



Claudio Bonechi (clavicordo)

TLC BIGNAMI 2A PARTE

28 November 2019

Premessa

L'intento di questo EYBignami è divulgativo: vuole offrire una panoramica sulle telecomunicazioni senza entrare nei dettagli ma presentando una sintesi dei principali concetti e formule usati nella tecnica delle telecomunicazioni. I contenuti sono estratti dal libro on line "Trasmissione dei Segnali e Sistemi di Telecomunicazione" di Alessandro Falaschi, docente presso l'Università La Sapienza di Roma, che ne ha gentilmente autorizzato l'uso, disponibile integralmente per il **download gratuito** su <http://www.teoriadeisignali.it> e che potrà essere usato per gli approfondimenti. Il prof. Falaschi infatti mette a disposizione il suo libro nel preciso intento di far circolare l'informazione anziché sottrarla al pubblico mettendola in vendita.

Introduzione

La seconda parte (che non è l'ultima) di questo Bignami inizia affrontando i **segnali "non certi"**, non deterministici; un segnale **deterministico** è ad esempio $y = \sin(t)$ perchè per ogni istante t il valore di y è conosciuto. Nella realtà delle telecomunicazioni, infatti, i segnali deterministici sono una rara eccezione. Sono di gran lunga più presenti i **segnali aleatori**, o "**casuali**" come quelli che sono generati da una conversazione telefonica. Ma prima di proseguire è necessario chiarire un aspetto che spesso sfugge e cioè la distinzione tra **Segnali di Potenza** e **Segnali di Energia** e che avrei dovuto aggiungere alla prima parte già pubblicata.

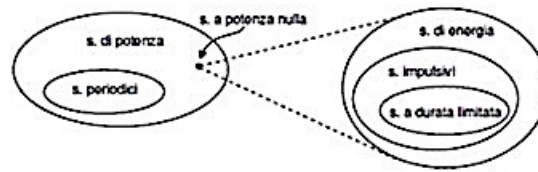


Figura 1.2: Visione insiemistica per le diverse classi di segnali

Segnale di potenza Un segnale analogico può avere una estensione temporale limitata, oppure si può immaginare che si estenda da meno infinito a infinito. Nel secondo caso il segnale si dice di *potenza* se ne esiste (ed è diversa da zero) la media quadratica

$$0 < \mathcal{P}_s = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |s(t)|^2 dt < \infty$$

Un segnale di potenza è inoltre detto

Segnale periodico di periodo T , nel caso in cui si verifichi che

$$s(t) = s(t + T)$$

per qualsiasi valore di t , mentre si dice

Segnale di energia un segnale di durata limitata o illimitata, se esiste il valore

$$0 < \mathcal{E}_s = \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt < \infty$$

Perché ciò avvenga occorre¹⁴ che per $t \rightarrow \infty$ il segnale $s(t)$ tenda a zero più velocemente di $\frac{1}{\sqrt{t}}$, e quindi $|s(t)|^2$ vi tenda più in fretta di $\frac{1}{t}$. La fig. 1.3 riporta un paio di esempi di segnale di energia; notiamo infine che lo spazio descritto dalle funzioni *a quadrato sommabile* è indicato in matematica come spazio L^2 , e costituisce un *spazio di Hilbert*¹⁵.

¹⁴Una funzione $f(t)$ è detta *sommabile* (o *integrabile*) nell'intervallo $(-\infty, \infty)$ se il suo integrale è finito, ed una condizione sufficiente perché ciò avvenga è che $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$ sia un infinitesimo di ordine superiore a 1, ovvero che $\lim_{t \rightarrow \infty} t \cdot f(t) = 0$.

¹⁵Vedi ad es. https://it.wikipedia.org/wiki/Funzione_a_quadrato_sommabile

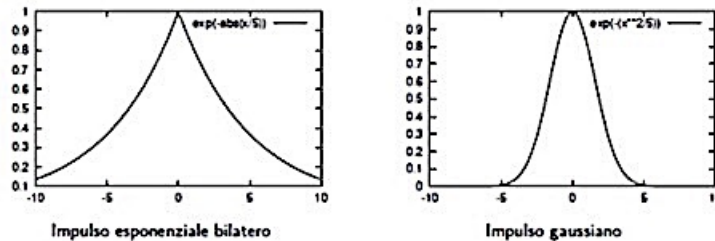


Figura 1.3: Esempi di segnali di energia

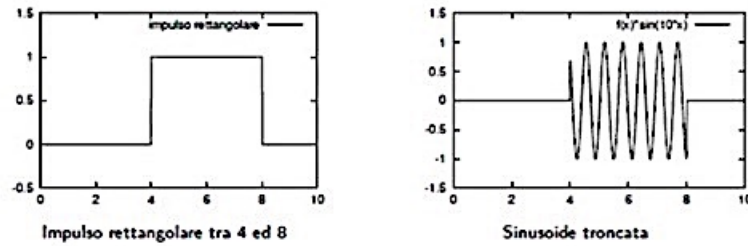


Figura 1.4: Esempi di segnale a durata limitata

In particolare, se un segnale ha *durata limitata*, ovvero è nullo per t al di fuori di un intervallo $[t_1, t_2]$ (vedi fig. 1.4), allora è anche di energia. Infine, viene detto

Segnale impulsivo un segnale di energia che tende a zero più velocemente di $\frac{1}{t}$, ovvero

$$0 < \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)| dt < \infty$$

E' il caso delle funzioni *assolutamente sommabili*, per le quali $|s(t)|$ tende a zero più velocemente di $\frac{1}{t}$, e che dunque sono anche di energia.

Riassumendo

- Un segnale *impulsivo* è di energia;
- Un segnale a *durata limitata* è impulsivo, e di energia;
- Un segnale *periodico* non è di energia, ma di potenza;

Qualora il segnale sia associato a delle grandezze elettriche, allora i concetti di *Potenza* ed *Energia* hanno il correlato fisico illustrato di seguito.

1.7.1.1 Aspetti fisici delle grandezze energetiche

Potenza istantanea Se consideriamo una resistenza R , ed applichiamo ai suoi capi una tensione $v(t)$, in essa scorre una corrente $i(t) = \frac{v(t)}{R}$, e la *potenza ceduta* alla resistenza ad ogni istante t è pari a

$$p(t) = v(t) i(t)$$

che si misura in *Watt* (equivalente a Joule/secondo), e che rappresenta la *potenza istantanea* assorbita. Ricordando che $i(t) = \frac{v(t)}{R}$, si ottiene anche $p(t) = \frac{v^2(t)}{R} = i^2(t) R$.

Energia Se integriamo $p(t)$ su di un intervallo temporale T , si ottiene l'*energia complessiva* assorbita da R nell'intervallo T :

$$e_T(t) = \int_{t-T}^t p(\tau) d\tau \quad [\text{joule}]$$

Nello stesso intervallo T , la resistenza assorbe una potenza $p_T(t) = \overline{e_T(t)} = \frac{1}{T} e_T(t)$ [Watt], che costituisce una media a breve termine dell'energia assorbita nell'intervallo¹⁶.

Se un segnale $x(t)$ è periodico con periodo T (o $\frac{T}{n}$ con n intero), i valori di $e_T(t) = p_T(t)$ coincidono con quelli calcolabili con T comunque grande. Se $R = 1 \Omega$, tali valori coincidono inoltre con le definizioni di potenza ed energia del segnale:

$$\text{Energia: } \mathcal{E}_x = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x|^2(t) dt = e_T\left(\frac{T}{2}\right) \quad [\text{Volt}^2 \cdot \text{sec}] \text{ o } [\text{Ampere}^2 \cdot \text{sec}]$$

$$\text{Potenza: } \mathcal{P}_x = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x|^2(t) dt = \frac{1}{T} e_T\left(\frac{T}{2}\right) = p_T\left(\frac{T}{2}\right) \quad [\text{Volt}^2] \text{ o } [\text{Ampere}^2]$$

Potenza dissipata e di segnale Se la resistenza è diversa da 1Ω , le due quantità non coincidono più. Nelle misure fisiche in genere si ottiene la potenza *dissipata* sullo strumento di misura (o irradiata dall'antenna, o dagli altoparlanti) espressa in Watt. Per risalire alla potenza/energia di segnale delle grandezze elettriche presenti ai suoi capi (tensione o corrente) occorre dividere (o moltiplicare) la potenza in Watt per R . Ad esempio, una potenza assorbita $\mathcal{P}$ di 10 Watt su 8 Ohm equivale ad una potenza di segnale $\mathcal{P} \cdot R = 80 (\text{Volt})^2$, ovvero di $\frac{\mathcal{P}}{R} = 1.25 (\text{Ampere})^2$.

Valore efficace Si indica allora come *valore efficace* quel livello di segnale continuo che produrrebbe lo stesso effetto energetico. Nell'esempio precedente, otteniamo: $V_{eff} = \sqrt{80} = 8.94 \text{ Volt}$; $I_{eff} = 1.118 \text{ Ampere}$. Infatti:

$$\mathcal{P}_T(\text{segnale}) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} V_{eff}^2 dt = \frac{T}{T} (8.94)^2 = 80 \text{ Volt}^2 \text{ che su } 8 \Omega \text{ dissipa } \frac{V^2}{R} = 10 \text{ Watt.}$$

Segnali aleatori

Ciò che interessa comunicare è, **dal punto di vista del sistema**, completamente **CASUALE**. Ciò non deve stupire: si pensi a una conversazione telefonica, a un'immagine, a dati informativi di qualsiasi tipo. L'informazione in sé a noi non appare casuale, naturalmente, perchè cerchiamo sempre un senso in quello che ci arriva. Però un contenuto è tanto più significativo quanto meno è probabile. Ma soprattutto, anche se il contenuto informativo è basso e quindi altamente probabile, i segnali fisici che lo rappresentano non sono probabili affatto, non sono prevedibili, non sono "deterministici". I segnali deterministici possono essere usati in fase di test del sistema, ma non sono praticamente mai i segnali che un **sistema reale** dovrà trasportare. Ne consegue che è opportuno attrezzarsi con descrizioni adeguate a questo tipo di segnali, detti "**aleatori**" o *random*, per progettare e dimensionare al meglio i sistemi TLC. Questa impostazione "probabilistica e statistica" risale agli anni 50, quando il matematico Claude Shannon produsse la nota "teoria dell'informazione" che permise progressi prima impensabili. prima di allora, infatti, i sistemi venivano dimensionati solo in base alla banda di frequenza e alla potenza dei segnali, mentre il rumore della sorgente o quello che si intrometteva nel canale di trasmissione costituiva un limite invalicabile. Con la nuova impostazione statistica non fu più così.

Riprendiamo continuandolo il primo capitolo "Una visione d'insieme":

1.3.2 Rappresentazione di processi aleatori

Anche nel caso in cui il segnale non è noto a priori, e dunque è impossibile calcolarne la trasformata di Fourier in forma chiusa, si può ugualmente giungere ad una rappresentazione che caratterizzi le realizzazioni del processo nei termini della distribuzione (statistica) in frequenza della potenza di segnale.

Ciò è possibile considerando la *funzione di autocorrelazione*, che esprime il grado di interdipendenza statistica tra i valori assunti in istanti diversi dalle realizzazioni del processo, e che costituisce un elemento unificante ai fini della *stima spettrale* dei segnali.

Osserveremo come processi molto correlati siano caratterizzati da una densità di potenza di tipo *colorato*, mentre processi scarsamente correlati saranno identificati da una densità di potenza di tipo *bianco*¹⁰.

Lo studio dei segnali aleatori inizia con la definizione di "**probabilità**"

5.1 Teoria delle probabilità

Tratta delle caratteristiche *regolari* di fenomeni *irregolari* o *casuali*. Una prima definizione di probabilità è quella fornita dalla teoria *frequentista*, la quale asserisce che se, ripetendo N volte un esperimento, si verifica la circostanza A per n_A volte, per essa si osserva una frequenza relativa n_A/N , da cui si deriva la probabilità di A come

$$Pr_A = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n_A}{N}$$

In termini più astratti, l'insieme di tutte le circostanze possibili può essere pensato come un insieme algebrico, i cui elementi (o punti) sono appunto le diverse circostanze. I punti possono essere raggruppati in sottoinsiemi (eventualmente vuoti o di un solo punto) per i quali valgono le proprietà di unione, intersezione, complemento, inclusione...

I fenomeni fisici sono posti in relazione con i punti degli insiemi suddetti mediante il concetto di *spazio campione* Ω , che è l'unione di tutti i possibili risultati di un *fenomeno aleatorio*. Sottoinsiemi dello spazio campione sono detti *eventi*. L'intero spazio è l'*evento certo*, mentre l'insieme vuoto corrisponde all'evento impossibile ϕ (od evento *nullo*). Una *unione* $\cup$ di eventi, corrisponde all'evento che si verifica ogni qualvolta se ne verifichi *un suo componente*, mentre l'*intersezione* $\cap$ è verificata se *tutti* i componenti lo sono. Esempio: il lancio di un dado genera uno spazio con 6 punti (eventi) disgiunti. Uno spazio campione può avere un numero di punti finito, infinito numerabile, o infinito.

Variabile aleatoria

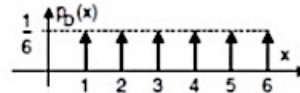
5.2 Variabili aleatorie

Finora si è parlato di *eventi* in modo astratto, mentre spesso ci si trova ad associare ad ogni punto dello spazio campione un valore numerico: lo spazio campione Ω diventa allora l'*insieme dei numeri* e prende il nome di *variabile aleatoria*, d'ora in poi spesso abbreviato in *v.a.* Il verificarsi di un evento corrisponde ora all'assegnazione di un valore (tra i possibili) alla v.a.; tale valore "prescelto" prende dunque il nome di *realizzazione* della v.a. Distinguiamo poi tra variabili aleatorie *discrete* e *continue*, a seconda se la grandezza che descrivono abbia valori numerabili o continui⁹. La caratterizzazione della variabile aleatoria in termini probabilistici si ottiene indicando come la "massa di probabilità" si *distribuisce* sull'insieme di valori che essa può assumere, per mezzo delle 2 funzioni (di v.a.) seguenti.

5.2.1 Densità di probabilità e funzione di distribuzione

Come la massa di un oggetto *non omogeneo* è distribuita in modo più o meno denso in regioni differenti del suo volume complessivo, così la *densità di probabilità* (o *d.d.p.*) indica su quali valori della variabile aleatoria si concentra la probabilità. Ad esempio, la densità della v.a. discreta associata al lancio di un dado può essere scritta:

$$p_D(x) = \sum_{n=1}^6 \frac{1}{6} \delta(x - n) \quad (5.2)$$



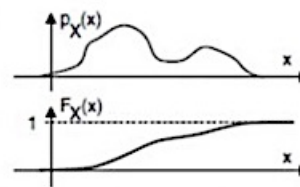
il cui significato discutiamo subito, con l'aiuto del grafico in alto, in cui D indica la v.a. (il numero che uscirà), e x una sua realizzazione (una delle 6 facce). I 6 impulsi centrati in $x = n$ rappresentano una *concentrazione* di probabilità nei sei possibili valori, e l'area di tali impulsi è esattamente pari alla probabilità di ognuno dei sei risultati. E' facile verificare che

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_D(x) dx = 1 \quad \text{e che risulta} \quad \int_a^b p_D(x) dx = Pr\{a < D \leq b\}$$

ovvero pari alla probabilità che la v.a. D assuma un valore tra a e b . In particolare, non potendosi verificare una probabilità negativa, si ha $p_D(x) \geq 0$ con $\forall x$.

Una funzione di v.a. strettamente collegata alla densità è la funzione di *ripartizione* o di *distribuzione*¹⁰, definita come

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x p_X(\xi) d\xi = Pr\{X \leq x\} \quad (5.3)$$



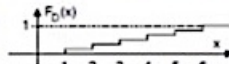
e che risulta una funzione non decrescente di x , limitata ad un valore massimo di 1, ed il cui andamento mostriamo a lato sotto a quello di $p_X(x)$, per la quale ovviamente risulta $p_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x)$; nel caso invece della v.a. discreta D , la relativa funzione di distribuzione è discontinua¹¹.

Ora è ancora più evidente la circostanza che $p_X(x)$ è una *densità*, e diviene una probabilità solo quando moltiplicata per un intervallo di x ¹².

¹⁰In realtà, l'ordine storico è quello di definire prima $F_X(x)$ come la probabilità che X sia non superiore ad un valore x , ovvero $F_X(x) = Pr\{X \leq x\}$, e quindi $p_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$. Il motivo di tale "priorità" risiede nel fatto che $F_X(x)$ presenta minori "difficoltà analitiche" di definizione (ad esempio presenta solo discontinuità di prima specie, anche con v.a. discrete).

A fianco è mostrata la $F_D(x)$ relativa al lancio di un dado: ricordiamo infatti che la ¹¹derivata di un gradino è un impulso di area pari al dislivello, e dunque applicando la (5.3) alla (5.2) si ottiene il risultato illustrato.

¹²Infatti la probabilità che X cada tra x_0 e $x_0 + \Delta x$ vale $\int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} p_X(x) dx \simeq p_X(x_0) \Delta x$.



Alle **variabili aleatorie** sono associate operazioni utili nei calcoli statistici: **Valore atteso, Momento, Media e Varianza**

Valore atteso Si definisce *valore atteso* (o *media di insieme*¹⁵) di $g(x)$ rispetto alla variabile aleatoria X la quantità:

$$E_X \{g(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) p_X(x) dx \quad (5.4)$$

che corrisponde ad una *media pesata*, in cui i valori assunti da $g(x)$ in corrispondenza ad un certo x sono *pesati*¹⁶ mediante il corrispettivo valore di probabilità $p_X(x) dx$; tale operazione di media integrale è indicata con la notazione $E_X \{.\}$ ¹⁷, mediante la quale si indica a pedice la v.a. (X) rispetto a cui eseguire la pesatura.

Momento Qualora si ponga $g(x) = x^n$, ovvero pari alla n -esima potenza della v.a., il valore atteso prende il nome di *momento di ordine n* , e si indica come

$$m_X^{(n)} = E \{x^n\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^n p_X(x) dx$$

Nel caso di variabili aleatorie discrete, i momenti sono definiti come $m_X^{(n)} = \sum_i x_i^n p_i$, in cui $p_i = Pr \{x = x_i\}$, pesando quindi le possibili realizzazioni x_i con le rispettive probabilità.

Media Verifichiamo subito che $m_X^{(0)} = 1$, mentre il momento di *primo ordine*

$$m_X = m_X^{(1)} = \int_{-\infty}^{\infty} x p_X(x) dx$$

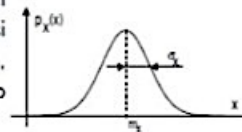
prende il nome di *media*¹⁸ della v.a. X (a volte denominata *centroide*), mentre con $n = 2$ si ha la *media quadratica* $m_X^{(2)} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p_X(x) dx$.

I concetti di **Media** e di **Varianza** sono entrambi fondamentali

Varianza E' il nome dato al momento centrato del 2° ordine, corrispondente a

$$\sigma_X^2 = \mu_X^{(2)} = E \{(x - m_X)^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_X)^2 p_X(x) dx$$

La radice quadrata della varianza, σ_X , prende il nome di *deviazione standard*. Mentre la media m_X indica dove si colloca il "centro statistico" della densità di probabilità, σ_X indica quanto le singole determinazioni della v.a. siano disperse attorno ad m_X .



Una relazione notevole che lega i primi due momenti (centrati e non) è ⁽¹⁹⁾:

$$\sigma_X^2 = m_X^{(2)} - (m_X)^2 \quad (5.5)$$

La varianza è il quadrato della cosiddetta deviazione standard σ_X .

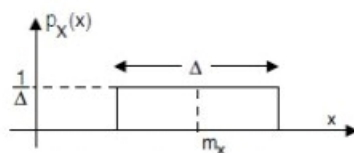
Nel caso dei segnali elettrici il concetto di **media** è semplice: il valore medio corrisponde alla componente continua che, come è noto si cerca sempre di eliminare dalle linee fisiche. Quindi molto spesso il valore medio dei segnali elettrici è uguale a 0 (lo è sempre, ovviamente, se i segnali viaggiano nello spazio aperto). Un'eccezione a questo erano le linee telefoniche, in cui fino a poco tempo fa era presente la componente continua "batteria di Centrale" (24 o 48 V), usata per la connessione di linea e per la segnalazione ad impulsi. Veniva usata anche per la telegrafia, che, per i due stati binari (ON -OFF) utilizzava una corrente continua di ben 20 mA. Similmente il concetto di **varianza**, che potremmo considerare una "media di secondo grado", riguarda invece

la dispersione (al quadrato) dei valori intorno alla media: più la varianza è bassa, più i valori della variabile aleatoria si "addensano" intorno alla media.

Abbiamo visto sopra il concetto di "densità di probabilità", che è una funzione dei valori della variabile aleatoria: ad ogni valore della variabile corrisponde un valore di probabilità. Se in valori della variabile a sono in numero finito, come nel caso del lancio del dado, la **densità** di probabilità (**d.d.p.**) è per forza espressa tramite impulsi matematici, perché essa è composta da altrettanti valori isolati. Se invece la variabile a è continua, cioè assume infiniti valori all'interno di un intervallo, allora anche la d.d.p. è continua ("quasi dovunque" per completezza: potrebbero esserci anche valori isolati insieme a valori continui).

Le funzioni d.d.p. possono essere di qualunque tipo purché l'integrale della d.d.p. esteso da $-\infty$ a $+\infty$ dia come risultato 1, perché la somma di tutte le probabilità deve essere sempre il 100%. Esistono tuttavia alcune d.d.p. che si trovano molto più frequentemente di tutte le altre nello studio dei fenomeni probabilistici. Ne vediamo due

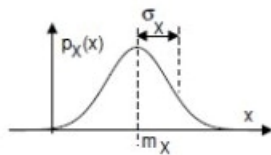
$p_X =$ distribuzione uniforme



$$p_X(x) = \frac{1}{\Delta} \text{rect}_{\Delta}(x - m_X)$$

La media m_X sta al centro del rettangolo, mentre il calcolo della varianza dà $\sigma_X^2 = \frac{\Delta^2}{12}$.

$p_X =$ distribuzione gaussiana



$$p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}$$

Qui la d.d.p. è espressa in funzione del valore medio m_X e della varianza σ^2

ddp 1.jpg

Ora, dopo il concetto di **variabile aleatoria** dobbiamo vedere il concetto di **processo aleatorio**, che è un po' meno immediato. Uno potrebbe pensare che per descrivere un segnale aleatorio basti una variabile x , ed è vero. Ma un sistema di TLC deve essere progettato per trasmettere tutta una classe di segnali, ad esempio le voci umane, i suoni musicali, le immagini, i rumori di un cantiere. Occorre quindi considerare **tutto un insieme di possibili segnali** e caratterizzarne la statistica, a partire dalla conoscenza (magari ipotetica in prima battuta) delle relative d.d.p. A questo insieme si dà il nome di **Processo aleatorio**.

Processo aleatorio

Tipicamente un tale processo è definito su un intervallo di tempo in cui i valori di una variabile aleatoria identificano un elemento dell'insieme, cioè uno dei possibili segnali, detti **membri del processo**. Ogni membro corrisponde a un particolare valore θ_i della variabile a . Θ

Ne consegue che le medie che abbiamo visto per una variabile a , si possono calcolare *anche* su tutto l'insieme dei segnali.

In particolare si può calcolare la **media temporale** di un segnale, che corrisponde a un determinato valore di Θ :

In particolare, troviamo il *valore medio*

$$\overline{x(t, \theta_i)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t, \theta_i) dt$$

e la *potenza*³² (o *media quadratica*)

$$\overline{x^2(t, \theta_i)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t, \theta_i) dt$$

ma in un processo aleatorio si può calcolare la **media d'insieme** a un determinato istante t_j

$$m_X^{(n)}(t_j) = E_{\Theta} \{x^n(t_j, \theta)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^n(t_j, \theta) p_{\Theta}(\theta) d\theta = \int_{-\infty}^{\infty} x^n p_X(x(t_j)) dx$$

in cui l'ultima eguaglianza indica come la variabilità statistica di x^n sia completamente descritta dalla d.d.p. $p_X(x(t_j))$ di $x(t_j, \theta)$ al variare di $\theta \in \Theta$, mostrata in basso in fig. 5.2. Notiamo che secondo questo approccio, la media di insieme dipende dall'istante t_j in cui è prelevato un valore³⁰.

Processo stazionario

Si dice **stazionario** un processo in cui la media temporale non dipende dall'intervallo di tempo in cui tale media viene effettuata. Quindi l'intervallo di integrazione può non essere infinito, ma finito e di valore qualsiasi.

Processo ergodico

Si dice **ergodico** un processo la statistica di ogni membro è rappresentativa della statistica di tutti gli altri membri. Semplificando, questo equivale a dire che **media temporale = media di insieme**.

In questo caso, se è nota la d.d.p. del processo, si possono calcolare le medie temporali, soprattutto del secondo ordine, a partire dalla d.d.p

Esempio: la potenza di segnale Mostriamo come il calcolo della potenza di un membro di un processo ergodico sia equivalente a quello del momento di 2° ordine del processo:

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_X(\theta) &= \overline{x^2(\theta)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(\tau, \theta) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p_X(x/\theta) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p_X(x) dx = m_X^{(2)} = E\{x^2\} = \mathcal{P}_X\end{aligned}$$

Questo risultato mostra come sia possibile calcolare la potenza di una realizzazione di un processo, senza conoscerne la forma d'onda.

Potenza, varianza, media quadratica e valore efficace In particolare osserviamo che in base alla (5.5) possiamo scrivere

$$\mathcal{P}_X = m_X^{(2)} = \sigma_x^2 + (m_x)^2$$

e per i segnali a media nulla ($m_x = 0$) si ottiene $\mathcal{P}_X = \sigma_x^2$; in tal caso il valore efficace (pag. 13) $\sqrt{\mathcal{P}_X}$ coincide con la deviazione standard σ_x . La radice della potenza è inoltre spesso indicata come **valore RMS** (ROOT MEAN SQUARE), definito come $x_{RMS} = \sqrt{x^2(t)}$, ovvero la radice della *media quadratica* (nel tempo). Se il segnale è a media nulla, x_{RMS} coincide quindi con il valore efficace; se $x(t)$ è membro di un processo ergodico a media nulla, x_{RMS} coincide con la deviazione standard.

Questo risultato è molto importante, perchè per fortuna la maggioranza dei segnali che trattiamo nelle TLC rientrano nella categoria dei processi ergodici.

Nell'esempio sopra si vede come la **potenza di un segnale** (tensione o corrente su una resistenza da 1 Ohm) si componga della parte continua (**il valore medio al quadrato**) sommata alla parte variabile (**la varianza**).

Se il segnale non è aleatorio, la sua varianza è nulla e quindi la potenza è data dal solo valore medio del suo quadrato. Ricordiamo che parliamo di potenza perchè si sottintende che un segnale sia espresso come tensione o corrente in funzione del tempo applicabile su una resistenza da 1 Ohm

Spettro di frequenza di un segnale aleatorio

Il prossimo passo nella caratterizzazione di un segnale aleatorio è, se non la determinazione, la stima del suo spettro di frequenza. Dato che non è possibile applicare direttamente la Trasformata di Fourier al segnale (visto che il suo andamento nel tempo è inconoscibile a priori) non resta che agire sulla statistica, ossia sulle medie, in particolare sulla quella particolare media temporale chiamata **funzione di autocorrelazione**, che conduce alla potenza come la intendiamo normalmente ma che soprattutto conduce allo **spettro di frequenza della potenza** o meglio alla sua **densità**, tipicamente espressa in Watt/Hertz ("**Densità spettrale**").

Autocorrelazione

In generale la **correlazione** tra due segnali indica quanto i due segnali tra loro dipendono. Se i due segnali sono indipendenti la loro correlazione è nulla. La correlazione si esprime come **media temporale del prodotto tra i due**. Tale media è esprimibile concettualmente anche come **prodotto scalare**.

Ad esempio la media del prodotto $\sin(\omega_1 t)\sin(\omega_2 t)$ è $= 0$ se $\omega_1 \neq \omega_2$. Ne segue che questi due segnali sono **ortogonali**.

Se invece i due segnali sono **aleatori**, la media temporale va **pesata** con le rispettive d.d.p.

Se i due segnali sono parte di un processo ergodico (come per fortuna accade nella maggior parte dei casi) allora la media temporale si può calcolare come media di insieme.

La **funzione di autocorrelazione** di un segnale è una **media congiunta del segnale con il segnale stesso spostato nel tempo** di una quantità τ

Nel caso in cui il processo sia anche *ergodico* (§ 5.3.5), le medie di insieme hanno lo stesso valore delle corrispondenti medie temporali, e dunque la correlazione (media di insieme) $m_{XX}^{(1,1)}(\tau)$ può essere calcolata in base alla corrispettiva media temporale equivalente, a partire da una qualunque realizzazione θ_i del processo

$$m_{XX}^{(1,1)}(\tau) = \mathcal{R}_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t, \theta_i) x(t + \tau, \theta_i) dt \quad \forall \theta_i \in \Theta \quad (6.5)$$

Sotto le medesime condizioni è vero anche l'inverso, ovvero: la media temporale (6.5) del prodotto tra due campioni estratti a distanza τ a partire da una qualunque realizzazione, ha un valore pari a quello ottenibile come media di insieme (6.4) a partire dalla conoscenza della densità di probabilità congiunta $p_{X_1 X_2}(x_1, x_2; t_1, t_1 + \tau)$.

La media temporale $\mathcal{R}_x(\tau)$ espressa dalla (6.5) viene indicata anche come *integrale di autocorrelazione* se calcolata su segnali deterministici, e nel caso di segnali di energia ha espressione

$$\mathcal{R}_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t) x(t + \tau) dt = x^*(-t) * x(t)$$

in cui l'operatore di coniugato generalizza l'operazione anche al caso di segnali complessi.

e in cui $*$ è il consueto simbolo di convoluzione¹

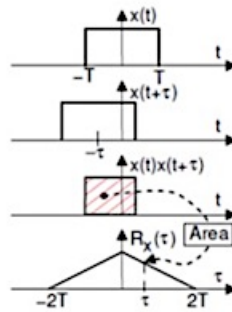


Figura 6.2: Autocorrelazione di un rettangolo

Massimo nell'origine La $\mathcal{R}_x(\tau)$ calcolata in $\tau = 0$ fornisce il valore di $\mathcal{R}_x(\tau)$ più grande di quello ottenibile per qualunque altro valore di τ . In particolare, $\mathcal{R}_x(\tau = 0)$ è uguale alla potenza del segnale $x(t)$, od all'energia se $x(t)$ è di energia, ossia

$$0 \leq \mathcal{R}_x(0) = \begin{cases} \int |x(t)|^2 dt = \mathcal{E}_x > |\mathcal{R}_x(\tau \neq 0)| & \text{se } x(t) \text{ è di energia} \\ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt = \mathcal{P}_x \geq |\mathcal{R}_x(\tau \neq 0)| & \text{se } x(t) \text{ è di potenza} \end{cases}$$

Per illustrare l'utilità della funzione di autocorrelazione riporto un brano della spiegazione di G. Verbana in <https://www.vialattea.net/content/2227/>

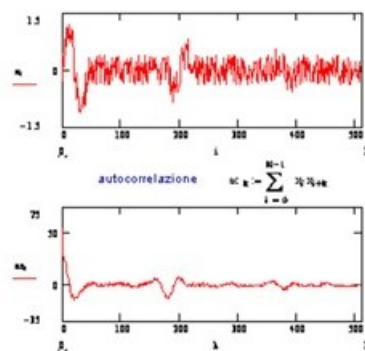
"L'autocorrelazione per i segnali casuali è molto importante, poiché ci fornisce una misura della regolarità del processo. Ritardando un segnale, che contiene numerose componenti di disturbo, possiamo verificare se esistono delle periodicità.

Mentre la densità di probabilità contiene l'informazione relativa alle variazioni d'ampiezza del processo, l'autocorrelazione contiene l'informazione relativa alle variazioni sull'asse dei tempi.

Spesso è interessante determinare la funzione dell'autocorrelazione di una funzione $x(t)$ di un processo casuale ergodico, di un segnale desiderato $s(t)$ e di una componente di rumore non voluta.

Quindi un'applicazione è la determinazione di segnali periodici presenti in una forma d'onda arbitraria.

Come esempio, tramite mathcad, ho calcolato la funzione d'autocorrelazione di un segnale transitorio (energia finita) immerso nel rumore.



Si osserva che La funzione d'autocorrelazione ottenuta ci fornisce il segnale voluto pulito dal rumore.

Se lo scopo era solo eliminare il rumore lo stesso risultato, si poteva ottenere operando nel dominio delle frequenze tramite un filtro passa-basso.

Talvolta, nei DSP (Digital Signal Processor), è comodo operare nel dominio del tempo e talvolta nel dominio delle frequenze.

Nel caso di caratteristiche di rumore a larga banda, la funzione d'autocorrelazione può dare un'informazione sulla larghezza di banda del segnale. Nel campo acustico per la rivelazione d'echi in un segnale ,dove la misura dell'intensità è associata ad un valore di ritardo."

Anche se forse non è molto intuitivo, si vede che la nozione di **autocorrelazione** è strettamente legata a quella di **filtraggio**, un'operazione, come si sa, fondamentale nelle comunicazioni.

Questo risultato ha le sue basi nel seguente teorema

6.2.1 Teorema di Wiener

Lo spettro di densità di potenza $\mathcal{P}_x(f)$ (o di energia $\mathcal{E}_x(f)$) di un segnale $x(t)$ è uguale alla trasformata di Fourier della sua funzione di autocorrelazione: $\mathcal{P}_x(f) = \mathcal{F}\{\mathcal{R}_x(\tau)\}$.

La dimostrazione del teorema per segnali di energia è straordinariamente semplice:

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_x(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t) x(t+\tau) dt = \int_{-\infty}^{\infty} X^*(f) X(f) e^{j2\pi f\tau} df = \\ &= \mathcal{F}^{-1}\{X^*(f) X(f)\} = \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{E}_x(f)\}\end{aligned}$$

in cui abbiamo prima applicato il teorema di Parseval, poi la proprietà di traslazione nel tempo, e quindi (vedi § 3.2) espresso $X^*(f) X(f)$ come $\mathcal{E}_x(f)$.

Insomma, per calcolare lo spettro di frequenza di un segnale aleatorio occorre conoscerne la statistica, in modo da disporre della funzione di autocorrelazione. Benché questa funzione sia spesso difficile da calcolare per via analitica, lo si può fare con metodi numerici.

Aspetti ulteriori

Se ci riferiamo alla **rappresentazione vettoriale** di una funzione e alla visione della Trasformata di Fourier come semplice cambiamento della base ortonormale dei vettori (come ho mostrato nel mio articolo sulla TdF), bisogna pensare a un segnale aleatorio come a un **vettore che cambia continuamente modulo e fase** secondo la propria d.d.p. Ciò significa che cambierebbe continuamente anche la TdF "istantanea", perchè cambierebbero continuamente le componenti vettoriali nella base ortonormale della TdF. Occorrerebbe allora calcolare la media di tale TdF, un compito forse non impossibile ma certamente arduo. Il problema si risolve, dice il teorema di Wiener, se la TdF viene calcolata non sul segnale aleatorio ma sulla sua funzione di **autocorrelazione, che è già una media per conto proprio**.

D'altra parte, se il segnale è **periodico**, esso **coincide** con la propria funzione di **autocorrelazione** spostata nel tempo. Proprio questa ultima proprietà corrisponde a una capacità di **filtraggio nel dominio del tempo**. Infatti si può pensare che, se il segnale varia in modo **casuale**, la somma delle sue repliche temporali con il segnale di partenza tenda a dare un risultato nullo, dato che si sommano le oscillazioni in più e in meno. Mentre se il segnale è **deterministico**, di energia (durata limitata) o periodico (potenza limitata), l'autocorrelazione per $\tau = 0$ (o uguale a suoi multipli interi) è uguale al quadrato della funzione temporale, cioè alla **Potenza** e quindi il segnale "emerge".

Rumore gaussiano bianco e segnale dati

6.2.3 Processo gaussiano bianco limitato in banda

Un processo $n(t)$ è chiamato *bianco* qualora la sua densità di potenza sia costante in frequenza, che quindi si esprime come

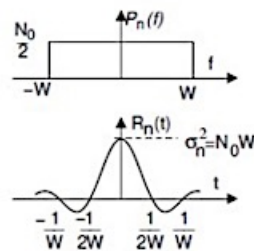
$$\mathcal{P}_n(f) = \frac{N_0}{2} \text{rect}_{2W}(f)$$

in cui W è l'occupazione di banda a frequenze positive. In tali ipotesi otteniamo

$$\mathcal{R}_n(t) = \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{P}_n(f)\} = N_0 W \text{sinc}(2Wt) \quad (6.9)$$

e possiamo pertanto constatare che si ottiene

$$\mathcal{R}_n(0) = \mathcal{P}_n = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}_n(f) df = N_0 W = \sigma_n^2$$



6.2.4 Processo di segnale dati

Al § 8.1.2 descriveremo un generico segnale numerico come una somma di repliche di una funzione $g(t)$, ognuna moltiplicata per un diverso valore a_n rappresentativo delle informazioni da trasmettere:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n g(t - nT + \theta) \quad (6.10)$$

La presenza della variabile aleatoria θ a distribuzione uniforme tra $\pm \frac{T}{2}$ (per cui $p_{\Theta}(\theta) = \frac{1}{T} \text{rect}_T(\theta)$), rende $x(t)$ un processo ergodico (vedi pag. 92).

Si mostrerà in appendice (§ 6.9.3) che, nelle ipotesi in cui le ampiezze a_n siano determinazioni di variabili aleatorie *indipendenti ed identicamente distribuite*, a *media nulla* e varianza σ_A^2 ⁽¹⁴⁾, la densità spettrale di potenza del processo (6.10) risulta

$$\mathcal{P}_x(f) = \sigma_A^2 \frac{\mathcal{E}_g(f)}{T}$$

Risposta in frequenza

Risposta in frequenza di potenza (o energia) E' il nome che può essere dato alla grandezza $|H(f)|^2 = \mathcal{P}_y(f)/\mathcal{P}_x(f)$, o $\mathcal{E}_y(f)/\mathcal{E}_x(f)$, visto che ripropone in termini energetici il legame ingresso-uscita rappresentato da $H(f)$ (vedi § 3.6.1); ma per $|H(f)|^2$ è anche usato il termine di *guadagno di potenza* (§ 7.2.1).

La formula di $H(f)$ vale anche per i **processi ergodici**.

Campionamento e Segnali numerici

Quando si vuole utilizzare un **sistema numerico** (detto anche digitale) per la trasmissione, occorre prima trasformare un segnale **analogico** a banda limitata, come suono o immagine, in un segnale **digitale** (numerico). Lo si fa tramite un processo detto **campionamento**.

4.1 Teorema del campionamento

Esprime la possibilità di ricostruire un segnale limitato in banda a partire dai suoi campioni:

Un segnale con spettro nullo a frequenze maggiori di W è completamente descritto dai suoi valori osservati ad intervalli temporali regolari $t_n = nT_c$, con n intero e periodo di campionamento $T_c \leq \frac{1}{2W}$; da questi è quindi possibile risalire ai suoi valori per qualunque altro istante.

La frequenza $f_{c_{min}} = \frac{1}{T_{c_{Max}}} = 2W$, chiamata *frequenza di Nyquist*³, corrisponde alla *minima* frequenza con cui occorre campionare un segnale $x(t)$ limitato in banda, ed è pari al doppio della massima frequenza presente. Se questa condizione è rispettata, il segnale originario può essere ricostruito ricorrendo ad una formula di interpolazione⁴ (detta *cardinale*⁵) che esprimiamo come:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_c) \cdot \text{sinc}(f_c(t - nT_c)) \quad (4.1)$$

Il circuito coinvolto nel campionamento è

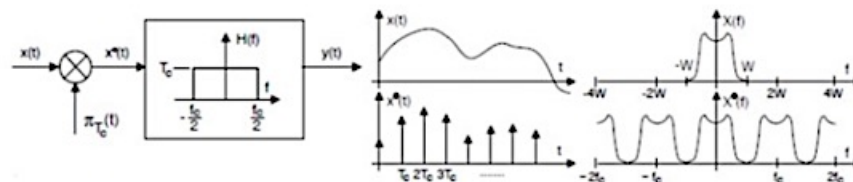
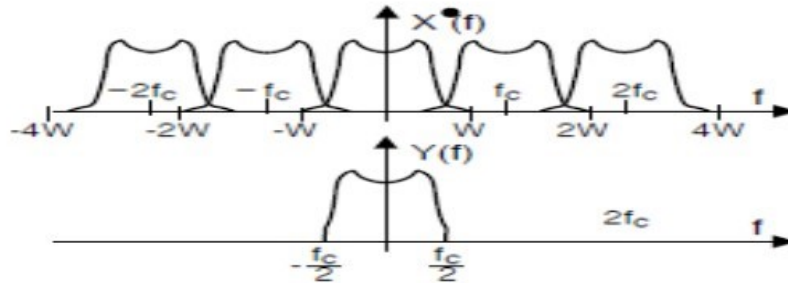


Figura 4.2: Circuito di campionamento e restituzione; segnali coinvolti e relativi spettri

Si vede come il segnale campionato presenti **infinite repliche dello spettro** del segnale da campionare (repliche che poi vengono "filtrate via") centrate a frequenze **multiple intere** della frequenza di campionamento.

Ciò è dovuto al fatto che il campionamento non è altro che una **moltiplicazione nel dominio del tempo** che, come abbiamo visto, produce una **convoluzione nel dominio della frequenza**. Il campionamento si può vedere anche come una **modulazione di ampiezza** (che esamineremo più avanti).

Se il campionamento avviene a frequenza inferiore a $1/2W$ si ha il fenomeno detto **aliasing**: le repliche si sovrappongono e la prima di esse altera lo spettro del segnale originale.



Dove si vede che lo spettro del segnale originale risulta alterato e, dopo il filtraggio, tagliato. La pratica consiglia quindi di **sovracampionare**, cioè usare una frequenza di campionamento maggiore del doppio della banda W . Ad esempio, volendo che la banda di un CD rimanga di 20.000 Hz, la frequenza di campionamento del segnale analogico è stata scelta di 44.100 Hz.

Nella realtà non si possono usare impulsi matematici e quindi per la moltiplicazione (campionamento) si usano impulsi di altezza e durata definita, ottenuti tramite un circuito detto **Sample & Hold**:

Il funzionamento del s&H può essere modellato come rappresentato nella figura a fianco, ed il corrispondente segnale di uscita descritto nella forma

$$x^\circ(t) = \sum_n x(nT_c) \cdot \text{rect}_\tau(t - nT_c)$$

in cui cioè al posto degli impulsi *matematici* viene adottato un treno di impulsi *rettangolari* modulati in ampiezza (vedi fig. a lato). Il filtro passa basso di restituzione $H(f)$ viene ora alimentato da $x^\circ(t)$ anziché da $x^*(t)$, e per determinare quale sia in questo caso la sua uscita, riscriviamo $x^\circ(t)$ nella forma

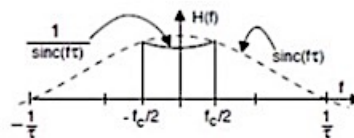
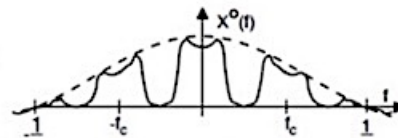
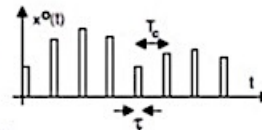
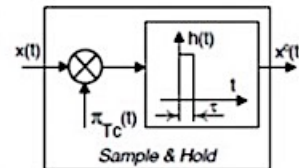
$$\begin{aligned} x^\circ(t) &= \sum_n x(nT_c) \cdot \text{rect}_\tau(t) * \delta(t - nT_c) = \\ &= \text{rect}_\tau(t) * \sum_n x(nT_c) \cdot \delta(t - nT_c) = \text{rect}_\tau(t) * x^*(t) \end{aligned}$$

e dunque il suo spettro risulta pari a

$$X^\circ(f) = \tau \text{sinc}(f\tau) \cdot X^*(f) \quad (4.4)$$

Osserviamo quindi che usare rettangoli di base $\tau < T_c$ al posto degli impulsi, equivale a moltiplicare $X^*(f)$ per un involuipo di tipo $\frac{\sin x}{x}$ che, seppure con $\tau \ll T_c$ non causa grossi inconvenienti (gli zeri posti ad $\frac{1}{\tau}$ si allontanano dall'origine, e $\frac{\sin x}{x}$ nei pressi di $x = 0$ è praticamente costante), per τ prossimo a T_c produce una alterazione dell'ampiezza della replica in banda base.

In tal caso (τ è noto) il filtro di ricostruzione può essere realizzato in modo da avere un andamento *inverso* a quello del $\frac{\sin x}{x}$, e tale che $H(f) \cdot \tau \text{sinc}(f\tau) = \text{costante}$. Infatti, questo accorgimento prende il nome di *$\frac{\sin x}{x}$ correction*. Al § 19.9.5 è illustrato un metodo di **MULTIPLAZIONE** di più segnali campionati in una unica trasmissione.



A questo punto, occorre convertire gli impulsi ottenuti, la cui ampiezza (valore in volt o in A) è proporzionale all'ampiezza del segnale di ingresso $x(t)$ negli istanti di campionamento, in numeri (conversione A/D analogico - digitale). Per ottenere ciò si opera un processo di "quantizzazione", cioè si predispongono L livelli di ampiezza e li si confrontano con l'ampiezza di ciascun impulso, ottenendone una "misura". Maggiore è il numero di livelli disponibili, maggiore è la precisione con cui si misurano gli impulsi ottenuti, minore la distorsione (detta anche "errore di quantizzazione").

Il livello misurato sarà espresso poi da un numero binario K , rappresentato con M bit, ossia $2^M = L$. Si trasmetteranno poi gli M bit di K per ciascun campione e in ricezione si ricostruirà il segnale di partenza "accostando" gli impulsi costruiti con ampiezza K (conversione D/A digitale - analogico).

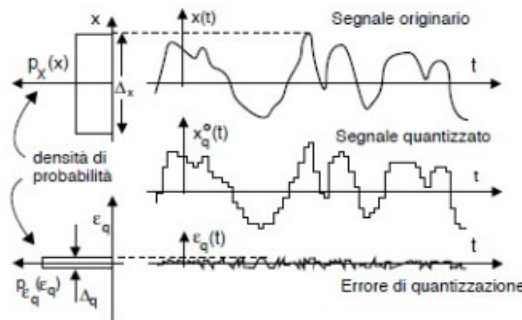


Figura 4.5: Processo di quantizzazione per segnali a distribuzione di ampiezza uniforme

Il rapporto segnale/rumore SNR in dB dovuto all'errore di quantizzazione risulta

$$SNR_q(L)|_{dB} = 10 \log_{10} L^2 = 20 \log_{10} L \text{ e, ricordando che } L = 2^M, \text{ si ottiene}$$

$$SNR_q(M)|_{dB} = M \cdot 20 \log_{10} 2 \simeq 6 \cdot M \text{ dB} \quad (4.5)$$

Ad esempio utilizzando una quantizzazione a 16 bit otteniamo un SNR di 96 dB.

Trasformata di Fourier discretizzata e Filtraggio numerico

4.3 Trasformata di Fourier di sequenze

Avendo illustrato come sia sufficiente la conoscenza dei soli campioni temporali $x_n = x(nT_c)$ per descrivere completamente un segnale continuo e limitato in banda $x(t)$, e come alla sequenza tempo-discreta dei suoi campioni x_n corrisponda una *periodicizzazione* in frequenza $X^*(f)$, notiamo come ciò sia in qualche modo *speculare* alla proprietà dei segnali *periodici nel tempo*, di godere di una rappresentazione equivalente nel dominio della frequenza, costituita dalla sequenza dei coefficienti X_n noti come serie di Fourier. L'analogia è più stringente di quanto non possa apparire, dato che è assolutamente lecito ed esatto²⁶ usare l'espressione della serie di Fourier (2.4) nella direzione *opposta*, ossia per ottenere lo spettro periodico di ampiezza $X^*(f)$ a partire dalla sequenza dei campioni temporali x_n :

$$X^*(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{-j2\pi f n T_c} \quad (4.6)$$

definendo così una *trasformata di Fourier a tempo discreto*²⁷ o DTFT, che produce una $X^*(f)$ periodica in frequenza di periodo $f_c = \frac{1}{T_c}$ ²⁸, in cui T_c è il periodo di campionamento con cui sono prelevati i valori x_n ²⁹. Alla (4.6) è associata una *antitrasformazione*, in grado di valutare i campioni temporali x_n a partire dalla conoscenza di un periodo di $X^*(f)$, definita come

$$x_n = \frac{1}{f_c} \int_{-\frac{f_c}{2}}^{\frac{f_c}{2}} X^*(f) e^{j2\pi f n T_c} df \quad (4.7)$$

e che è del tutto analoga (a parte il segno) alla (2.3) che calcola i coefficienti della serie di Fourier.

Ma i termini non possono essere infiniti... Quindi si fa la DFT

4.4 Trasformata discreta di Fourier

Disponendo di una sequenza di lunghezza *finita* composta da N valori x_n , $n = 0, 1, \dots, N-1$, corrispondenti a campioni di un segnale $x(t)$ prelevati con ritmo $f_c = \frac{1}{T_c}$, si indica come DISCRETE FOURIER TRANSFORM (DFT) la nuova sequenza³¹

$$X_m = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-j2\pi \frac{m}{N} n} \quad (4.8)$$

univocamente definita per $m = 0, 1, \dots, N-1$, e che costituisce una approssimazione³² del campionamento in frequenza della trasformata $X(f) = \mathcal{F}\{x(t)\}$, calcolata per $f = \frac{m}{N} f_c$, e moltiplicata per f_c :

$$X_m \simeq f_c X\left(f = \frac{m}{N} f_c\right) \quad (4.9)$$

Il passaggio dai campioni nel tempo x_n a quelli in frequenza X_m è invertibile³⁶, ricorrendo alla INVERSE DISCRETE FOURIER TRANSFORM (IDFT)

$$x_n = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X_m e^{j2\pi \frac{m}{N} n} \quad (4.11)$$

che per n esterno a $[0, N-1]$ continua a valere, ed assume valori periodici, coerentemente a quanto accade per lo sviluppo in serie di Fourier. Infatti il legame tra DFT e serie di Fourier è molto stretto, in quanto i valori X_m rappresentano una approssimazione³⁷ dei rispettivi coefficienti della serie di Fourier $X_m^{SF} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_T(t) e^{-j2\pi \frac{m}{T} t} dt$, calcolati a partire da un segmento $x_T(t)$ estratto da $x(t)$, e moltiplicati per N :

$$X_m \simeq N \cdot X_m^{SF} \quad (4.12)$$

4.5 Filtraggio numerico via DFT

La definizione di DFT illustrata al § 4.4 ben si presta a calcolare il risultato relativo ad un integrale di convoluzione, a patto di seguire alcune accortezze.

4.5.1 Convoluzione discreta

Dati due segnali $x(t)$ e $h(t)$ limitati in banda tra $-W$ e W , anche il risultato della convoluzione $y(t) = x(t) * h(t)$ è limitato in banda, ed i suoi campioni $y_n = y(nT_c)$ (con $T_c > \frac{1}{2W}$) possono essere calcolati⁴³ a partire da quelli di $x(t)$ e $h(t)$, come

$$y_n = T_c \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k h_{n-k} \quad (4.20)$$

Nel caso in cui le sequenze x_n e h_n abbiano durata finita e pari rispettivamente a N ed M campioni, si otterrà una sequenza y_n di durata pari a $N + M - 1$ campioni.

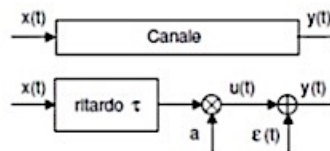
A questo punto basta ricordare che il blocco caratterizzato dalla **risposta all'impulso $h(t)$** o, corrispondentemente dalla sua TdF **$H(f)$** , può essere molto spesso chiamato **filtro** e che il filtraggio in frequenza si ottiene per **convoluzione tra segnale di ingresso e blocco $h(t)$** . Disponendo di un segnale campionato con campioni x_n l'uscita filtrata y_n si ottiene per **convoluzione discreta**, ovviamente predisponendo adeguatamente frequenza di campionamento e capacità di calcolo per ottenere le approssimazioni e i ritardi massimi desiderati in uscita.

Distorsione e rumore

Cos'è il segnale, cosa il disturbo, e quando un canale è *perfetto* Per valutare l'entità della distorsione, stabiliamo un criterio con cui distinguere la componente di segnale *utile* dal *disturbo*. La ricezione di un segnale identico a quello trasmesso, tranne che per un fattore di scala ed un ritardo temporale, non altera né forma né sostanza del messaggio: pertanto, un canale che presenti una risposta impulsiva

$$h(t) = a\delta(t - \tau)$$

viene indicato come *canale perfetto*, ed il segnale ricevuto $y(t) = u(t) = ax(t - \tau)$ è *tutto utile*. Se invece viene ricevuto qualcosa di diverso, si definisce *disturbo additivo* la differenza $\varepsilon(t) = y(t) - ax(t - \tau) = y(t) - u(t)$ (2). Note queste due quantità, se ne può



valutare la rispettiva potenza, ed indicare il rapporto $\frac{P_u}{P_\varepsilon}$ tra la potenza del segnale utile e quella del disturbo come *rapporto segnale rumore* o *SNR*.

7.2 Distorsione lineare

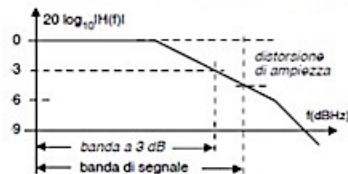
Identifica la distorsione legata al passaggio di un segnale $x(t)$ attraverso un canale che non è *perfetto* (vedi pag. 135), ossia un sistema lineare e permanente la cui risposta in frequenza $H(f) = |H(f)|e^{j\varphi_h(f)}$ non ha modulo costante e/o fase lineare. ζ

D'altra parte, risultando $|Y(f)| = |X(f)| \cdot |H(f)|$ e $\varphi_y(f) = \varphi_x(f) + \varphi_h(f)$, è possibile descrivere l'effetto della distorsione lineare considerando separatamente la risposta in frequenza $|H(f)|$ e quella in fase $\varphi_h(f)$, ed adottare per queste ultime delle rappresentazioni particolarmente utili a descrivere in modo complessivo l'entità delle distorsioni stesse.

7.2.1 Guadagno di potenza in dB

E' definito dall'espressione

$$G_{dB}(f) = 10 \log_{10} |H(f)|^2 = 20 \log_{10} |H(f)|$$



7.2.2 Tempo di ritardo di gruppo

Le conseguenze dello scostamento della risposta in fase $\varphi_h(f)$ rispetto alle condizioni di canale perfetto possono essere sinteticamente espresse mediante la quantità

$$t_g(f) = -\frac{1}{2\pi} \frac{d}{df} \varphi_h(f) \quad (7.5)$$

che rappresenta il ritardo subito da un gruppo di frequenze vicine a f .

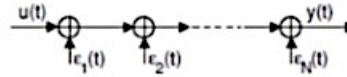
7.3 Distorsione di non linearità

Descrive il deterioramento subito dal segnale nel transito attraverso un dispositivo dal comportamento non-lineare, per il quale cioè la relazione ingresso-uscita è del generico tipo $y(t) = g[x(t)]$; espandendo tale relazione in serie di potenze, ed arrestando lo sviluppo al terzo ordine, otteniamo:

$$y(t) = G[x(t) + \alpha x^2(t) + \beta x^3(t)] \quad (7.8)$$

7.4.1 Valutazione dell' SNR dovuto a diverse fonti di disturbo

L'ipotesi di indipendenza statistica permette di affermare che la potenza di errore complessiva è la somma di quella dei singoli contributi, ossia



$$\mathcal{P}_{\varepsilon_T} = E\left\{\left(\sum_i \varepsilon_i\right)^2\right\} = \sum_i E\{\varepsilon_i^2\} = \sum_i \mathcal{P}_{\varepsilon_i}$$

e l'effetto di tutte le cause contemporaneamente attive determina un SNR complessivo pari a $SNR_T = \mathcal{P}_u / \sum_{i=1}^N \mathcal{P}_{\varepsilon_i}$; considerando ora che i singoli contributi di rumore possono essere espressi come $\mathcal{P}_{\varepsilon_i} = \mathcal{P}_u / SNR_i$, si ottiene

$$SNR_T = \frac{\mathcal{P}_u}{\mathcal{P}_u \sum_{i=1}^N \frac{1}{SNR_i}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{SNR_i}}$$

Questo risultato ricorda quello della impedenza equivalente a più impedenze poste in parallelo, il che porta a descrivere l' SNR complessivo come il *parallelo* degli SNR .

7.4.2 Rumore gaussiano

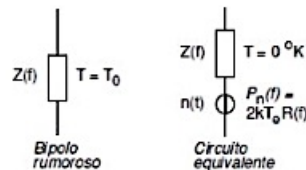
Molto spesso si assume che la somma dei contributi di rumore additivo possa essere assimilata ad un *processo gaussiano* (§ 5.5.3), e ciò consente di sviluppare i calcoli sfruttando le sue ben studiate proprietà. In alcuni casi si tratta solo di una approssimazione, ma se il disturbo additivo è prodotto da una somma elevata di cause *indipendenti ed identicamente distribuite* (i.i.d.), come in presenza di molti interferenti simili, il *teorema centrale del limite* (§ 5.2.4) assicura una buona aderenza alla realtà. Un altro caso particolare di molteplici cause i.i.d. prende il nome di *rumore termico*, che alla gaussianità aggiunge la proprietà di esibire una densità di potenza *bianca*, ed ora mostriamo perché.

7.4.2.1 Rumore termico nei bipoli passivi

Ai capi di un resistore R a temperatura T è presente una *tensione a vuoto* $n(t)$, realizzazione di un processo gaussiano a media nulla, che è l'effetto del moto caotico degli elettroni all'interno della resistenza¹³. Lo spettro di densità di potenza della tensione a vuoto ha espressione¹⁴

$$\mathcal{P}_n(f) = 2R \frac{hf}{e^{\frac{hf}{kT}} - 1} \simeq 2kTR \quad [\text{Volt}^2]$$

in cui $k = 1.38 \cdot 10^{-23}$ Joule/°K è la *costante di Boltzman* ed $h = 6.62 \cdot 10^{-34}$ Joule-sec è la *costante di Plank*: questi valori¹⁵ fanno sì che l'approssimazione $\mathcal{P}_n(f) \simeq 2kTR$ sia valida ad



Conclusione della seconda parte

La terza parte tratterà dei segnali in banda base e modulati, oltre a cenni della Teoria dell'informazione, e concluderà la Teoria dei segnali. Le parti successive tratteranno la Trasmissione dei segnali e i Sistemi di comunicazione.

Estratto da "<https://www.electroyou.it/mediawiki/index.php?title=UsersPages:Clavicordo:tlc-big-2a-parte>"