Dirty Deeds (DirtyDeeds)

GRANDEZZE E UNITÀ DI MISURA - I

28 September 2010

Abstract

In questo articolo diviso in due parti proveremo a dare qualche idea di cosa siano le **grandezze** e di come si utilizzino nella scrittura delle equazioni. In questa prima parte introdurremo il concetto di grandezza e l'idea di **calcolo** delle grandezze; nella seconda parte vedremo di illustrare con alcuni esempi l'utilità di questo tipo di calcolo.

1. Introduzione

Quando scriviamo equazioni come $V = RI$ o $F = ma$ i simboli che vi compaiono non denotano semplici numeri, ma *valori* di *grandezze*. Come lo conosciamo oggi, il concetto di *grandezza* (*quantity*) è stato introdotto nel 1873 da **James Clerk Maxwell** nel suo *A treatise on electricity and magnetism* [1]. Ecco le parole di Maxwell:

> *Every expression of a Quantity consists of two factors or components. One of these is the name of a certain known quantity of the same kind as the quantity to be expressed, which is taken as a standard of reference. The other component is the number of times the standard is to be taken in order to make up the required quantity. The standard quantity is technically called the Unit, and the number is called the Numerical Value of the quantity.*

Il risultato di una misurazione è un rapporto tra due grandezze omogenee: una da determinare, e una di riferimento a cui viene assegnato un *valore* convenzionale che definisce l'unità di misura per quel tipo di grandezze. Il valore di una generica grandezza X può allora essere espresso come il prodotto di un *valore numerico*, indicato con $\{X\}$, e di una *unità di misura*, indicata con $[X]$ (come osservato da Maxwell, l'unità di misura è essa stessa una grandezza - una particolare grandezza):

$$X = \{X\}[X]$$

ovvero

$$\{X\} = X/[X]$$

Per esempio, per una certa lunghezza l potremmo scrivere:

$l = 5\,\mathrm{m}$ (il valore di l è 5 metri)

$[l] = \mathrm{m}$ (l'unità di misura di l è il metro)

$\{l\} = l/\mathrm{m} = 5$ (il valore numerico di l è 5)

E' importante sottolineare che una grandezza è una proprietà misurabile di un sistema fisico (v. anche la definizione data in [2]), di valore indipendente dall'unità di misura scelta per rappresentarla. Per esempio, se $[X]'$ e $[X]''$ sono due unità di misura per X si deve avere

$X = \{X\}'[X]' = \{X\}''[X]''$ (il valore di X è sempre lo stesso)

ossia

$$\frac{\{X\}'}{\{X\}''} = \frac{[X]''}{[X]'}$$

Valori numerici e unità di misura obbediscono dunque a una "regola di proporzionalità inversa": regoletta che ci insegnano alle elementari e che prontamente dimentichiamo.

2. Il calcolo delle grandezze

Citando liberamente Mills [3], possiamo dire che il calcolo delle grandezze è la pratica di usare nomi e simboli di grandezze per rappresentare il loro valore, riconoscendo che quando un simbolo di grandezza è rimpiazzato dal prodotto di un valore numerico e di un'unità, entrambi possono essere manipolati con le note regole dell'algebra. Proviamo, allora, a risolvere il semplice esercizio seguente in modo consistente con quanto detto qui e con la notazione introdotta nel paragrafo precedente.

Esercizio: Un partitore resistivo di tensione è costituito dalla serie delle resistenze $R_1 = 270\,\Omega$ e $R_2 = 330\,\Omega$ ed è alimentato dalla tensione $V_0 = 5\,\mathrm{V}$. Determinare la potenza dissipata da R_1.

La corrente I che attraversa la serie delle due resistenze è

$$\begin{aligned} I &= \frac{V_0}{R_1 + R_2} \\ &= \frac{5\,\mathrm{V}}{270\,\Omega + 330\,\Omega} \\ &= \frac{5\,\mathrm{V}}{600\,\Omega} \approx 0{,}00833\,\mathrm{A} = 8{,}33\,\mathrm{mA} \end{aligned}$$

Nota I possiamo infine determinare la potenza P_1 dissipata da R_1:

$$\begin{aligned} P_1 &= R_1 I^2 \\ &\approx 270\,\Omega \times \left(8{,}33 \times 10^{-3}\right)^2\ \mathrm{A}^2 \\ &\approx 0{,}0187\,\mathrm{W} = 18{,}7\,\mathrm{mW} \end{aligned}$$

Osservazioni:

1. Ai simboli sono stati sostituiti i *valori* delle grandezze (valore numerico *e* unità di misura), non soltanto i valori numerici. Tali valori sono stati riportati in tutti i passaggi intermedi.
2. Le operazioni tra valori di grandezze sono state trattate come operazioni tra monomi: per esempio, la somma dei valori delle due resistenze è $270\,\Omega + 330\,\Omega = (270 + 330)\,\Omega = 600\,\Omega$; il quadrato del valore della corrente è $\left(8{,}33 \times 10^{-3}\,\mathrm{A}\right)^2 = \left(8{,}33 \times 10^{-3}\right)^2\ \mathrm{A}^2 \approx 6{,}94 \times 10^{-5}\,\mathrm{A}^2$.
3. Alcune combinazioni di unità sono state sostituite con simboli rappresentanti nomi speciali: per esempio, $\mathrm{V}/\mathrm{A} = \Omega$ (il rapporto tra il volt e l'ampere è chiamato ohm).
4. Nella conversione tra unità e multipli o sottomultipli, si è tenuto conto del fatto che la grandezza deve rimanere la stessa: per esempio, $\mathrm{A} = 10^3\mathrm{mA}$ e quindi $0{,}00833\,\mathrm{A} = 0{,}00833 \times 10^3\,\mathrm{mA} = 8{,}33\,\mathrm{mA}$.

A questo punto, qualcuno potrebbe pensare che il calcolo delle grandezze rappresenti un inutile appesantimento della notazione, e che il dover riportare le unità di misura in ogni passaggio di un calcolo rappresenti una perdita di tempo priva di effettiva utilità (l'avete pensato, eh?). Nella prossima parte, per mezzo di esempi, cercheremo allora di illustrare quali siano i vantaggi (e ce ne sono diversi) portati da un utilizzo consistente del calcolo delle grandezze. Prima però:

Warning! Un'unità di misura non va *mai* scritta tra parentesi quadre, sono le grandezze (generiche) a poter essere scritte tra parentesi quadre per indicarne l'unità di misura: $[F] = N$ significa che l'unità di misura della forza F è il newton. Non è quindi corretto scrivere $F = 5\,[\mathrm{N}]$ o $F = ma\,[\mathrm{N}]$ (altre informazioni sulla scrittura delle unità possono essere trovate in questo articolo di admin).

3. Grandezze di base, grandezze derivate e dimensioni

Come abbiamo visto nell'introduzione, le leggi della fisica sono rappresentate matematicamente come relazioni tra grandezze. Un'espressione del tipo

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

lega tra loro le grandezze velocità v, lunghezza s e tempo t, che non possono, quindi, essere definite in modo indipendente. Le leggi della fisica non sono però univoche: se volessimo definire la velocità in modo indipendente dallo spazio e dal tempo, potremmo modificare la precedente equazione come

$$v = K\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

dove la costante K sarebbe da determinarsi sperimentalmente una volta definite in modo indipendente le grandezze spazio, tempo e velocità. Morale: per costruire un sistema di grandezze (che sia l'SI, il CGS, l'MKSA ecc.), è necessario i) scegliere un insieme (ristretto) di *grandezze di base*, da considerarsi indipendenti, e ii) specificare le equazioni che definiscono le altre grandezze in funzione delle grandezze di base. Le grandezze dipendenti sono dette *grandezze derivate*.

Quante devono essere le grandezze di base? Beh, il numero delle grandezze di base è largamente arbitrario: qualcuno, addirittura, ha concepito sistemi con una sola grandezza di base (p.es. il tempo)[4,5]. Come vedremo tra poco, però, avere una sola grandezza di base non è conveniente. D'altra parte, è meglio non esagerare nell'altro senso, altrimenti ci ritroveremmo con equazioni piene zeppe di costanti dai valori strampalati. Nel *Système International d'Unités* (SI), il sistema di grandezze attualmente in uso per accordo internazionale, il numero delle grandezze di base è 7 (e ai numerologi farà piacere che sia un numero primo!): lunghezza, massa, tempo, corrente, temperatura, quantità di sostanza e intensità luminosa.

Consideriamo ora una grandezza derivata come l'energia cinetica:

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2$$

Nell'ultimo passaggio, al membro di destra, compaiono solo grandezze di base: in particolare, tolto il coefficiente 1/2, vediamo che l'energia cinetica è il prodotto di massa, lunghezza al quadrato e tempo alla meno due. Questo è valido in generale: tolti i coefficienti numerici (che vengono chiamati *costanti definitorie*), ogni grandezza derivata è un prodotto di potenze delle grandezze di base. Il modo in cui una grandezza derivata è costruita a partire dalle grandezze di base è detto *dimensione* della grandezza. Le dimensioni delle grandezze di base vengono indicate con simboli in carattere bastone ($\mathsf{L}, \mathsf{M}, \mathsf{T}, \mathsf{I}, \Theta, \mathsf{N}, \mathsf{J}$) e per una generica grandezza X la dimensione è

$$\dim X = \mathsf{L}^\alpha \mathsf{M}^\beta \mathsf{T}^\gamma \mathsf{I}^\delta \Theta^\epsilon \mathsf{N}^\zeta \mathsf{J}^\eta$$

dove $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta, \eta$ sono esponenti reali opportuni. Quando tutti gli esponenti sono nulli, la grandezza è detta *adimensionata* o di *dimensione uno*. Nel caso dell'energia cinetica, si ha $\dim T = \mathsf{L}^2\mathsf{M}\mathsf{T}^{-2}$. Una proprietà importante è questa: in un'equazione tra grandezze, le dimensioni del membro di destra devono essere uguali alle dimensioni del membro di sinistra. Questa proprietà ci fornisce un potente mezzo per controllare in modo veloce la correttezza di un'equazione: se i due membri di un'equazione hanno dimensioni diverse, l'equazione è *sicuramente* sbagliata. Questa proprietà ci fa anche capire perché è importante avere più di una grandezza di base: se, per esempio, tutto fosse tempo, la potenza diagnostica dell'analisi dimensionale ne risulterebbe notevolmente indebolita.

Una volta definito il sistema delle grandezze, bisogna definire le unità di misura, cominciando dalle unità di base. Nel caso dell'SI, le unità di base sono il metro (simbolo m), il chilogrammo (simbolo kg: è l'unica unità contenente un prefisso), il secondo (simbolo s), l'ampere (simbolo A), il kelvin (simbolo K, senza segno di grado), la mole (simbolo mol) e la candela (simbolo cd).

Definite le unità di base, l'assegnazione delle unità derivate non è, però, scontata. Prendiamo per esempio il caso della forza, $F = ma$, e supponiamo di aver già definito le unità di massa (p.es. chilogrammo) e di accelerazione (p.es. metro al secondo quadrato): sapendo che $F = \{F\}[F]$, che $m = \{m\}[m]$ e che $a = \{a\}[a]$, possiamo scrivere

$$\{F\}[F] = \{m\}[m]\{a\}[a] = \{m\}\{a\}[m][a]$$

Una scelta possibile è quella di imporre $[F] = [m][a]$: così facendo, nell'equazione sopra, possiamo semplificare le unità per ottenere

$$\{F\} = \{m\}\{a\}$$

Scegliendo l'unità di forza uguale al prodotto delle unità di massa e di accelerazione, l'equazione tra i valori numerici di forza, massa e accelerazione è formalmente identica a quella tra le grandezze: volendo, per esempio, determinare la forza applicata a una massa di $2\,\mathrm{kg}$ che è soggetta a un'accelerazione di $9,8\,\mathrm{m/s^2}$ è sufficiente fare il prodotto $2 \times 9,8$ tra i valori numerici di massa e accelerazione per ottenere il valore numerico della forza (è l'operazione che facciamo normalmente quando svolgiamo dei calcoli, senza riflettere, però, che questa operazione ci è permessa da una particolare scelta delle unità derivate). D'altra parte, avremmo anche potuto fare le scelte (scellerate) $[F] = \sqrt{2}[m][a]$ o $[F] = \pi[m][a]$, ottenendo

$$\{F\} = \frac{1}{\sqrt{2}}\{m\}\{a\} \quad \text{o} \quad \{F\} = \frac{1}{\pi}\{m\}\{a\}$$

e complicandoci la vita. Un sistema di unità in cui ogni unità derivata è uguale a un prodotto di potenze delle unità di base con coefficiente unitario è detto *sistema coerente*. L'SI è, fortunatamente, un sistema coerente; in passato, però, sono sia stati usati sistemi incoerenti come il foot-pound-second (piede-libbra-secondo), sia state tollerate unità non coerenti (p.es. la caloria come unità di energia) all'interno di sistemi coerenti.

Bibliografia

Gli articoli [5,6,7] e il libro di McGlashan [8] approfondiscono i concetti qui esposti sulle grandezze e sui sistemi di unità. Il libro di Petley [4], purtroppo non facilmente reperibile, è una magnifica esposizione della fisica che c'è dietro la metrologia.

1. J C Maxwell, "A treatise on electricity and magnetism", vol. I, Oxford: Clarendon Press, 1873. [Online]
2. *International Vocabulary of Metrology - Basic and general concepts and associated terms VIM*, 3rd edition, JCGM 200:2008. [Online]
3. I M Mills, "The language of science", *Metrologia* **34**, pp. 101-109, 1997.

4. B W Petley, *The fundamental physical constants and the frontier of measurement*, Adam Hilger, Bristol, 1988.
5. I M Mills, "Physical quantities and units" in *Recent advances in metrology and fundamental constants, Proceedings of the International School of Physics E. Fermi*, Varenna, 2000. [Google books]
6. J de Boer, "On the history of quantity calculus and the International System", *Metrologia* **31**, pp. 405-429, 1995.
7. M J ten Hoor, "Quantity calculus for chemists", *Chemistry in action* n. 57, 1999. [Online]
8. M L McGlashan, "Physicochemical quantities and units: The grammar and spelling of physical chemistry", Royal Institute of Chemistry, London, 1971.