



Claudio Bonechi (clavicordo)

TLC BIGNAMI 4A PARTE

18 December 2019

Premessa

L'intento di questo EYBignami è divulgativo: vuole offrire una panoramica sulle telecomunicazioni senza entrare nei dettagli ma presentando una sintesi dei principali concetti e formule usati nella tecnica delle telecomunicazioni. I contenuti sono estratti dal libro on line "Trasmissione dei Segnali e Sistemi di Telecomunicazione" di Alessandro Falaschi, docente presso l'Università La Sapienza di Roma, che ne ha gentilmente autorizzato l'uso, disponibile integralmente per il **download gratuito** su <http://www.teoriadeisignali.it> e che potrà essere usato per gli approfondimenti. Il prof. Falaschi infatti mette a disposizione il suo libro nel preciso intento di far circolare l'informazione anziché sottrarla al pubblico mettendola in vendita.

Introduzione

In questa 4a parte vedremo aspetti più legati alla pratica delle trasmissioni e cioè le modulazioni. In una 5a parte esamineremo i collegamenti trasmissivi.

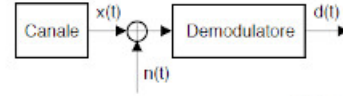
La notevole intensificazione delle comunicazioni, in particolare di Internet, ha trovato il suo terreno di crescita, oltre che nella crescita tecnologica, nel molto lavoro di ricerca teorica nel campo delle modulazioni che è stato compiuto fin dagli anni '70. Essendo la "banda" una risorsa preziosa, individuare metodi di trasmissione digitale sempre più efficienti è stato ed è fondamentale.

Modulazioni

Segnale AM

PROCEDIAMO con l'analisi dell'effetto prodotto dal rumore $n(t)$ presente in ricezione sul risultato del processo di demodulazione, per i due casi analizzati al cap. 10 di modulazione di ampiezza

e angolare; tale effetto è quindi quantitativamente descritto dal *rapporto segnale-rumore SNR* osservabile per il segnale demodulato.



13.1 Il rumore nei segnali modulati

Consideriamo un segnale modulato, affetto da un rumore additivo gaussiano bianco $n(t)$ (§ 6.2.3), con densità di potenza

$$\mathcal{P}_n(f) = \frac{N_0}{2}$$

Similmente a quanto già illustrato al § 8.3.1 per trasmissioni di banda base, prima di essere demodulato il segnale ricevuto attraversa un *filtro di ricezione* passa-banda $H_R(f)$, allo scopo di limitare la banda del rumore ricevuto, e quindi ridurre l'entità della potenza di rumore in ingresso al ricevitore. Il filtro $H_R(f)$ presenta un modulo costante nella banda del segnale, mentre tende a zero al di fuori di tale banda. In questo modo, il segnale utile $x(t)$ transita inalterato, ed il rumore $n(t)$ viene limitato in banda, producendo $v(t)$.



La figura 13.1 rappresenta la situazione in cui il rumore $n(t)$ in ingresso a $H_R(f)$ sia un processo ergodico bianco con densità di potenza $\mathcal{P}_n(f) = \frac{N_0}{2}$, ed il filtro di ricezione possieda una risposta in frequenza unitaria $|H_R(f_0)|^2 = 1$; in questo caso si ottiene che

$$\mathcal{P}_v(f) = \frac{N_0}{2} \text{rect}_{B_N}(f - f_0) + \frac{N_0}{2} \text{rect}_{B_N}(f + f_0)$$

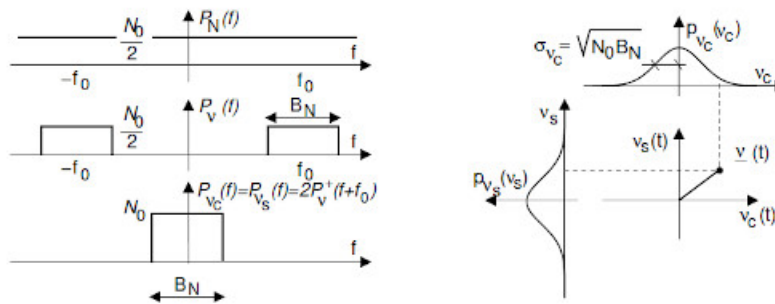
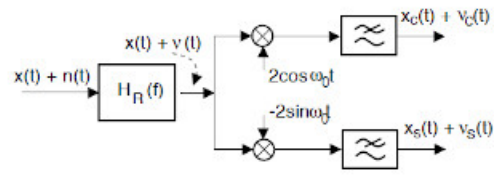


Figura 13.1: Densità spettrale e d.d.p. delle c.a. di b.f. del rumore demodulato

13.2 Prestazioni delle trasmissioni AM

Per valutare il rapporto SNR per le diverse tecniche di modulazione AM, esprimiamo il segnale modulato nei termini delle sue componenti analogiche

$$x_{AM}(t) = x_c(t) \cos \omega_0 t - x_s(t) \sin \omega_0 t$$



Demodulando in modo coerente in fase e quadratura il segnale $x(t)$ affetto da rumore bianco $n(t)$ e filtrato da $H_R(f)$ come in figura, si ottengono le due componenti analogiche per il segnale demodulato: $\begin{cases} d_c(t) = x_c(t) + \nu_c(t) \\ d_s(t) = x_s(t) + \nu_s(t) \end{cases}$. Tra la potenza del segnale ricevuto e quella delle sue c.a. di b.f. sussiste¹ la relazione: $\mathcal{P}_x = \frac{1}{2}\mathcal{P}_{x_c} + \frac{1}{2}\mathcal{P}_{x_s}$.

13.2.1 Potenza di segnale e di rumore dopo demodulazione ed SNR

Nel caso di modulazione AM, siamo interessati alla sola componente in fase, che è sufficiente a fornire $m(t)$; il rapporto tra $\mathcal{P}_{x_c}$ e $\mathcal{P}_{\nu_c}$ fornirà dunque il valore di SNR che stiamo cercando. La tabella che segue mostra i valori delle componenti di segnale e di rumore, assieme alle rispettive potenze espresse in funzione di una medesima potenza di messaggio $\mathcal{P}_m$, per tre casi di modulazione AM, di cui discutiamo individualmente.

	$x_c(t)$	$x_s(t)$	$\mathcal{P}_{x_c}$	$\mathcal{P}_x$	B_N	$\mathcal{P}_{\nu_c}$
BLD-PS	$m(t)$	0	$\mathcal{P}_m$	$\frac{1}{2}\mathcal{P}_m$	$2W$	$2WN_0$
BLD-PI	$\sqrt{\eta}(a_p + m(t))$	0	$\eta \cdot \alpha$	$\frac{1}{2}\eta \cdot \alpha = \frac{1}{2}\mathcal{P}_m$	$2W$	$2WN_0$
BLU-PS	$\frac{1}{\sqrt{2}}m(t)$	$\mp \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{m}(t)$	$\frac{1}{2}\mathcal{P}_m$	$\frac{1}{2}\mathcal{P}_m$	W	WN_0

Questa tabella estende quella al § 10.1.4, rispetto alla quale si considera il termine k_a ora inglobato in $m(t)$, e quindi non più posto in evidenza; inoltre, si pone $\alpha = (a_p^2 + \mathcal{P}_m)$. Inoltre, la banda di rumore B_N presa in considerazione nella tabella è la minima possibile, pari a quella del segnale modulato B_{RF} , direttamente legata (nella modulazione AM) a quella ($\pm W$) del segnale modulante. Pertanto, i risultati che otterremo sono i migliori possibili: infatti, se $B_N > B_{RF}$, l' SNR risulterà peggiore. Precisiamo infine che nella valutazione dell' SNR che segue, ci si riferisce sempre ad una medesima potenza ricevuta $\mathcal{P}_x$ e ad una densità di rumore $\mathcal{P}_n(f) = \frac{N_0}{2}$, allo scopo di rendere confrontabili i risultati.

¹ Infatti i segnali $x_c(t) \cos \omega_0 t$ e $x_s(t) \sin \omega_0 t$ risultano ortogonali, e le potenze si sommano.

Segnale FM

13.4 Prestazioni della trasmissione FM

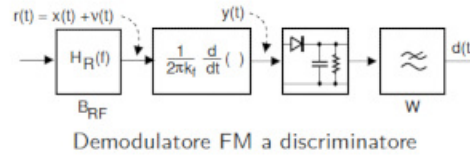
Quando si è analizzata la tecnica di modulazione FM, si è fatta più volte notare la sua natura *non lineare* (pag. 225). È lecito aspettarsi che questa caratteristica determini dei risvolti “bizzarri” per quanto riguarda l' SNR del segnale demodulato, e difatti è proprio così. In particolare, nel caso in cui la potenza del rumore in ingresso al ricevitore non sia eccessiva, avviene che:

- la potenza del rumore dopo demodulazione *diminuisce* all'aumentare della potenza ricevuta;
- l' SNR dopo demodulazione *migliora* all'aumentare della banda occupata.

Nel seguito sviluppiamo l'analisi che porta a questi risultati, valutando prima ciò che accade nella ricezione di una portante non modulata, e quindi discutendo come lo scenario si modifica in presenza di segnale. Infine, illustriamo i motivi che determinano il rapido degrado di prestazioni nel caso di rumore elevato.

13.4.1 Rumore dopo demodulazione FM

Analizziamo innanzitutto il comportamento di un demodulatore *a discriminatore*¹⁰, quando in ingresso è presente una portante *non modulata* di ampiezza¹¹ $A = \sqrt{2\mathcal{P}_x}$ sovrapposta ad un rumore gaussiano bianco limitato in banda:



$$r(t) = A \cos \omega_0 t + \nu_c(t) \cos \omega_0 t - \nu_s(t) \sin \omega_0 t$$

A differenza del caso AM, ora il filtro $H_R(f)$ deve lasciar passare una banda di frequenze di estensione almeno pari alla banda che sarebbe occupata se la portante fosse modulata FM, e stimata applicando ad esempio la *regola di Carson* (eq. 10.10), ossia $B_C \simeq 2W(\beta + 1)$.

Il segnale $y(t)$ in uscita dal derivatore è quindi dato da

$$y(t) = \left(\frac{f_0}{k_f} + \frac{1}{2\pi k_f} \frac{d}{dt} \theta(t) \right) \sin(\omega_0 t + \theta(t))$$

che viene a sua volta elaborato da parte del demodulatore di involuppo come fosse un segnale BLD-PI, fornendo in definitiva un segnale demodulato

$$d(t) = \frac{1}{2\pi k_f} \frac{d}{dt} \theta(t) \quad (13.10)$$

Caso di Rumore basso

Dopo manipolazioni si ottiene:

$$SNR = \frac{\mathcal{P}_d}{\mathcal{P}_{\nu_d}} = \frac{\mathcal{P}_m}{\frac{2}{3} \frac{N_0}{(k_f A)^2} W^3} = 3 \frac{\mathcal{P}_m k_f^2}{W^2 N_0 W} \frac{A^2}{2} = 3 \frac{\sigma_{f_d}^2}{W^2} \frac{\mathcal{P}_x}{N_0 W} = 3\beta^2 SNR_0$$

Il risultato ottenuto conferma la seconda affermazione di inizio sezione: si ha un *miglioramento* rispetto all'*SNR di riferimento* SNR_0 (e dunque rispetto all'AM) *tanto maggiore* quanto più è grande l'indice di modulazione β , ovvero *quanto maggiore è la banda occupata* dal segnale modulato (vedi eq. (10.10) a pag. 230).

Caso di Rumore elevato

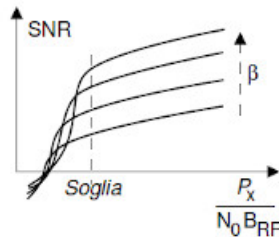
Qualora il valore efficace del rumore in ingresso al discriminatore sia confrontabile con quello del segnale utile ricevuto, si verifica un *effetto soglia* all'aumentare del rumore, e l' SNR degrada molto rapidamente.

Per indagarne le cause facciamo riferimento allo schema a lato, che mostra l'involuppo complesso della portante non modulata A , del rumore in ingresso $\underline{v}(t)$, e del segnale ricevuto $\underline{r}(t)$, notando che se i valori efficaci dei primi due sono comparabili, può verificarsi il caso che $\underline{r}(t)$ ruoti attorno all'origine.

Quando ciò si verifica, a valle del derivatore che è presente nel discriminatore si determina un *click*, ovvero un segnale impulsivo di area pari a 2π , come illustrato nella figura a lato. Questo fatto è facilmente verificabile, ascoltando una radio FM broadcast, che in condizioni di cattiva ricezione manifesta la comparsa di un rumore, appunto, impulsivo.

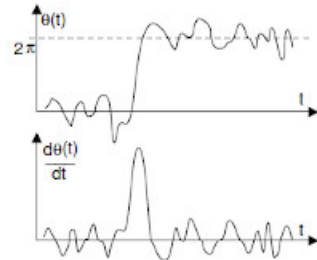
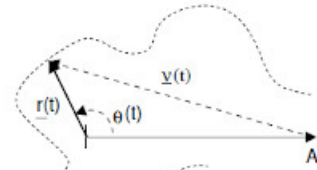
All'aumentare della potenza di rumore, aumenta la frequenza con la quale $\underline{r}(t)$ "aggira" l'origine, e pertanto aumenta la frequenza dei *click*, che tendono a produrre un crepitio indistinto. Si è trovato che questo effetto si manifesta a partire da un SNR di ingresso

pari a 10 dB, e per SNR peggiori di tale valore l'effetto aumenta molto rapidamente, cosicché si parla di *effetto soglia*.



Nel grafico a lato è riportato un tipico andamento dell' SNR dopo demodulazione, con l'indice di modulazione β che svolge il ruolo di parametro, e possiamo osservare come con un SNR di ingresso inferiore alla soglia, le prestazioni degradino rapidamente. Si è trovato che demodulando con un PLL, anziché con un discriminatore, la soglia si riduce a circa 7 dB.

Nella pratica comune il segnale di rumore può essere costituito da una *interferenza* dovuta ad una emittente adiacente (ossia con una portante prossima alla nostra) che *sovramodula*, ovvero adotta un indice di modulazione troppo elevato, ed invade la banda delle emittenti contigue.



13.4.4 Enfasi e de-enfasi

Abbiamo osservato che, in presenza di rumore bianco in ingresso, il rumore dopo demodulazione ha un andamento parabolico. Questo comporta che, se il messaggio modulante $m(t)$ avesse un $\mathcal{P}_m(f)$ a sua volta bianco, l' $SNR(f)$ alle frequenze più elevate sarebbe molto peggiore, rispetto al suo valore per frequenze inferiori. Nella pratica, si possono verificare (ad esempio) i seguenti problemi:

1. Nelle trasmissioni FDM-FM (vedi § 9.1.1.2), in cui più canali vengono modulati AM-BLU, multiplati in frequenza, e ri-modulati congiuntamente in FM a basso indice, i canali agli estremi della banda FDM sono più rumorosi;
2. nell'FM commerciale (vedi § 20.2), il segnale modulante è molto più ricco di energia alle basse frequenze, dunque il problema del rumore elevato in alta frequenza è aggravato dal "basso segnale".

Il rimedio a tutto ciò consiste nel modificare $m(t)$ mediante un circuito detto *di enfasi*, in modo tale che anch'esso presenti uno spettro "parabolico", e poi aggiungere una rete di *de-enfasi* in ricezione (praticamente un integratore, ovvero un passa-basso) tale da ripristinare l'originale sagoma spettrale del segnale e rendere la densità di potenza del rumore nuovamente uniforme.

Con un pò di riflessione, ci si accorge che l'uso di una coppia enfasi-deenfasi equivale ad effettuare una trasmissione PM (vedi pag. 225) ! In realtà, la rete di enfasi non è un derivatore perfetto (altrimenti annullerebbe le componenti del segnale a frequenza prossima allo zero), ed esalta le frequenze solo se queste sono maggiori di un valore minimo. Pertanto, si realizza un metodo di modulazione "misto", FM in bassa frequenza e PM a frequenze (di messaggio) più elevate.

Modulazione Numerica

SONO qui discusse le tecniche adottate qualora il segnale da trasmettere in forma modulata non sia analogico, ma costituito da una sequenza numerica, o simbolica. Il contesto applicativo può variare su un ampio ventaglio di casi, come le forme di broadcast digitale (terrestre o satellitare), le reti di accesso WIFI o di telefonia cellulare, i modem e l'ADSL, le comunicazioni satellitari dallo spazio profondo, i ponti radio numerici per flussi dati ottenuti come moltiplicazione temporale di più sorgenti, di tipo multimediale e/o provenienti da reti a pacchetto... in pratica, la gran parte delle comunicazioni dati che *non* viaggiano su fibra ottica.

In tutti questi casi ci si trova in presenza di un canale trasmissivo di tipo *passa-banda*, quindi inadatto a trasportare un segnale dati realizzato mediante codici di linea di *banda base* (vedi § 8.2), e dunque è necessario produrre un segnale modulato (vedi cap. 9) per trasportare la banda del segnale in accordo ai vincoli imposti dal canale. Ora non vengono però semplicemente applicate le tecniche esposte al cap. 10, ma queste vengono rese specifiche alla caratteristica del segnale dati di essere costituito da sequenze di simboli appartenenti ad un alfabeto finito, da mappare (agli istanti di simbolo) su un insieme finito di punti nello spazio, che per segnali modulati è lo spazio dell'involuppo complesso.

Modulazioni di ampiezza

Se la modulante è costituita da dati binari, normalmente rappresentati con +1 e -1, la **modulazione di ampiezza** corrisponde a una **modulazione di fase**, con i due soli valori 0 e π . Le modulazioni più diffuse sono:

- **BPSK** Bi-Phase Shift Keying

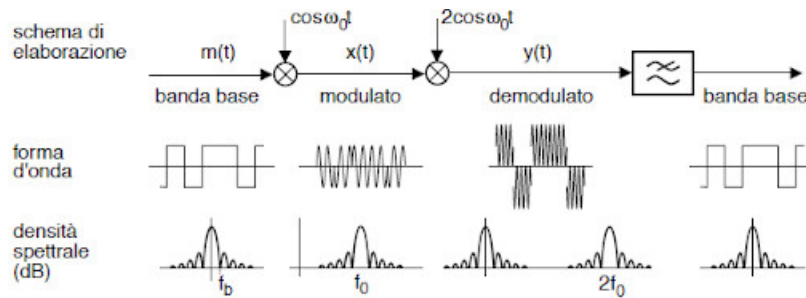


Figura 14.1: Architettura di mo-demodulazione BPSK, forme d'onda, e densità spettrali

BPSKfig14.1.jpg

- **L-ASK** Amplitude Shift Keying con modulante a L livelli distinti

Ci riferiamo ora al caso in cui si operi una classica AM-BLD (da cui il termine *Amplitude Shift Keying* - ASK) a partire da un segnale dati $m(t)$ multilivello (§ 8.1.2.4), producendo un segnale modulato di espressione

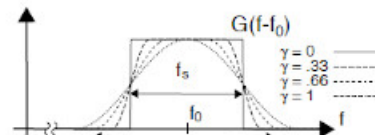
$$x_{L-ASK}(t) = m(t) \cos(2\pi f_0 t) \quad \text{dove} \quad m(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot \text{rect}_{T_s}(t - kT_s)$$

in cui $m(t)$ agli istanti kT_s assume valori a_k distribuiti uniformemente, in un intervallo Δ , su L livelli di ampiezza centrati sullo zero⁵.

L'ampiezza di L-ASK subisce

dunque variazioni, come mostrato nella figura soprastante per un caso con $L = 8$, in cui è rappresentato anche un diagramma detto *costellazione*, che rappresenta i valori assunti

dall'involuppo complesso in corrispondenza degli istanti di simbolo, che in virtù della AM-BLD presenta la sola c.a. di b.f. $x_c(t)$. Ogni a_k rappresenta dunque $M = \log_2 L$ bit, ed il periodo di simbolo $T_s = MT_b$ ha durata multipla di T_b , pertanto la banda occupata da L-ASK è *minore* rispetto a quella del BPSK di un fattore pari a $M = \log_2 L$ ⁽⁶⁾.

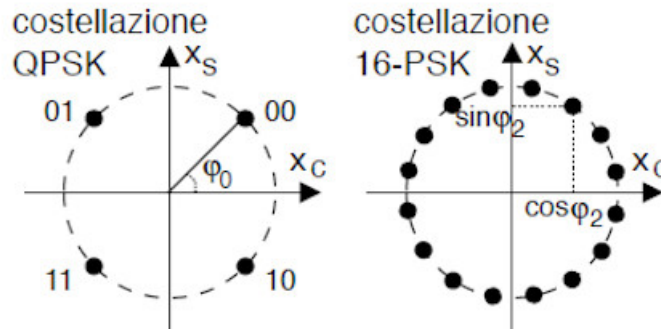


⁵Ad esempio: se $L = 32$ livelli, la banda si riduce di 5 volte, ed infatti con $M = 5$ bit si individuano $L = 2^M = 32$ configurazioni. Dato che il numero M di bit/simbolo deve risultare un intero, si ottiene che i valori validi di L sono le potenze di 2.

Modulazioni di fase

In questa modulazione l'informazione viene trasportata dalla fase della portante, nel caso presente espressa in valori discreti, multipli interi di una frazione di π . Si una rappresentare tali valori di fase con punti nel piano complesso.

- **QPSK e L-PSK**, dove Q = Quad e $L = n$. livelli > 4



Prestazioni PSK: Probabilità di errore in funzione del rapporto Segnale/Rumore S/N

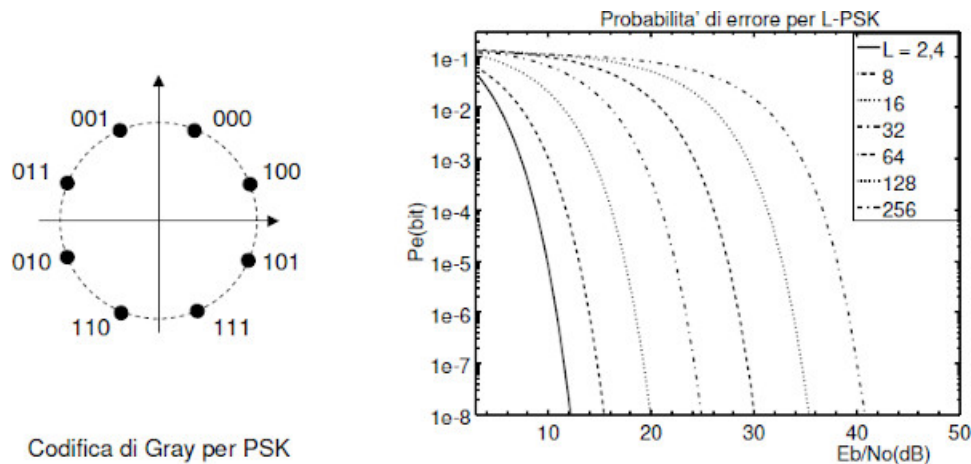


Figura 14.10: Prestazioni L-PSK con codice di Gray

Il **codice di Gray**, è un codice binario a **lunghezza fissa**. Si possono usare codici di Gray di tutte le lunghezze: il codice di lunghezza s è costituito da tutte le 2^s sequenze di s bit e consente di rappresentare tutti gli interi da 0 a $2^s - 1$. Esso differisce dalla notazione posizionale binaria degli interi in quanto prevede che si passi **da un intero al successivo modificando un solo bit**; questa caratteristica (detta a cambio 1) semplifica e rende meno soggette ad errori le operazioni di dispositivi elettronici che devono scorrere informazioni organizzate in sequenze.

- **QAM** Quadrature Amplitude Modulation

Questo acronimo sta per *Quadrature Amplitude Modulation*, ed individua la tecnica di modulazione che utilizza due portanti in quadratura come il PSK

$$x_{QAM}(t) = x_c(t) \cos \omega_0 t - x_s(t) \sin \omega_0 t$$

ma a differenza del PSK, ora le componenti di banda base x_c ed x_s non dipendono da una stessa sequenza di fasi, ma sono originate da due flussi di dati distinti.

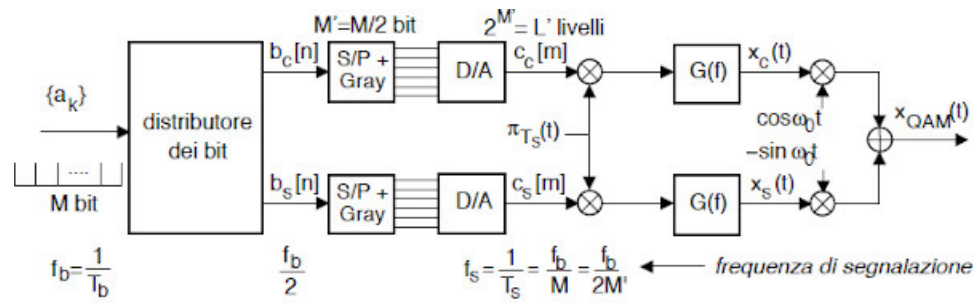
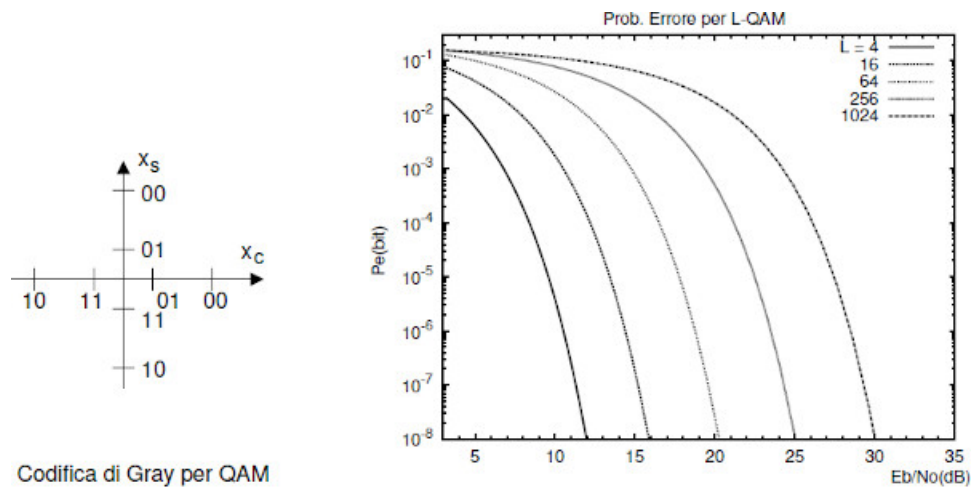
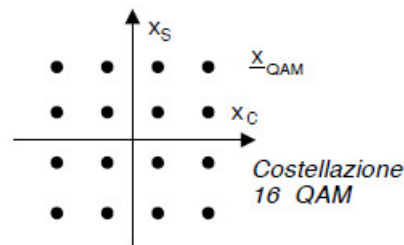


Figura 14.11: Architettura di un modulatore QAM



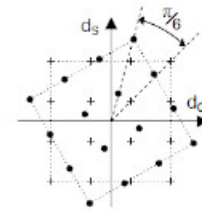
Codifica di Gray per QAM

Figura 14.14: Prestazioni L-QAM con codice di Gray

Come si vede, la modulazione **QAM** fornisce **prestazioni superiori** alla **PSK**

14.4 Codifica differenziale

Se la portante con cui si effettua la demodulazione presenta un errore di fase³⁶, il piano dell'involuppo complesso subisce una rotazione, producendo decisioni sistematicamente errate a causa dello spostamento dei punti di costellazione ottenuti campionando le c.a. di b.f. (pallini) rispetto a quelli che si otterrebbero nel caso di demodulazione *coerente* (crochette). Per rimediare al problema, si può estendere il principio *differenziale* (espresso a pag. 153 per segnali di banda base) al caso delle modulazioni numeriche, rendendo la decisione su quale punto di costellazione sia stato ricevuto indipendente dalla fase della portante di demodulazione, ma dipendente invece dalla fase dell'involuppo complesso osservata *per il simbolo precedente*. Ciò si realizza modificando il criterio con cui sono determinati i punti di costellazione da trasmettere, scegliendoli ora in funzione di una *coppia* di simboli consecutivi, anziché di uno solo.



- **DBPSK** Differential BPSK
- **DQPSK** Differential QPSK

Modulazioni di frequenza ad ampiezza costante

- **L-FSK** Frequency Shift Keying a L livelli

Qualora si desideri che l'ampiezza del segnale modulato si mantenga strettamente costante si può adottare la tecnica di modulazione **FSK** (*Frequency Shift Keying*), che associa ad ogni simbolo

$$x_{FSK}(t) = \cos[2\pi(f_0 + m(t))t] \quad \text{dove} \quad m(t) = \Delta \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k \cdot \text{rect}_{T_s}(t - kT_s)$$

dove ogni elemento della sequenza f_k assume uno tra i valori $\{0, 1, 2, \dots, L-1\}$. Si tratta in altri termini di una portante la cui frequenza nominale f_0 è alterata di una quantità $\Delta \cdot f_k$ Hz per un intervallo temporale pari al periodo di simbolo T_s , in cui Δ rappresenta ora la spaziatura (uniforme) tra le frequenze associate agli L livelli. Pertanto l'espressione può essere riscritta come

$$x_{FSK}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \cos[2\pi(f_0 + \Delta f_k)t] \cdot \text{rect}_{T_s}(t - kT_s) \quad (14.19)$$

Il risultato è senza dubbio ad ampiezza costante; se $T_s \gg \frac{1}{f_0}$ si può adottare uno schema di mododemodulazione basato su di un VCO ed un PLL (vedi § 10.2.2.2 e 10.3.1.1) riportato (per $L = 2$) in figura 14.17, in cui all'uscita del passa basso ritroviamo il segnale modulante.

Lo schema è effettivamente utilizzato per modem a bassa velocità e basso costo, ed ha il pregio di funzionare anche in presenza di errori tra l' f_0 usata dal VCO del trasmettitore e quella del ricevitore. Per raggiungere velocità f_b più elevate a parità di L , occorre ridurre T_s , in modo da aumentare $f_s = \frac{1}{T_s}$ e quindi $f_b = f_s M = f_s \log_2 L$. In tal caso può essere necessario ricorrere ad un demodulatore più complesso, come descritto al § seguente.

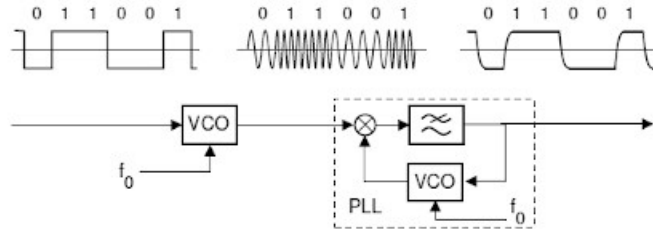


Figura 14.17: Modem FSK a bassa velocità

• OFSK Orthogonal FSK

Nel caso in cui si realizzi la condizione $\Delta = \frac{i}{2T_s}$ con i intero, le diverse frequenze $f_0 + \Delta f_k$ sono *ortogonali*³², e può essere adottato un *demodulatore a correlazione* (vedi § 6.5.2), realizzato mediante un banco di correlatori ed una decisione di massimo, in cui l' n -esimo correlatore esegue

$$\int_0^{T_s} \cos[2\pi(f_0 + m\Delta)t] \cos[2\pi(f_0 + n\Delta)t] dt \quad (14.20)$$

dove $f_0 + m\Delta$ rappresenta la frequenza (incognita) in arrivo, mentre $f_0 + n\Delta$ è una delle frequenze possibili, con $n \in \{0, 1, 2, \dots, L-1\}$. Essendo tali frequenze tra

loro ortogonali³³ entro l'intervallo di integrazione, al termine del calcolo una sola delle uscite sarà diversa da zero. Come discusso al § 6.5, in presenza di rumore l'uscita di ogni correlatore diviene una v.a. con varianza $\frac{N_0}{2} \mathcal{E}_C$, corrompendo l'ortogonalità tra simboli, e dunque si rende necessaria l'operazione di confronto per realizzare una decisione di *massima verosimiglianza* (§ 5.6.3). Indicando infatti con r_n , $n = 0, 1, \dots, L-1$ la grandezza prodotta dal campionario n -esimo, e con $\mathbf{r} = r_0, r_1, \dots, r_{L-1}$ il vettore aleatorio L -dimensionale corrispondente, la scelta del maggiore tra gli r_n corrisponde a scegliere l'ipotesi $f_{\hat{n}}$ che rende massima la $p(\mathbf{r}/f_{\hat{n}})$ ³⁴.

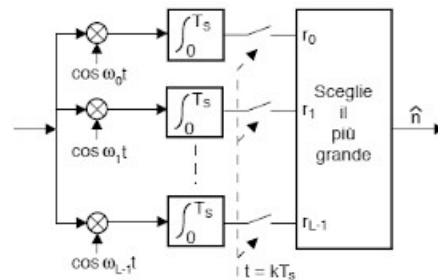


Figura 14.18: Demodulatore FSK a correlazione

Quadro riassuntivo delle modulazioni di frequenza/fase

Metodo	bit/simbolo	$P_e(\text{bit})$ con codifica di Gray ed impulso a banda minima	Banda RF	ρ [bit/sec/Hz]
BPSK	1	$\frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left\{ \sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \right\}$	$f_b (1 + \gamma)$	$\frac{1}{(1+\gamma)}$
QPSK	2	$\frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left\{ \sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \right\}$	$\frac{f_b}{2} (1 + \gamma)$	$\frac{2}{(1+\gamma)}$
OOK, 2-FSK	1	$\frac{1}{2} \exp \left(-\frac{E_b}{2N_0} \right)$ (incoerente, impulso RZ)	$\sim 2f_b$	$\sim \frac{1}{2}$
L-ASK	M	$\frac{1}{M} \left(1 - \frac{1}{L} \right) \operatorname{erfc} \left\{ \sqrt{3 \frac{E_b}{N_0} \frac{M}{(L^2-1)}} \right\}$	$f_b \frac{(1+\gamma)}{M}$	$\frac{M}{(1+\gamma)}$
L-PSK	M	$\frac{1}{M} \operatorname{erfc} \left\{ \sin \left(\frac{\pi}{L} \right) \sqrt{\frac{E_b}{N_0} M} \right\}$	$f_b \frac{(1+\gamma)}{M}$	$\frac{M}{(1+\gamma)}$
L-QAM	M	$\frac{2}{M} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{L}} \right) \operatorname{erfc} \left\{ \sqrt{\frac{3}{2} \frac{E_b}{N_0} \frac{M}{L-1}} \right\}$	$f_b \frac{(1+\gamma)}{M}$	$\frac{M}{(1+\gamma)}$
L-FSK incoerente	M	vedi pag. 360	$f_b \frac{L}{M}$	$\frac{M}{L}$
L-FSK coerente	M	eq (14.22) a pag. 358	$f_b \frac{L}{2M}$	$\frac{M}{2L}$

Tabella 14.1: Confronto tra metodi di modulazione numerica

γ = roll off del coseno rialzato (raised cosine)

ρ = ridondanza = q/k % rapporto tra numro di bit di protezione e di informazione in un codice

M = numero di bit per ogni "**simbolo**", dove "simbolo" = uno degli L segnali diversi usati per trasmettere bit, appartenenti alla costellazione di fase o a un altro gruppo di segnali fisici (come in L-FSK) . Ad esempio la **16 QAM** usa **16 simboli** e quindi **ogni simbolo** rappresenta una **sequenza di 4 bit**. Ne segue che la **bit rate (bit/sec)** è in questo caso **4 volte la symbol rate** (simboli/secondo o **BAUD**).

erfc(x) = Funzione errore complementare = $1 - \operatorname{erf}(x)$.

$$\begin{aligned} \operatorname{erf}(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-x}^x e^{-t^2} dt \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt. \end{aligned}$$

E_b = Energia per bit

N_0 = Densità spettrale di potenza del rumore bianco (costante)

Altre modulazioni

Modulazione OFDM

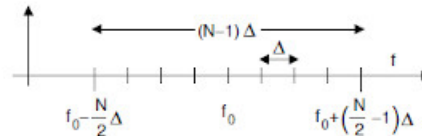
La sigla sta per ORTHOGONAL FREQUENCY DIVISION MULTIPLEX, ossia *multiplazione a divisione di frequenza ortogonale*. Si tratta della tecnica di modulazione numerica adottata per le trasmissioni ADSL⁴⁶, DVB-T, e WiFi, ed ha la particolarità di utilizzare in modo *ottimo* la banda del canale, e di ricondurre l'operazione di equalizzazione ad un prodotto tra vettori.

14.8.1 Rappresentazione nel tempo ed in frequenza

La modulazione OFDM suddivide una sequenza binaria su N diversi flussi, trasmessi a divisione di frequenza mediante forme d'onda ortogonali. Concettualmente possiamo pensare l'OFDM come una evoluzione⁴⁷ della modulazione FSK, in cui le diverse frequenze sono spaziate tra loro di Δ Hz come descritto dall'espressione

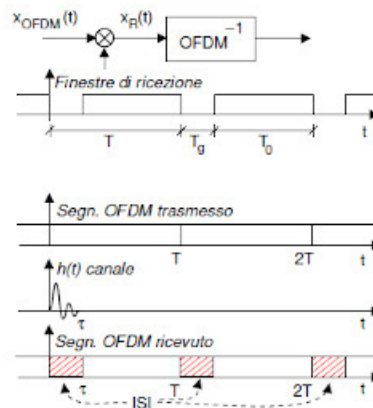
$$f_n = f_0 + \Delta \cdot \left(n - \frac{N}{2} \right) \quad (14.24)$$

con $n = 0, 1, \dots, N-1$ e sono utilizzate contemporaneamente, mentre su ognuna di esse si realizza una modulazione numerica anche a più livelli (es. QPSK o QAM) con impulso NRZ rettangolare di durata T .



Struttura del simbolo OFDM, dove $T_0 = 1/\Delta$

L'intervallo T_0 è detto *periodo principale* del simbolo OFDM, mentre la differenza $T_g = T - T_0$ è indicata come *tempo di guardia*, od anche *preambolo*, ed il segnale ricevuto durante T_g non è usato in ricezione. Il motivo di tale "spreco"⁵⁰ risiede nel fatto che, in presenza di un canale che introduce distorsione lineare, la parte iniziale di ogni simbolo risulta corrotta (vedi figura) da una interferenza intersimbolica (ISI) dovuta al risultato della convoluzione tra la coda del simbolo precedente e $h(t)$ del canale. Consideriamo ora *un solo simbolo* (fissiamo $k = 0$ e consideriamo l'origine dei tempi ritardata di T_g) ricevuto nell'intervallo $T_0 = \frac{1}{\Delta} \leq T$, con inviluppo complesso



$$\underline{x}_{T_0}(t) = \text{rect}_{T_0}(t) \cdot \sum_{n=0}^{N-1} a_n e^{j2\pi[\Delta(n-\frac{N}{2})]t} \quad (14.28)$$

OFDM1.jpg

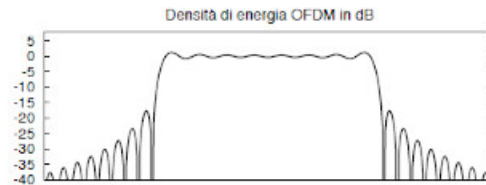
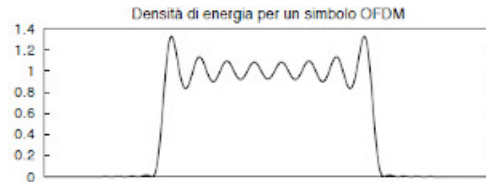
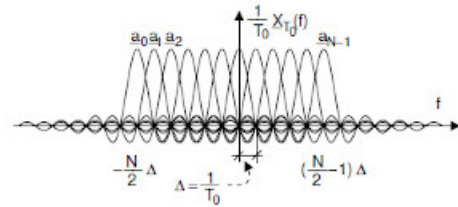
Lo spettro è una serie di funzioni "sinc" (ossia $\sin x/x$)

Otteniamo allora la costruzione grafica mostrata alla figura a lato, dove si evidenzia come ogni funzione *sinc* risulti moltiplicata per uno dei coefficienti $\underline{a}_n$, che potrebbero quindi essere ri-ottenuti in ricezione campionando (in modo complesso) $\underline{X}(f)$ su frequenze spaziate di Δ .

Per quanto riguarda la densità di potenza $\mathcal{P}_{\underline{x}_R}(f)$ dell'involuppo complesso $\underline{x}_R(t)$ ricevuto e finestrato, consideriamo l'espressione (vedi § 6.3.1)

$$\mathcal{P}_{\underline{x}_R}(f) = \frac{1}{T} E \left\{ |\underline{X}_{T_0}(f)|^2 \right\} \quad (14.31)$$

in cui $|\underline{X}_{T_0}(f)|^2$ è la densità di energia di un simbolo OFDM (eq. (14.30)): la figura a lato ne mostra l'andamento (in scala lineare ed in dB) per un simbolo a 32 portanti, di cui 16 (esterne) *spente* (vedi appresso), mentre per le 16 centrali si è posto $\underline{a}_n = 1$. Notiamo come si ottenga una densità spettrale di potenza *quasi rettangolare* pur utilizzando simboli a durata finita.



14.8.3 Efficienza dell'OFDM

Come vedremo al § 14.8.9, questa è una tra le tecniche di modulazione che meglio approssima i risultati della teoria dell'informazione, tanto più quanto maggiore è la sua efficienza. Quest'ultima si ottiene considerando che solo $\tilde{N}$ portanti su N trasportano informazione, e che solo $f_c \cdot T_0$ campioni su $f_c \cdot T$ sono unici; combinando queste quantità si ottiene

$$\rho = \frac{\tilde{N} T_0}{N T} = \frac{\tilde{N} T - T_g}{N T} = \frac{\tilde{N}}{N} \left(1 - \frac{T_g}{T} \right)$$

che misura la frazione di segnale utile rispetto all'occupazione di banda ed al numero di campioni/simbolo presenti in $x_{OFDM}(t)$. La ridondanza introdotta (le portanti vuote ed il preambolo) ha gli stessi scopi di quella introdotta dal roll-off γ di un impulso a coseno rialzato, in quanto

evita che si verifichino fenomeni di interferenza tra simboli, e realizza un segnale limitato in banda. Osserviamo che l'efficienza migliora all'aumentare di T e di N , dato che T_g ed $N - \tilde{N}$ sono fissi.

Esercizio Un flusso binario a velocità $f_b = 1$ Mbps è trasmesso mediante modulazione OFDM con portante 1 GHz, caratterizzata da: $\tilde{N} = 464$ portanti attive su $N = 512$ totali, $M_n = 2$ bit a portante, con modulazione QPSK, e $T_g = 28 \mu\text{sec}$ di tempo di guardia. Calcolare: 1) il numero di bit/simbolo M ed il corrispondente periodo di simbolo T e 2) la spaziatura tra portanti $\Delta = 1/T_0$ e la corrispondente occupazione di banda.

1. $M = M_n \cdot \tilde{N} = 2 \cdot 464 = 928$ bit/simbolo, e
 $T = 1/f_b \cdot M = 10^{-6} \cdot 928 = 928 \mu\text{sec}$;
2. $T_0 = T - T_g = 928 - 28 = 0.9 \text{ msec}$, dunque $\Delta = 1/T_0 \simeq 1.11 \text{ KHz}$, e
 $B = N \cdot \Delta = 512 \cdot 1.11 \cdot 10^3 \simeq 568 \text{ KHz}$.

Sistemi a spettro espanso (Spread Spectrum)

In questa tecnica di modulazione la stessa banda di frequenze è utilizzata contemporaneamente da più trasmissioni differenti, che non interferiscono tra loro grazie all'uso di forme d'onda mutuamente ortogonali; ciò avviene adottando una opportuna *trasformazione* del messaggio da trasmettere, in modo che questo occupi una banda molto maggiore di quella originaria, e sulla manipolazione inversa in ricezione: tale caratteristica è quindi indicata con il termine di *spread spectrum*⁶⁰, e la tecnica di trasmissione risultante prende anche il nome di *multiplazione a divisione di codice* o CDM.

Sebbene la doppia operazione di *spreading/despreading* non produca nessun vantaggio effettivo nei riguardi delle prestazioni ottenibili nel caso in cui la ricezione sia disturbata dalla sola presenza di rumore additivo gaussiano, si ottengono invece i seguenti altri benefici:

- altre trasmissioni e/o disturbi *a banda stretta* che occupano la stessa regione di frequenza occupata dal segnale espanso causano una potenza interferente ridotta;

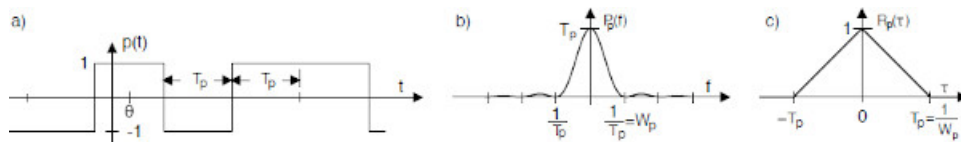


Figura 14.25: a) - sequenza pseudonoise; b) densità di potenza; c) autocorrelazione

- la densità spettrale del segnale trasmesso può confondersi con quella del rumore, rendendo la trasmissione stessa poco rilevabile da parte di soggetti ostili;
- per conoscere il contenuto della trasmissione occorre poter riprodurre in ricezione una esatta replica della trasformazione attuata.

Sequenze pseudocasuali o PseudoNoise (PN)

La trasformazione che produce l'espansione spettrale si basa sull'utilizzo di una sequenza cosiddetta *pseudo-noise* o PN (§ 14.9.3), ovvero le cui caratteristiche statistiche *si avvicinano* a quelle di un rumore stazionario bianco e cioè a valori incorrelati, tranne che questi non sono casuali ma *deterministici*, in modo che la loro ripetizione ciclica rende la sequenza PN riproducibile dal lato ricevente. La fig. 14.25a mostra una parte di un possibile segnale dati $p(t)$ pseudo casuale, bipolare, di durata $L \cdot T_p$

$$p(t) = \sum_{k=0}^{L-1} a_k g(t - kT_p - \theta) \quad (14.38)$$

con θ v.a. uniforme tra $\pm T_p/2$, realizzato mediante impulsi NRZ bipolari $g(t) = \text{rect}_{T_p}(t)$ di durata T_p , la cui polarità è stabilita dagli L valori a_k , scelti pari a ± 1 in modo da avvicinarsi alle condizioni⁶¹

- media nulla e varianza unitaria, cioè $m_A = 0$, $\sigma_A^2 = 1$;
- una autocorrelazione $\mathcal{R}_a(n)$ la più piccola possibile con $n \neq 0$, mimando così la proprietà di indipendenza statistica.

14.9.2 Modulazione per sequenza diretta

Consiste nel prodotto $\tilde{x}(t) = x(t) pn(t)$ tra un segnale di banda base $x(t)$ e la ripetizione ciclica del segnale PN $pn(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} p(t - iLT_p)$, e quindi nel prodotto del risultato per una portante sinusoidale, prendendo complessivamente il nome di *Direct Sequence Spread Spectrum* (o DSSS).

Il segnale $\tilde{x}(t) = x(t) \cdot pn(t)$ [x con $\sim$ sopra, nella figura 14.26] è chiamato **segnale allargato** perchè la sua potenza è la stessa di $x(t)$ ma è **spalmata** sulla **banda di $pn(t)$** .

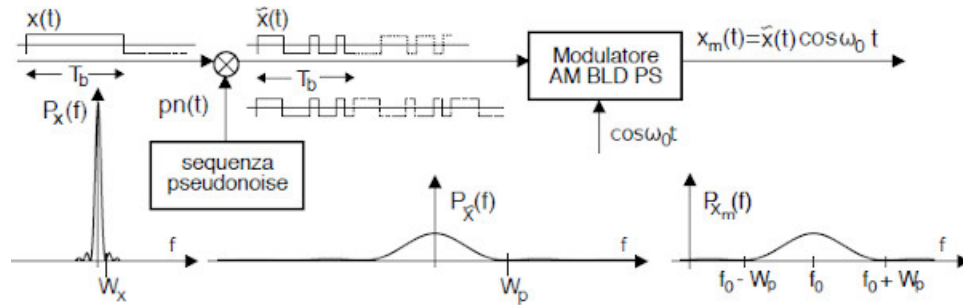
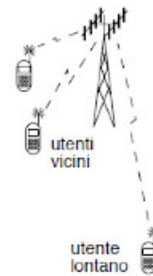


Figura 14.26: Generazione di un segnale modulato DSSS

14.9.2.5 Accesso multiplo

Una frequente applicazione delle tecniche spread spectrum consiste nel permettere la comunicazione *contemporanea* di una pluralità di soggetti, possibile qualora ognuno di essi adotti una diversa sequenza PN: la tecnica prende allora il nome di CDMA (*Code Division Multiple Access*). Mostriamo che in tal caso per ogni comunicazione l'effetto delle altre si riduce ad un modesto innalzamento del rumore di fondo, tanto più piccolo quanto minore è il valore della *intercorrelazione* tra i codici PN utilizzati.

Controllo di potenza Qualora un utente di un sistema CDMA sia sensibilmente più lontano dal ricevitore rispetto agli altri, se tutti trasmettono con la stessa potenza, l'attenuazione subita dal segnale dell'utente lontano fa sì che il termine MUI aumenti di importanza, anche in presenza di intercorrelazione bassa, producendo un notevole degrado della qualità della trasmissione. Questo fenomeno è indicato come *effetto near-far*. Per ovviare al problema, un sistema CDMA viene usualmente corredato di un meccanismo di *controllo di potenza*, espletato dalla stazione radio base⁷², che misurando la potenza ricevuta da ciascun utente, ne richiede la diminuzione ai vicini e/o l'aumento ai lontani, in modo da ricevere la medesima potenza da ciascuno di essi.



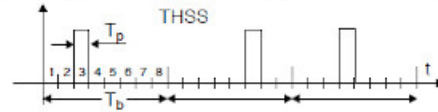
14.9.4 Frequency Hopping

Si tratta di una diversa tecnica *spread spectrum*, in cui la sequenza PN è di tipo *multilivello*, ed è utilizzata in uno schema L-FSK incoerente (§ 14.5) per cambiare in continuazione la frequenza portante a cui avviene la trasmissione, tipicamente FSK anch'essa (vedi figura 14.29), da cui il nome di *saltando di frequenza* (traduzione letterale di FREQUENCY HOPPING). Per una corretta ricezione, è necessaria una accurata sincronizzazione temporale tra la PN usata in trasmissione e quella in ricezione.

Anche in questo caso si verifica un fenomeno di espansione spettrale, ma stavolta non tutta la banda è occupata in modo *permanente* come nel DSSS, ma anzi durante ogni *salto* si occupa solo la banda necessaria alla modulazione *non allargata*. In questo caso un disturbo a banda stretta provoca interferenza solo durante il salto che occupa la sua stessa frequenza, e dunque può essere facilmente contrastata adottando una codifica di canale (§ 11.3). Inoltre, la tecnica FHSS è proficuamente impiegata in sistemi di accesso multiplo CDMA, dato che possono avvenire contemporaneamente più trasmissioni FHSS utilizzando per esse differenti sequenze PN a bassa intercorrelazione.

14.9.5 Time Hopping o UWB

In questo caso la trasmissione avviene su intervalli temporali molto ridotti, e dunque con una occupazione di banda molto elevata (a volte indicata come *ultra wide band* o UWB⁸²); l'altro aspetto in comune con le tecniche a spettro espanso è il posizionamento pseudo-casuale degli impulsi nell'ambito di una trama temporale, in base ad una sequenza PN⁸³. La figura a lato raffigura un segnale THSS di banda base, in cui per ogni bit viene trasmesso un chip con $T_p \ll T_b$, posizionato su (ad es.) una di otto possibili posizioni, in maniera pseudo casuale.



14.11 Sincronizzazione

Nelle trasmissioni numeriche occorre ottenere allo stesso tempo sia la sincronizzazione della portante di demodulazione, nei limiti delle ambiguità di fase residue, sia la corretta temporizzazione di simbolo, per campionare le c.a. di b.f. ricevute al centro del periodo di simbolo⁹⁶, ed evitare l'insorgenza di ISI. Le due problematiche possono essere affrontate l'una di seguito all'altra, adottando le soluzioni già esposte⁹⁷. D'altra parte sono ora possibili varianti, come ad esempio il *Costas loop*⁹⁸ che, utilizzando entrambe le c.a. di b.f., realizza l'aggancio di frequenza anche per tecniche di modulazione a portante soppressa, oppure procedure che tentano di acquisire per primo il sincronismo di simbolo, e quindi usano i valori delle c.a. di b.f. ricevute per effettuare correzioni alla fase dell'oscillatore di demodulazione⁹⁹.

Qualora la portante di demodulazione presenti una ambiguità di fase residua si può applicare la tecnica della codifica differenziale esposta al § 14.4, oppure inserire una sequenza di simboli noti (o *flag*) all'inizio della trama trasmissiva, in modo che il confronto tra i valori previsti e quelli ricevuti permetta di correggere tale ambiguità. Da notare che i *flag* o *trailer* ad inizio trama possono essere vantaggiosamente usati anche da schemi di recupero del clock del tipo di quelli al § 8.6.2.

Conclusione

Ho cercato di sintetizzare il più possibile questa parte, indubbiamente complessa, contando soprattutto sul fatto che chi vuole può approfondire questi temi sul libro, dove sono trattati con adeguata profondità.

Estratto da "<https://www.electroyou.it/mediawiki/index.php?title=UsersPages:Clavicordo:tlc-bignami-4>"