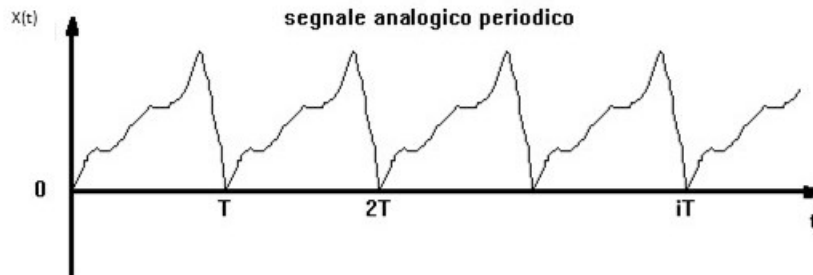


Fig. 4 Segnale periodico Un teorema di Fourier permette di rappresentare un segnale siffatto come somma infinita e pesata di fasori, ognuno di frequenza multipla intera di F .

$$x(t) = x(t + T) \quad \forall t$$

L'inverso di T è detto *frequenza fondamentale* $F = \frac{1}{T}$ o *prima armonica* di $x(t)$, espressa in Hertz, dimensionalmente pari all'inverso di un tempo [sec^{-1}].

Per i segnali periodici esiste una forma di rappresentazione basata sulla conoscenza di una serie infinita di coefficienti complessi $\{X_n\}$ denominati *coefficienti di Fourier*, calcolabili a partire da un periodo del segnale come

$$X_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-j2\pi n F t} dt \quad (2.3)$$

e che permettono⁶ la *ricostruzione* di $x(t)$ nella forma di una combinazione lineare di infinite funzioni esponenziali complesse $e^{j2\pi n F t}$, mediante l'espressione nota come *serie di Fourier*:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{j2\pi n F t} \quad (2.4)$$

serie F 1.jpg

La successione dei coefficienti X_n si chiama anche **Spettro di frequenza**.

In pratica, una **funzione periodica di periodo T** (sotto certe condizioni matematiche) è rappresentabile con una **somma di infinite sinusoidi dette "armoniche"**, che hanno ciascuna frequenza multipla intera della fondamentale $1/T$. Per fortuna solo le prime sinusoidi danno

un contributo significativo alla somma e, da una certa frequenza in poi, si possono trascurare, troncando la somma a pochi termini. Questo rende la serie di Fourier di grande utilità pratica.

I coefficienti di Fourier (detti nell'insieme "**Serie di Fourier**") si esprimono in modulo e fase e, dove non serve, solo in modulo, rappresentato con un **ariga** sull'asse delle frequenze. Occorre tenere presente che con il metodo degli esponenziali si utilizzano **frequenze "negative"**, che si capiscono meglio se si pensa alla velocità angolare di due vettori rotanti in senso opposto. Rispetto alla serie di Fourier calcolata "tradizionalmente" (con frequenze solo positive), i coefficienti X_n sono in numero doppio.

Per approfondimenti e spiegazioni "umane" di queste formule vi rimando al mio articolo <https://www.electroyou.it/clavicordo/wiki/trasformate-e-vettori>

in cui cerco di spiegare come una funzione possa essere rappresentata da un vettore riferito a una base ortonormale, che nel caso Fourier è costituito da funzioni ortogonali, quali sono appunto le funzioni sinusoidali.

Quando i segnali non sono più periodici, il dominio della frequenza si ottiene estendendo il concetto di serie di Fourier: se il periodo della funzione aumenta le righe dello spettro si infittiscono. Al limite, il periodo tende a infinito e la serie si infittisce al punto tale da diventare una funzione continua chiamata **Trasformata di Fourier (TdF o F-trasformata)**:

Al posto di una serie di coefficienti isolati (per quanto in numero infinito, la cosiddetta "infinità numerabile") ora abbiamo una **funzione $X(f)$** , che ci dice quanto sarebbe l'ampiezza max di ciascuna sinusoide di frequenza f . Inoltre questa volta la $x(t)$ ricostruita con l'operazione inversa (**antitrasformata**) non è più una somma di coefficienti X_n ma è un integrale di una funzione continua. Quindi la **TdF ha l'aspetto di una "densità"**:

La formula di ricostruzione, se messa a confronto con la serie di Fourier, può essere pensata come una somma integrale di *infinite* componenti $X(f) df e^{j2\pi ft}$ di ampiezza (complessa) infinitesima, evidenziando come ora siano presenti *tutte* le frequenze e non solo le armoniche. Una seconda analogia con la serie di Fourier deriva dal considerare un segnale $x(t)$ di durata limitata T , e calcolarne la $X(f) = \mathcal{F}\{x(t)\}$ per $f = \frac{n}{T} = nF$. In tal caso, è facile verificare² che risulta

$$X(f = nF) = T \cdot X_n \quad (3.2)$$

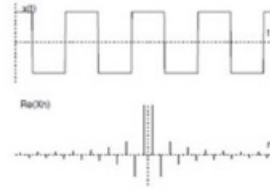
Piccolo confronto tra Serie di Fourier e Trasformata di Fourier

Due Serie di Fourier

Onda quadra simmetrica

$$x(t) = \begin{cases} +1 & |t| < T/4 \\ -1 & T/4 \leq |t| < T/2 \end{cases}$$

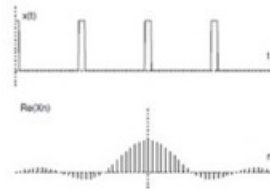
$$X_n = \begin{cases} \text{sinc}\left(\frac{n}{2}\right) & n \neq 0 \\ 0 & n = 0 \end{cases}$$



Treno di impulsi rettangolari

$$x(t) = \begin{cases} +1 & |t| < \tau/2 \\ 0 & \tau/2 \leq |t| < T/2 \end{cases}$$

$$X_n = \frac{\tau}{T} \text{sinc}\left(\frac{n\tau}{T}\right)$$



Una Trasformata di Fourier

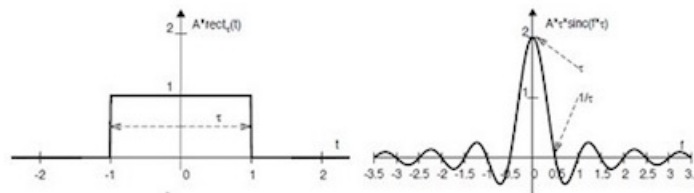


Figura 3.1: $\mathcal{F}$ -trasformata di un rettangolo di base $\tau = 2$ ed ampiezza $A = 1$

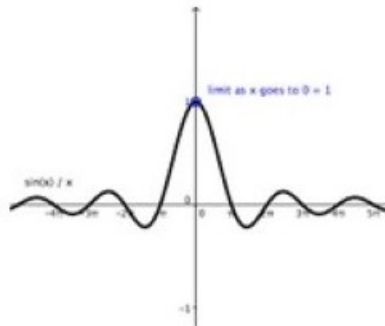
Come si vede, le figure rappresentano sulla sinistra la funzioni del tempo e nella parte destra lo spettro di frequenza. Per le prime due funzioni, che sono periodiche, lo spettro è “a righe”: in ascissa ci sono i multipli (n) della frequenza fondamentale $F = 1/T$ e in ordinata i valori delle ampiezze massime delle relative sinusoidi. Questi valori nel grafico sarebbero in realtà dei punti, perché la funzione è discontinua, ma non si vedrebbero, quindi si usa prolungare i punti con delle righe fino all'asse orizzontale. Lo spettro è calcolato (per comodità!) tramite numeri complessi, ma essendo lo spettro di un segnale "reale", diventa composto di numeri reali.

Inoltre, sempre per lo stesso motivo, vengono rappresentate le frequenze negative, che nella pratica non hanno senso, ma nei calcoli risultano comode. Il "vero" spettro sarà quindi la parte a destra dell'asse verticale.

La terza funzione, un impulso rettangolare isolato, non è periodica e quindi il suo spettro è una funzione continua della frequenza. Si noti come passando dalla prima alla terza funzione i punti (visualizzati con righe) delle funzioni “spettro di frequenza” si infittiscano fino a diventare un continuum, perché nella terza funzione temporale è come se il periodo diventasse infinito e di conseguenza la distanza tra le righe diventa = 0 e, se le si disegnassero, diventerebbero un riempimento dell'area sottesa dalla funzione.

Se nello spettro di frequenza si notano frequenze isolate che "spiccano" su tutte le altre, ossia che formano delle righe, significa che la funzione contiene delle periodicità, ossia parti che si ripetono uguali a se stesse nel tempo.

Si noti la funzione **sinc(x) = sin(x)/x** che si ritroverà continuamente nello studio delle comunicazioni. Quando la x tende a 0, questa funzione tende a 1.



Con la serie di Fourier e la TdF si passa dal dominio del **tempo** a quello della **frequenza per segnali di qualsiasi forma**, come sono poi i segnali delle comunicazioni multimediali, audio e video.

Nelle figure sopra si è mostrata solo la funzione “modulo” (ampiezze max delle sinusoidi componenti), ma in realtà serie di F. e TdF comprendono anche le rispettive funzioni “fase” (o “argomento”).

In termini semplificatori, bisogna dire che la serie di F. è vero che è una somma di infinite sinusoidi con ampiezze ricavate dalla funzione periodica di partenza, ma **queste sinusoidi non sono in generale tutte in fase tra loro**: quindi lo spettro di frequenza è composto in realtà da due funzioni, il modulo e la fase. Ma qui torna in agguato la **confusione tra fase e sfasamento**: la fase del numero complesso di Fourier rappresento sfasamento della sinusoide componente (rispetto alla fase del segnale presa come riferimento, quella al tempo $t=0$)! Si eliminerebbe la confusione se si dicesse che un numero complesso è fatto di “modulo” e di “argomento”. Ma quasi nessuno lo fa.

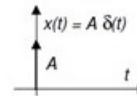
A un certo punto fu osservato che questa distinzione tra serie e trasformata di Fourier era un po' scomoda e che sarebbe stato meglio disporre di un'unica trasformazione, la TdF, per passare dal dominio del tempo a quello della frequenza. Ecco che fu introdotto l'**impulso matematico**.

3.4 Impulso matematico

Prima di esporre altre proprietà della trasformata di Fourier, occorre definire ed analizzare le proprietà della "funzione" *impulso matematico*, indicato con il simbolo $\delta(\cdot)$ e chiamato anche *delta di Dirac*. Questo è definito come un segnale $\delta(t)$ che vale zero ovunque, tranne per $t = 0$ dove vale infinito; per contro, l'area di $\delta(t)$ è *unitaria*:

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{con } t = 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

Da un punto di vista analitico, $\delta(t)$ non è una funzione, ma una *distribuzione*¹¹, definita come il limite a cui tende una successione di funzioni, come discusso in appendice 3.9.2. E' prassi rappresentare graficamente $A \cdot \delta(t)$ come una freccia (vedi figura) con scritto accanto il valore dell'area A .



Una proprietà fondamentale:

3.4.3 Proprietà di setacciamento

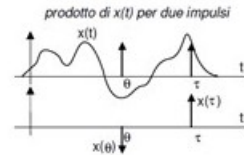
Osserviamo innanzitutto che il *prodotto* di un segnale per un impulso unitario dà come risultato lo stesso impulso, con *area* pari al valore del segnale nell'istante in cui è centrato l'impulso:

$$x(t) \delta(t - \tau) = x(\tau) \delta(t - \tau) \quad (3.6)$$

Questa considerazione consente di scrivere il valore di $x(t)$ per un istante $t = \tau$, nella forma

$$x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \delta(t - \tau) dt \quad (3.7)$$

La relazione (3.7) è detta proprietà di *setacciamento* (in inglese, *STEVING*) in quanto consiste nel passare (metaforicamente) al setaccio $x(t)$, che compare in entrambi i membri dell'espressione ottenuta, così come la farina compare *su entrambi i lati* del setaccio stesso.



Con il setacciamento si esprime in modo un po' contorto il valore della funzione in un determinato istante t , perchè la si esprime come valore dell'integrale definito della funzione moltiplicata per l'impulso.

Ma è come con i numeri complessi: con questo ausilio si possono semplificare e, soprattutto unificare, molte elaborazioni, come ad esempio la trasformata di Fourier di una funzione periodica espressa come serie di Fourier.

3.4.2 Trasformata di segnali periodici

Consideriamo un segnale periodico $x(t)$, del quale conosciamo lo sviluppo in serie

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{j2\pi n F t}$$

Applicando la proprietà di linearità, il risultato per la trasformata di una costante, e ricordando la proprietà della traslazione in frequenza, troviamo¹² che la $\mathcal{F}$ -trasformata di $x(t)$ vale:

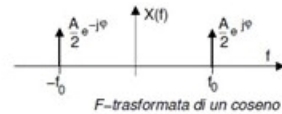
$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n \delta(f - nF)$$

Trasformata di un coseno Applichiamo il risultato trovato nel verso opposto, ossia per individuare le componenti armoniche, a partire dall'espressione della trasformata di Fourier. Nel caso di un coseno, che scriviamo

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \varphi) = A \frac{e^{j(2\pi f_0 t + \varphi)} + e^{-j(2\pi f_0 t + \varphi)}}{2}$$

la $\mathcal{F}$ -trasformata risulta:

$$\begin{aligned} X(f) &= \mathcal{F} \left\{ \frac{A}{2} (e^{j2\pi f_0 t} e^{j\varphi} + e^{-j2\pi f_0 t} e^{-j\varphi}) \right\} \\ &= \frac{A}{2} \{ e^{j\varphi} \delta(f - f_0) + e^{-j\varphi} \delta(f + f_0) \} \end{aligned}$$



in cui riconosciamo $X_1 = \frac{A}{2} e^{j\varphi}$ e $X_{-1} = \frac{A}{2} e^{-j\varphi}$ come mostrato in figura.

Per passare dal dominio del tempo a quello della frequenza e viceversa possiamo dunque disporre di **un unico strumento, la Trasformata di Fourier**.

L'introduzione dell'impulso matematico permette di unificare le rappresentazioni ma certamente rende tutto meno immediato, almeno in senso intuitivo, perché richiede sempre l'uso degli integrali. Infatti in sé l'impulso è infinito: solo la sua area è finita e vale 1. Ma sappiamo che l'area è regno degli integrali definiti....

Essendo l'impulso matematico *simile* a una funzione, esso può essere usata come funzione del tempo ma anche come funzione della frequenza.

Trasformata di Fourier di un treno di impulsi:

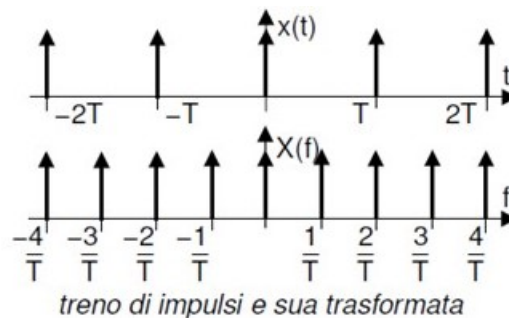


Fig. 5 TdF di un treno di impulsi

La Trasformata di Fourier di un treno di impulsi matematici di periodo T è a sua volta un treno di impulsi di frequenza posti a "distanza" $1/T$ l'uno dall'altro. Se riconsideriamo il treno di impulsi rettangolari esaminati sopra, possiamo immaginare di farli diventare sempre più stretti (*duty cycle* sempre più piccolo) ma sempre più alti, in modo che la loro **area** rimanga costante e di valore 1. In tal modo anche le righe della serie di Fourier diventano sempre più alte e il loro inviluppo, che ha forma $\sin(x)/x$, si allarga e si livella, per così dire, finché diventano tutte infinitamente alte uguali!

Risposta all'impulso

Un altro punto fondamentale per l'analisi dei sistemi (compresi quelli di telecomunicazione) è la **risposta all'impulso**:

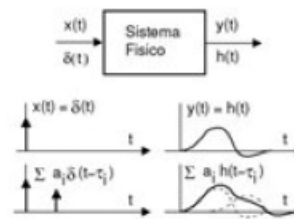
Consideriamo un sistema fisico (elettrico, meccanico, pneumatico...) che venga sollecitato, in un punto considerato come ingresso, da un segnale impulsivo $\delta(t)$ centrato in $t = 0$, ed osserviamo l'andamento temporale di una grandezza (meccanica, pneumatica, elettrica...) che possiamo considerare una *uscita*. Questo nuovo segnale prende il nome di *risposta impulsiva* (ossia all'impulso) e viene indicato con $h(t)$. L'andamento di $h(t)$ rappresenta quindi la grandezza di uscita, osservata dopo che è passato un tempo pari a t da quando si è applicato in ingresso l'impulso $\delta(t)$, e se il sistema è *causale* (vedi § 1.7.2) risulta $h(t) = 0$ con $t < 0$, come raffigurato appresso.

Se inoltre il sistema è anche *lineare e permanente*, applicando un ingresso costituito da *più impulsi*, ognuno con differente area a_i e centrato ad un diverso istante τ_i , ovvero

$$x(t) = \sum_{i=1}^N a_i \delta(t - \tau_i) \quad (3.8)$$

si ottiene una uscita pari a

$$y(t) = \sum_{i=1}^N a_i h(t - \tau_i) \quad (3.9)$$



Si rifletta sul significato della sommatoria, con l'aiuto della figura in alto: ad un dato istante t , il valore dell'uscita $y(t)$ è il risultato dalla somma di N termini, ognuno pari al valore della risposta impulsiva calcolata con argomento pari al tempo trascorso tra l'istante di applicazione dell'*i-esimo* impulso e l'istante di osservazione.

Questo ci porta direttamente a:

3.5.2 Integrale di convoluzione

Consideriamo ancora lo stesso sistema fisico, al cui ingresso sia posto un generico segnale $x(t)$ che, grazie alla proprietà di setacciamento, rappresentiamo come scomposto in infiniti termini, ossia come somma integrale di impulsi centrati in τ (variabile) ed area $x(\tau) d\tau$ (infinitesima):

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) d\tau \delta(t - \tau) \quad (3.10)$$

Questa espressione, formalmente simile alla (3.8), è equivalente alla proprietà di setacciamento (3.7), dato che $\delta(t)$ è una funzione pari.

L'andamento della grandezza di uscita sarà dunque pari alla sovrapposizione di *infinite* risposte impulsive, ognuna relativa ad un diverso valore dell'ingresso:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau$$



in cui $x(\tau) d\tau$ è l'area infinitesima degli impulsi di cui, in base alla (3.10), è costituito l'ingresso, e $h(t - \tau)$ è l'uscita all'istante t causata dall'impulso in ingresso centrato all'istante τ . Il risultato ottenuto, formalmente simile a (3.9), prende il nome di *integrale di convoluzione*, e viene indicato in forma simbolica da un asterisco (*), in modo che ci si possa riferire ad esso anche come *prodotto di convoluzione*, ossia $g(t) = x(t) * h(t)$.

Notiamo come $h(t)$ caratterizzi completamente il sistema fisico, in quanto permette di calcolarne l'uscita per un qualsiasi ingresso.

La **convoluzione** è un'operazione composta, costituita da una somma di prodotti in cui uno dei due fattori di ogni prodotto contiene un parametro: si tratta quindi di una **funzione** di tale parametro. Tale somma diviene un integrale quando si ha a che fare con il prodotto di funzioni continue, come spesso avviene nelle telecomunicazioni, e se le funzioni sono temporali il parametro è un *ritardo* indicato con " τ ". Il concetto di convoluzione è un concetto importantissimo perché, tra l'altro, unifica sistemi (lineari) e segnali. Un sistema viene caratterizzato come se fosse un segnale; questo viene fatto tramite la sua risposta all'impulso $h(t)$. Dopodiché **l'interazione tra sistemi e segnali diventa interazioni tra segnali**.

La descrizione di un sistema fisico per mezzo della sua risposta impulsiva è di fondamentale utilità soprattutto per merito della seguente proprietà della trasformata di Fourier:

La $\mathcal{F}$ -trasformata della convoluzione tra due segnali è pari al prodotto delle trasformate dei segnali:

$$\mathcal{F}\{x(t) * y(t)\} = X(f) Y(f) \quad (3.11)$$

La dimostrazione è riportata alla nota¹⁵. Sussiste inoltre anche la proprietà *duale*, ovvero ad un prodotto nel tempo corrisponde una convoluzione in frequenza, che si scrive

$$\mathcal{F}\{x(t) \cdot y(t)\} = X(f) * Y(f) \quad (3.12)$$

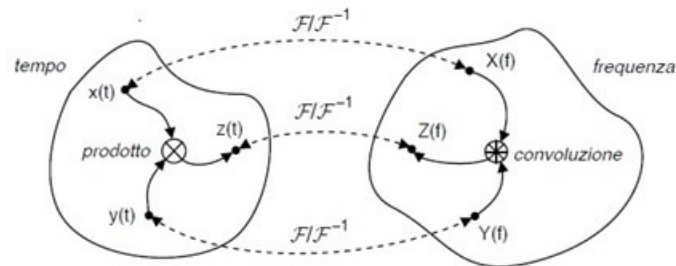


Fig. 4 Isomorfismo tra gli spazi di un segnale nel tempo e nella frequenza

La "proprietà del prodotto" della TdF consente di sapere come si comporta un segnale che ha TdF = $X(f)$ e che attraversa un sistema lineare (ad esempio un filtro) che ha TdF = $Y(f)$. La TdF del segnale in uscita sarà proprio $Z(f) = X(f) Y(f)$

Le proprietà della TdF vengono sfruttate ampiamente nei calcoli perché, a dispetto della complicazione dovuta a numeri complessi, integrali e impulsi matematici, sono lineari e quindi "facilmente" manipolabili.

PROPRIETÀ	$z(t)$	$Z(f) = \mathcal{F}\{z(t)\}$
Linearità	$ax(t) + by(t)$	$aX(f) + bY(f)$
Coniugato	$x^*(t)$	$X^*(-f)$
Cambiamento di scala	$x(at)$	$\frac{1}{a}X\left(\frac{f}{a}\right)$
Ritardo	$x(t - T)$	$X(f)e^{-j2\pi fT}$
Traslazione in frequenza	$x(t)e^{j2\pi f_0 t}$	$X(f - f_0)$
Modulazione di ampiezza	$x(t)\cos 2\pi ft$	$\frac{1}{2}X(f - f_0) + \frac{1}{2}X(f + f_0)$
Prodotto in frequenza	$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t - \tau)d\tau$	$X(f)Y(f)$
Prodotto nel tempo	$x(t)y(t)$	$\int_{-\infty}^{\infty} X(\sigma)Y(f - \sigma)d\sigma$
Dualità	$X(t)$	$x(-f)$
Simmetria coniugata	$x(t)$ reale	$X(f) = X^*(-f)$
Derivazione	$\frac{d}{dt}x(t)$	$j2\pi f \cdot X(f)$
Integrazione	$\int_{-\infty}^t x(\theta)d\theta$	$\frac{X(f)}{j2\pi f} + \frac{1}{2}\delta(f)X(0)$

Una tra le più importanti proprietà per le telecomunicazioni è quella detta "Modulazione di ampiezza / traslazione di frequenza".

Fine della prima parte

Ne seguiranno altre!

Estratto da "<https://www.electroyou.it/mediawiki/index.php?title=UsersPages:Clavicordo:tlc-big-1a-parte>"