Dirty Deeds (DirtyDeeds)

GRANDEZZE E UNITÀ DI MISURA - II

27 September 2010

Questo è il seguito dell'articolo Grandezze e unità di misura - I [1]. E' un seguito rimasto per lungo tempo nel cassetto -- circa 5 anni! -- perché volevo aggiungere qualche esempio nell'ultimo paragrafo. Non l'ho fatto per ragioni di tempo, ma direi che tutto sommato è pubblicabile così com'è.

Il sottotitolo di questa seconda parte potrebbe essere: *Sì, va be', ma perché usare grandezze e unità di misura nelle equazioni?*

1. Per eseguire correttamente la conversione tra unità di misura

La diffusione del *Sistema internazionale delle unità di misura* (SI) ha sicuramente ridotto in modo drastico il numero delle unità di misura in circolazione, semplificando così le necessità di conversione. Purtroppo, però, per ragioni di economicità, tradizione, pigrizia ecc., in alcuni settori della scienza e della vita quotidiana persiste ancora l'uso di unità non facenti parte dell'SI. Poiché pasticciare con le unità di misura può portare a problemi come quello del *Mars Climate Orbiter* [2], è allora importante saper eseguire le conversioni in modo corretto, e il calcolo delle grandezze può essere un valido aiuto per questo compito. Con il calcolo delle grandezze la conversione tra unità di misura può essere fatta per *sostituzione*, ricordandosi che un'unità di misura non è nient'altro che una particolare grandezza.

Cominciamo con un esempio semplice: a scuola ci hanno insegnato che per passare da chilometri all'ora a metri al secondo bisogna — uhm — moltiplicare per 3,6. Oppure era dividere per 3,6? ma chi se lo ricorda, accidenti! — sono passati così tanti anni! Proviamo a fare questa semplice conversione utilizzando il calcolo delle grandezze per una velocità di $1\ \mathrm{km/h}$. L'unità di velocità è un'unità derivata, rapporto tra l'unità di spazio e l'unità di tempo: cominciamo, quindi, a convertire le unità base che la compongono. Sappiamo che $1\ \mathrm{km} = 1000\ \mathrm{m}$ (il segno di uguaglianza ci ricorda che la lunghezza è sempre la stessa, cambia solo l'unità scelta per rappresentarla) e che $1\ \mathrm{h} = 3600\,\mathrm{s}$ (di nuovo, il segno di uguaglianza ci ricorda che l'intervallo di tempo è sempre lo stesso, cambia solo l'unità scelta per rappresentarlo). Sostituendo, si ha

$$1\ \mathrm{km/h} = \frac{1\ \mathrm{km}}{1\ \mathrm{h}} = \frac{1000\,\mathrm{m}}{3600\,\mathrm{s}} = \frac{1}{3{,}6}\ \mathrm{m/s}$$

Era *dividere*, vero? L'espressione precedente può anche essere scritta come

$$\frac{\mathrm{km/h}}{\mathrm{m/s}} = \frac{1}{3,6}$$

Ovvero: l'unità chilometro all'ora è 3,6 volte *più piccola* dell'unità metro al secondo.

Per convertire una velocità qualunque, facendo uso del risultato appena trovato, si può sempre procedere per sostituzione. Consideriamo, ad esempio, una velocità di $111\,\mathrm{km/h}$ — la massima velocità raggiunta dal ciclista Savoldelli in discesa:

$$111\,\mathrm{km/h} = 111 \times 1\,\mathrm{km/h}$$

da cui, sostituendo il risultato ottenuto precedentemente, si ottiene

$$111\,\mathrm{km/h} = 111 \times 1\,\mathrm{km/h} = 111 \times \frac{1}{3{,}6}\,\mathrm{m/s} \approx 30{,}8\,\mathrm{m/s}$$

Un altro modo di fare la conversione, utilizzando le notazioni introdotte nella prima parte, è il seguente: il valore numerico della velocità espressa in metri al secondo è

$$\{v\}_{\mathrm{m/s}} = \frac{v}{\mathrm{m/s}}$$

ma $v = \{v\}_{\mathrm{km/h}}\,\mathrm{km/h}$ (di nuovo, v non cambia), e sostituendo quest'ultima equazione nella precedente si ottiene

$$\begin{aligned}\{v\}_{\mathrm{m/s}} &= \frac{\{v\}_{\mathrm{km/h}}\,\mathrm{km/h}}{\mathrm{m/s}} = \{v\}_{\mathrm{km/h}}\frac{\mathrm{km/h}}{\mathrm{m/s}} \\ &= \{v\}_{\mathrm{km/h}}\frac{\mathrm{km/m}}{\mathrm{h/s}} = \{v\}_{\mathrm{km/h}}\frac{1000}{3600} \\ &= \frac{\{v\}_{\mathrm{km/h}}}{3{,}6}\end{aligned}$$

Passiamo ora a qualche conversione un po' più complicata. Un campo che ancora si porta dietro molte unità di misura, permettendoci così di fare un po' di allenamento, è quello delle misurazioni di pressione. La pressione è un rapporto tra una forza e una superficie: l'unità di misura SI della pressione è il newton al metro quadrato, unità a cui è stato dato il nome speciale di *pascal* (simbolo Pa: $\mathrm{Pa} = \mathrm{N/m^2}$). Altre unità utilizzate sono il *bar* (tollerato nell'SI; simbolo bar: $1\ \mathrm{bar} = 10^5\ \mathrm{Pa}$, *per definizione*), il *millimetro di mercurio* (tollerato nell'SI; simbolo mmHg, comunemente utilizzato in Italia per le misure di pressione sanguigna), l'*atmosfera* (simbolo atm: $1\ \mathrm{atm} = 1{,}01325 \times 10^5\ \mathrm{Pa}$, *per definizione*) e, infine, ancora - ahinoi! - utilizzata da alcuni produttori di trasduttori, la *libbra-forza per pollice quadrato* (*pound-force per square inch*, simbolo psi: $\mathrm{psi} = \mathrm{lbf/in^2}$).

Ci mancano i fattori di conversione per il mmHg e per il psi. Il millimetro di mercurio è la pressione esercitata da una colonna di mercurio alta un millimetro. Una delle leggi dell'idrostatica ci dice che la pressione p esercitata da una colonna di liquido di densità ρ e altezza h vale $p = \rho g h$. Se $\rho \approx 1{,}35951 \times 10^4\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$ (densità del mercurio a $0\,^\circ\mathrm{C}$ [2]), $g = g_\mathrm{n} = 9{,}80665\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ (valore normale dell'accelerazione di gravità) e $h = 1\ \mathrm{mm}$, si ha

$$1\,\mathrm{mmHg} \approx 1{,}35951 \times 10^4\,\mathrm{kg\,m^{-3}} \times 9{,}80665\,\mathrm{m\,s^{-2}} \times 10^{-3}\,\mathrm{m} \approx 133{,}322\,\mathrm{Pa}$$

che coincide con il valore dato in [3, app. B.9].

Veniamo ora al psi: anche qui, procediamo per sostituzione:

$$1\,\mathrm{psi} = \frac{1\,\mathrm{lbf}}{1\,\mathrm{in}^2} = \frac{1\,\mathrm{lbf}}{(1\,\mathrm{in})^2} \qquad (1)$$

La libbra forza corrisponde alla forza peso esercitata da una massa di una libbra in condizioni di gravità normale; quindi:

$$1\,\mathrm{lbf} = 1\,\mathrm{lb} \times g_\mathrm{n}$$

e poiché $1\ \mathrm{lb} = 0{,}45359237\,\mathrm{kg}$ (esattamente) per definizione, sostituendo si ha

$$1\,\mathrm{lbf} = 0{,}45359237\,\mathrm{kg} \times 9{,}80665\,\mathrm{m\,s^{-2}} \approx 4{,}4482216\,\mathrm{N}$$

Il pollice è definito come $1\,\text{in} = 0{,}0254\,\text{m}$ (esattamente). Infine, sostituendo i risultati trovati sopra nella (1) si ha

$$1\,\text{psi} \approx \frac{4{,}4482216\,\text{N}}{(0{,}0254\,\text{m})^2} \approx 6894{,}757\,\frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 6894{,}757\,\text{Pa}$$

che, di nuovo, coincide con il valore dato in [3, app. B.9].

Un discorso a parte lo meritano le unità di misura della temperatura: contrariamente a quanto si può pensare, infatti, il passaggio da gradi Celsius (simbolo °C) a kelvin (simbolo K, senza segno di grado) non è veramente un'operazione di conversione tra unità di misura. Il motivo è che gradi Celsius e kelvin non sono due unità diverse per una *stessa* temperatura, ma sono due unità per due grandezze fisiche, due temperature, *diverse*: la *temperatura Celsius* e la *temperatura termodinamica*. La temperatura Celsius t è definita a partire dalla temperatura termodinamica T dalla funzione[1]

$$t = a(T - T_0)$$

dove $a = 1\,^\circ\text{C}/\text{K}$ e $T_0 = 273{,}15\,\text{K}$. L'equazione scritta sopra permette di derivare due utili relazioni. La prima è la relazione che ben conosciamo tra i valori numerici delle tue temperature [4, par. 2.1.1.5]

$$t/^\circ\text{C} = T/\text{K} - 273{,}15$$

La seconda è la relazione che lega i valori numerici degli intervalli di temperatura:

$$\Delta t/^\circ\text{C} = \Delta T/\text{K}$$

Questa seconda equazione ci dice che il valore numerico di un intervallo di temperatura (e, quindi, il valore numerico di una derivata fatta rispetto a una temperatura) è lo stesso, sia per la temperatura Celsius che per quella termodinamica. Per esempio possiamo dire che il coefficiente di temperatura di una resistenza vale $10^{-4}/^\circ\text{C}$ oppure, in modo equivalente, $10^{-4}/\text{K}$.

Altri esempi di conversione con il metodo di sostituzione possono essere trovati in [5].

2. Per scrivere equazioni che siano indipendenti dalla scelta delle unità di misura

In un articolo del 1928 [6] Wheeler proponeva alcune equazioni per determinare l'induttanza di vari tipi di solenoidi. Per una, ad esempio, scriveva così:

> *One formula (derived in August, 1925) gives the inductance of a single-layer helical coil, in terms of the dimensions in inches [...]:*
>
> $$L = \frac{a^2 n^2}{9a + 10b}\ \text{microhenries}$$

Nell'esprimere la formula, per i motivi che vedremo tra poco, Wheeler non ha evidentemente usato il calcolo delle grandezze e volendo riproporla dovremmo sempre esplicitare le unità di misura utilizzate (un esempio qui): L è l'induttanza in microhenry, a è il raggio del solenoide in pollici, b è la lunghezza del solenoide in pollici e n è il numero di spire.

Se interpretassimo i simboli dell'equazione sopra come grandezze fisiche avremmo che a sinistra del segno di uguaglianza ci sarebbe un'induttanza; a destra, una lunghezza (al numeratore ci sarebbe infatti una lunghezza al quadrato; al denominatore, una lunghezza). Questo implica che l'equazione data da Wheeler *non* è un'equazione tra grandezze, ma un'equazione tra valori numerici. Riscriviamola, allora, in accordo con le notazioni date nel precedente articolo [1]:

$$\{L\}_{\mu\mathrm{H}} \approx \frac{\{a\}_{\mathrm{in}}^2 n^2}{9\{a\}_{\mathrm{in}} + 10\{b\}_{\mathrm{in}}}$$

Ricordandoci che $\{L\}_{\mu\mathrm{H}} = L/\mu\mathrm{H}$, $\{a\}_{\mathrm{in}} = a/\mathrm{in}$ e $\{b\}_{\mathrm{in}} = b/\mathrm{in}$ (qui interpretiamo L, a e b proprio come grandezze fisiche), otteniamo

$$L/\mu\mathrm{H} \approx \frac{(a/\mathrm{in})^2 n^2}{9a/\mathrm{in} + 10b/\mathrm{in}}$$

ovvero

$$L = 1\,\mu\mathrm{H/in} \times \frac{a^2n^2}{9a+10b}$$

Ecco adesso, L, a e b rappresentano delle grandezze fisiche: il coefficiente di valore pari a $1\ \mu\mathrm{H/in}$ può essere sostituito da un coefficiente simbolico[2]

$$k = 1\,\mu\mathrm{H/in} = \frac{1\,\mu\mathrm{H}}{1\,\mathrm{in}} = \frac{1\,\mu\mathrm{H}}{0{,}0254\,\mathrm{m}} \approx 39{,}4\,\mu\mathrm{H/m}$$

e la formula riscritta come

$$L = k\frac{a^2n^2}{9a+10b}$$

Con questa operazione abbiamo trovato un'equazione valida per *qualunque* sistema di unità di misura utilizzato: nello scriverla non c'è più bisogno di dire che, per esempio, a è un raggio in pollici (o in metri, o in furlong ecc.): a è il raggio del solenoide, senza ulteriori specificazioni. Ed è importante osservare, poi, che nel trasformare l'equazione di Wheeler in un'equazione tra grandezze, il coefficiente di proporzionalità della frazione è stato automaticamente messo in una forma adatta alla conversione delle unità, secondo le regole di sostituzione descritte nel paragrafo 1.

3. Per evitare gli errori

Quando facciamo l'analisi di un qualunque sistema fisico (uso questo termine nel senso più generale possibile: il sistema fisico da analizzare potrebbe essere un circuito elettronico, una pietra che cade, il sistema solare ecc.), in genere separiamo l'analisi in almeno due fasi distinte: nella prima, descriviamo il sistema per mezzo di equazioni simboliche (derivate da noi o apprese da libri, internet ecc.), in cui i simboli rappresentano grandezze fisiche di valore non specificato (p.es. $V = RI$); nella seconda, sostituiamo ai simboli i valori di particolari grandezze fisiche, quelli propri dei parametri del sistema in esame (p.es. $R = 10\,\Omega$ e $I = 3\,\mathrm{A}$), per ottenere nuove informazioni sul sistema (p.es. il valore della tensione V). Di errori, ne possiamo commettere in tutte e due le fasi: è importante, allora, avere a disposizione dei mezzi di verifica economici che, senza obbligarci a rifare tutto il conto, ci segnalino almeno gli errori più grossolani. Durante la prima fase, possiamo utilizzare l'analisi dimensionale; durante la seconda, il calcolo delle grandezze.

4. Conclusioni

Lo scopo di questi due articoli era quello di presentare l'idea di grandezza fisica, il calcolo delle grandezze e di dare qualche idea sull'utilità di usare questi concetti in modo consistente. Non so se lo scopo sia stato raggiunto; in ogni caso, ricordiamoci che la risposta alla domanda fondamentale sulla vita, l'universo e tutto quanto è 42... in opportune unità di misura ;-)

Note

1. La definizione che ho dato qui differisce da quella ufficiale data in [4, par. 2.1.1.5] per la presenza del coefficiente a: ho ritenuto utile inserirlo, benché unitario, perché mi sembra che renda più chiara la distinzione tra le due grandezze.
1. Più esattamente si ha $k = 10\pi\mu_0$, dove μ_0 è la permeabilità del vuoto.

Bibliografia

[1] DirtyDeeds, Grandezze e unità di misura - I

[2] Mars Climate Orbiter Mishap Investigation Board, *Phase I report*, 1999.

[2] Mars Climate Orbiter L'errore da 328 miloni di dollari
[3] K D Sommer e J Poziemski, "Density, thermal expansion and compressibility of mercury", *Metrologia* **30**, pp. 665-668, 1993/94.

[4] A Thompson e B N Taylor, *Guide for the use of the International System of Units (SI)*, NIST Special Publication 811, 2008.

[5] *SI brochure (8th ed.)*, International Bureau of Weights and Measures.

[6] M J ten Hoor, "Quantity calculus for chemists", Chemistry in action n. 57, 1999.

[7] H A Wheeler, "Simple inductance formulas for radio coils", *Proc. of IRE* **16**, pp. 1398-1400, 1928.

[8] J de Boer, "On the history of quantity calculus and the International System", *Metrologia* **31**, pp. 405-429, 1995.