Dirty Deeds (DirtyDeeds)

FORZE ELETTROSTATICHE NEI CONDENSATORI

1 July 2012

Quello del calcolo della forza che si esercita tra le armature di un condensatore è un argomento che è stato trattato più volte nel forum di ElectroYou (p.es. **qui** e **qui**): è un calcolo semplice -tipicamente viene fatto con un metodo energetico-, ma che presenta alcuni **trabocchetti**. Scopo di questo articolo è proprio quello di mettere in guardia da questi trabocchetti, rivedendo il **calcolo della forza** passo per passo.

1 Introduzione

Con riferimento alla figura 1 qui sotto, supponiamo di avere un **condensatore piano** con un'armatura fissa e una mobile, connesso a un circuito di alimentazione. Supponiamo che esista una posizione di riposo in cui le armature del condensatore abbiano distanza a e fissiamo un asse di riferimento z per la posizione dell'armatura mobile in modo tale che nella posizione di riposo questa abbia coordinata 0; scegliamo l'orientamento dell'asse di riferimento in modo tale che l'armatura fissa abbia coordinata $a > 0$.

La distanza tra le due armature è quindi $d(z) = a - z$; se trascuriamo gli effetti di bordo, la capacità di tale condensatore può essere approssimata come

$$C(z) \approx \frac{\epsilon_0 \epsilon_\mathrm{r} A}{d(z)} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_\mathrm{r} A}{a - z} \qquad (1)$$

dove ϵ_0 è la costante elettrica, ϵ_r è la permettività relativa del dielettrico del condensatore e A è l'area delle armature.

Problema: quanto vale la forza che si esercita tra le armature per una generica posizione dell'armatura mobile?

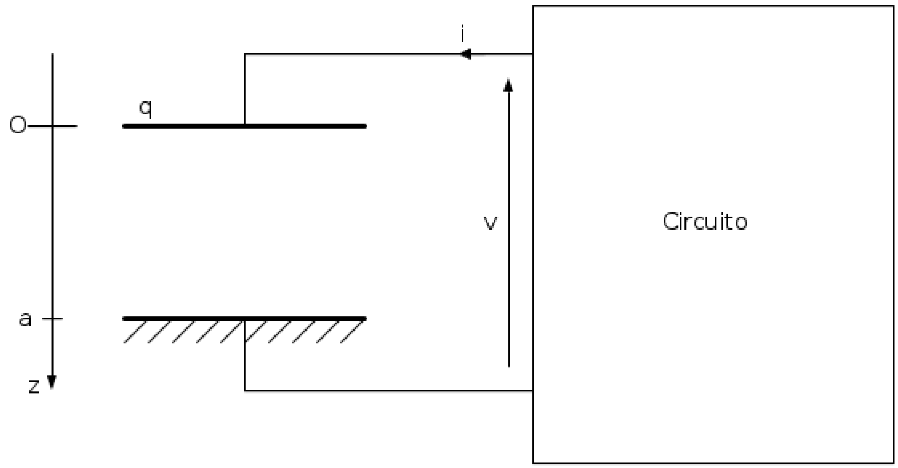

Figura 1

2 Soluzione con metodo energetico

Un condensatore, com'è noto, è un dispositivo che permette di immagazzinare energia sotto forma elettrostatica. Lo stato del condensatore di figura 1, e quindi la sua energia interna U_e, sono completamente determinati dalla coordinata z dell'armatura mobile e dalla carica q accumulata sulle armature. Variando z o q possiamo variare l'energia immagazzinata nel condensatore: per il principio di conservazione dell'energia, la somma dei lavori meccanico ed elettrico fatti *sul* condensatore è uguale alla variazione di energia elettrostatica; in forma differenziale,

$$\mathrm{d}U_\mathrm{e} = v(q,z)\,\mathrm{d}q - F_\mathrm{e}(q,z)\,\mathrm{d}z \qquad (2)$$

dove $v(q,z)$ è la tensione ai capi del condensatore, definita dalla sua relazione costitutiva, ed $F_\mathrm{e}(q,z)$ è la componente z della forza elettrostatica che agisce sull'armatura mobile.

Poiché l'energia interna è funzione solo dello stato del condensatore, $U_\mathrm{e} = U_\mathrm{e}(q,z)$, possiamo anche scrivere

$$\mathrm{d}U_\mathrm{e} = \frac{\partial U_\mathrm{e}}{\partial q}\mathrm{d}q + \frac{\partial U_\mathrm{e}}{\partial z}\mathrm{d}z \qquad (3)$$

Uguagliando la (2) e (3) si ottengono le relazioni

$$v(q,z) = \frac{\partial U_{\mathrm{e}}(q,z)}{\partial q} \qquad (4)$$

e

$$F_{\mathrm{e}}(q,z) = -\frac{\partial U_{\mathrm{e}}(q,z)}{\partial z} \qquad (5)$$

Per determinare $U_{\mathrm{e}}(q,z)$ bisogna integrare la (3) lungo un cammino che porti dallo stato di riferimento $(q=0,\, z=0)$, a cui possiamo assegnare energia nulla, allo stato (q,z) generico: poiché tale integrale è indipendente dal cammino di integrazione (altrimenti q e z da sole non sarebbero sufficienti a determinare lo stato del condensatore), possiamo integrare lungo un cammino che ci permetta di determinare l'integrale senza conoscere F_{e}: prima, mantenendo $q=0$, cioè con condensatore scarico, integriamo tra $(0,0)$ e $(0,z)$; poi, mantenendo z costante, carichiamo il condensatore al valore di carica voluto (cammino rosso in figura 2).

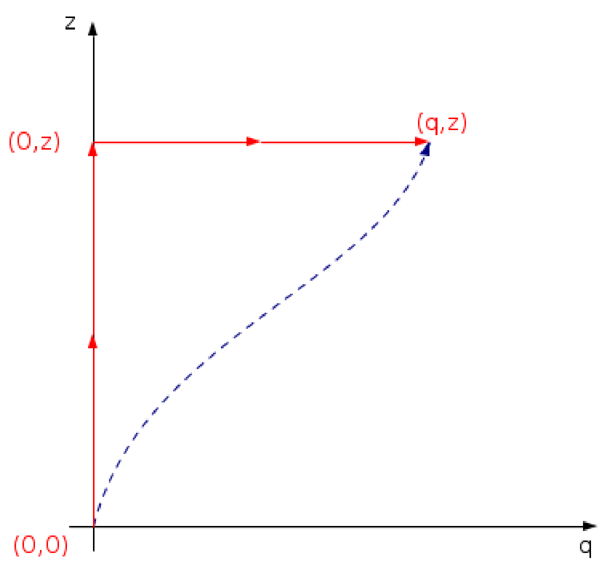

Figura 2: l'integrale dell'equazione (3) è indipendente dal cammino scelto nell'andare dallo stato di riferimento $(q=0,\, z=0)$ allo stato generico (q,z).

Nel primo tratto, a condensatore scarico, la forza tra le armature è nulla e $\mathrm{d}U_{\mathrm{e}} = 0$; per il secondo tratto, a z costante, si ottiene

$$U_{\mathrm{e}}(q,z)=\int_0^q v(q',z)\mathrm{d}q' \qquad (6)$$

Se supponiamo che il dielettrico del condensatore sia lineare si ha $v(q,z)=q/C(z)$ e l'integrale (6) dà come risultato

$$U_{\mathrm{e}}(q,z)=\frac{q^2}{2C(z)} \qquad (7)$$

Sostituendo infine la (7) nella (5) si ottiene

$$F_{\mathrm{e}}=\frac{q^2}{2C(z)^2}\frac{\mathrm{d}C(z)}{\mathrm{d}z} \qquad (8)$$

da cui, tenendo conto della (1),

$$F_{\mathrm{e}}(q,z)\approx\frac{q^2}{2\epsilon_0\epsilon_{\mathrm{r}}A} \qquad (9)$$

Come ci si può aspettare, la forza è attrattiva (ha componente z positiva).

Riassumendo, se rappresentiamo lo stato del condensatore con la coppia di variabili (q,z), possiamo determinare l'energia immagazzinata nel condensatore con l'equazione (6) e la forza tra le armature con la (5). Nel caso particolare di un condensatore piano con dielettrico lineare, trascurando gli effetti di bordo, la forza tra le armature è data dalla (9).

E se invece della carica volessimo usare la tensione per rappresentare lo stato del condensatore? Una volta trovata $F_{\mathrm{e}}(q,z)$ dalla (5), potremmo invertire la relazione costitutiva del condensatore $v=v(q,z)$, sostituendo il risultato $q=q(v,z)$ nell'espressione di F_{e}: $F_{\mathrm{e}}(v,z)=F_{\mathrm{e}}(q(v,z),z)$. Per esempio, per il condensatore di figura 1 si ha

$$q=C(z)v\approx\frac{\epsilon_0\epsilon_{\mathrm{r}}A}{a-z}v$$

che sostituita nella (9) dà

$$F_{\rm e}(v,z) \approx \frac{\epsilon_0\epsilon_{\rm r}A}{2(a-z)^2}v^2 \qquad \text{(9 bis)}$$

Però possiamo procedere anche in un altro modo: l'integrale (6) può essere risolto anche per parti, ottenendo

$$U_{\rm e}(q,z) = qv(q,z) - \int_0^q q'\frac{\partial v(q',z)}{\partial q'}{\rm d}q' \qquad (10)$$

da cui, integrando per sostituzione,

$$U_{\rm e}(q,z) = qv(q,z) - \int_0^{v(q,z)} q(v',z){\rm d}v' \qquad (11)$$

La funzione

$$\bar{U}_{\rm e}(v,z) = \int_0^v q(v',z){\rm d}v' \qquad (12)$$

viene chiamata *coenergia* del condensatore. Dalla (11), e invertendo la relazione costitutiva $v = v(q,z)$, si ha

$$\bar{U}_{\rm e}(v,z) = q(v,z)v - U_{\rm e}(q(v,z),z) \qquad (13)$$

La (13) rappresenta una trasformazione, nota in fisica come *trasformazione di Legendre*, che mappa una funzione $U_{\rm e}$ di q in una funzione della derivata $v = \partial U/\partial q$. La coenergia contiene le stesse informazioni dell'energia, solo espresse rispetto ad un'altra variabile.

Derivando la (13) rispetto a z si ha

$$\frac{\partial \bar{U}_{\mathrm{e}}(v,z)}{\partial z} = \frac{\partial q(v,z)}{\partial z}v - \left.\frac{\partial U_{\mathrm{e}}(q,z)}{\partial q}\right|_{q=q(v,z)} \frac{\partial q(v,z)}{\partial z} - \left.\frac{\partial U_{\mathrm{e}}(q,z)}{\partial z}\right|_{q=q(v,z)} \qquad (14)$$

e poiché $v = \partial U_{\mathrm{e}}(q,z)/\partial q$,

$$\frac{\partial \bar{U}_{\mathrm{e}}(v,z)}{\partial z} = -\left.\frac{\partial U_{\mathrm{e}}(q,z)}{\partial z}\right|_{q=q(v,z)} \qquad (15)$$

ovvero

$$F_{\mathrm{e}}(v,z) = -\left.\frac{\partial U_{\mathrm{e}}(q,z)}{\partial z}\right|_{q=q(v,z)} = \frac{\partial \bar{U}_{\mathrm{e}}(v,z)}{\partial z} \qquad (16)$$

L'equazione (16) ci dice una cosa importante: proprio come l'energia, anche la coenergia può essere usata per determinare la forza tra le armature (meno male, altrimenti la coenergia non conterrebbe le stesse informazioni dell'energia), ma nel derivare rispetto a z, il segno cambia.

Troviamo la coenergia per il condensatore lineare: poiché $q = C(z)v$, l'integrale (12) vale

$$\bar{U}_{\mathrm{e}}(v,z) = \frac{1}{2}C(z)v^2 \qquad (17)$$

Per la forza, allora, si ha

$$F_{\mathrm{e}}(v,z) = \frac{\partial \bar{U}_{\mathrm{e}}(v,z)}{\partial z} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}C(z)}{\mathrm{d}z}v^2 \approx \frac{\epsilon_0\epsilon_{\mathrm{r}}A}{2(a-z)^2}v^2 \qquad (18)$$

che, fortunatamente, coincide con la (9 bis).

3 Commenti e conclusione

Lo stato del condensatore con un'armatura mobile può essere rappresentato o con le variabili carica e posizione (q,z) oppure con le variabili tensione e posizione (v,z). Il conto della forza tra le armature in funzione delle variabili (q,z) è abbastanza diretto, mentre quello della forza in funzione di (v,z) presenta qualche difficoltà:

1) Nel paragrafo 2 si è visto che $F_\mathrm{e}(v,z)$ può essere determinata con metodo energetico in due modi. Nel primo modo, si determina

$$F_\mathrm{e}(q,z) = -\frac{\partial U_\mathrm{e}(q,z)}{\partial z}$$

con

$$U_\mathrm{e}(q,z) = \int_0^q v(q',z)\mathrm{d}q'$$

e poi si sostituisce la relazione costitutiva $q = q(v,z)$, $F_\mathrm{e}(v,z) = F_\mathrm{e}(q(v,z),z)$.

Nel secondo modo si determina prima la coenergia

$$\bar{U}_\mathrm{e}(v,z) = \int_0^v q(v',z)\mathrm{d}v'$$

per ottenere poi

$$F_\mathrm{e}(v,z) = \frac{\partial \bar{U}_\mathrm{e}(v,z)}{\partial z}$$

Volendo ottenere $F_\mathrm{e}(v,z)$, il secondo modo è più diretto, ma non solo: se il condensatore non è lineare e la relazione costitutiva $q = q(v,z)$ non è invertibile in modo esplicito, $\bar{U}_\mathrm{e}(v,z)$ può comunque essere determinata a partire dall'integrale sopra (è un caso raro in elettrostatica, ma più comune in magnetostatica).

2) Invece di seguire uno dei due procedimenti indicati al punto 1), si potrebbe essere tentati di sostituire $q=q(v,z)$ nell'espressione dell'energia $U_\mathrm{e}(q,z)$, $\tilde{U}_\mathrm{e}(v,z)=U_\mathrm{e}(q(v,z),z)$, e poi dire

$$\tilde{F}_\mathrm{e}(v,z)=-\frac{\partial\tilde{U}_\mathrm{e}(v,z)}{\partial z} \qquad (19)$$

Sarà corretto questo modo di procedere? Vediamo cosa capita con un condensatore piano e lineare: poiché dalla (7),

$$U_\mathrm{e}(q,z)=\frac{q^2}{2C(z)} \qquad (20)$$

e $q=C(z)v$, si ha

$$\tilde{U}_\mathrm{e}(v,z)=\frac{1}{2}C(z)v^2 \qquad (21)$$

Uh-oh, ma è uguale alla coenergia! Se si sostituisce la (21) nella (19) si ottiene la (18), *ma* con il segno opposto (se il condensatore fosse stato non lineare anche il modulo della forza sarebbe risultato sbagliato!). Cosa c'è di sbagliato nel calcolare la forza secondo la (19)?

La grandezza $\tilde{U}_\mathrm{e}(v,z)$ è l'energia elettrostatica immagazzinata nel condensatore quando la tensione ai suoi capi vale v (e coincide con la coenergia solo per un condensatore lineare): in queste condizioni, se spostiamo l'armatura mobile di $\mathrm{d}z$, il principio di conservazione dell'energia (2) diventa

$$\frac{\partial\tilde{U}_\mathrm{e}(v,z)}{\partial z}\mathrm{d}z=v\frac{\partial q(v,z)}{\partial z}\mathrm{d}z-F_\mathrm{e}(v,z)\mathrm{d}z \qquad (22)$$

Il primo addendo a secondo membro è il lavoro fatto dal circuito di alimentazione per mantenere la tensione uguale a v: variando la distanza tra le armature, bisogna trasferire carica sul condensatore per mantenere la tensione costante. Scrivendo

$$\tilde{F}_e(v,z) = -\frac{\partial \tilde{U}_e(v,z)}{\partial z}$$

si commette l'errore di trascurare il lavoro fatto dal circuito di alimentazione. Dalla (22), invece, si ha

$$\begin{aligned} F_e(v,z) &= v\frac{\partial q(v,z)}{\partial z} - \frac{\partial \tilde{U}_e(v,z)}{\partial z} \\ &= \frac{\partial [q(v,z)v]}{\partial z} - \frac{\partial \tilde{U}_e(v,z)}{\partial z} \\ &= \frac{\partial [q(v,z)v - \tilde{U}_e(v,z)]}{\partial z} \\ &= \frac{\partial \bar{U}_e(v,z)}{\partial z} \qquad (23) \end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio si è fatto uso della definizione (13) della coenergia e si è ritrovata l'equazione (16).

Morale: nel determinare la forza tra le armature del condensatore in funzione delle variabili di stato (v,z) non bisogna dimenticarsi del lavoro fatto dal generatore: determinando la forza a partire dalla coenergia, tale lavoro è tenuto in conto automaticamente.

Bibliografia

Per approfondimenti, si vedano [1, cap. 11] e [2, cap. 3].

[1] Haus, Hermann A., and James R. Melcher, Electromagnetic fields and energy. (Massachusetts Institute of Technology: MIT OpenCourseWare). http://ocw.mit.edu (accessed 07 03, 2012). License: Creative Commons Attribution-NonCommercial-Share Alike.

[2] Woodson, Herbert H., and James R. Melcher. Electromechanical dynamics. 3 vols. (Massachusetts Institute of Technology: MIT OpenCourseWare). http://ocw.mit.edu

Estratto da "http://www.electroyou.it/mediawiki/index.php?title=UsersPages:Dirtydeeds:forze-elettrostatiche-in-condensatori-e-attuatori-capacitivi"