



Emanuele Terrasi (EcoTan)

Appunti sulla relatività generale

7 March 2014

Indice

- [1 Dalla relatività ristretta alla relatività generale](#)
- [2 Formalismo della relatività](#)
- [3 Relatività e cosmologia](#)
- [4 Significato della relatività](#)
- [5 Il tempo nella relatività](#)
- [6 Limiti della relatività](#)
- [7 Utilità della relatività](#)

Dalla relatività ristretta alla relatività generale

Abbiamo visto che la relatività ristretta è basata sulla definizione dell'invariante (1) e sulla trasformazione di Lorentz (2) nella quale la velocità v figura come uno scalare, pertanto prende in considerazione soltanto il moto rettilineo.

Prendiamo da Einstein l'esempio di un disco rigido che ruota. La rotazione, diversamente dalla traslazione uniforme, produce degli effetti fisici. Conviene abituarci a pensare che un "corpo rigido", coi suoi prolungamenti ideali, costituisce uno "spazio".

Ogni piccola porzione del disco appare dotata di moto (quasi) rettilineo uniforme rispetto a un osservatore fisso, pertanto si applica la trasformazione di Lorentz e si ha la contrazione delle lunghezze disposte lungo la circonferenza, mentre le lunghezze disposte lungo i raggi non subiscono contrazione.

Supponiamo di disporre, sia lungo un raggio sia lungo la circonferenza, dei campioni di lunghezza "fisicamente eguali" (per esempio, catene cristalline costituite da eguale numero di atomi della stessa specie). Supponiamo ancora che l'osservatore fisso confronti il disco rotante con un disco fisso, e che voglia determinarne il rapporto circonferenza/diametro contando i campioni.

Nel proprio spazio, l'osservatore fisso conterà un diverso numero di campioni lungo il disco fisso e lungo il disco rotante (a causa della contrazione di Lorentz), pertanto arriverà alla conclusione che il rapporto circonferenza-diametro è diverso nei due casi. Ma il numero dei campioni è un fatto oggettivo che non può dipendere dall'osservatore, pertanto dobbiamo concludere che, anche a giudizio di un osservatore solidale col disco, il rapporto circonferenza/diametro è aumentato nello spazio rotante, in misura tanto

maggiore quanto maggiore è il diametro.

Un cosiffatto spazio prende il nome di spazio curvo, e non è facile pensare ad esso se non paragonandolo ad una superficie curva (in un mappamondo, il rapporto fra la lunghezza di un parallelo e la sua distanza dal polo diminuisce al crescere di questa). Dal punto di vista spazio-temporale, il passaggio a un riferimento rotante è qualcosa di paragonabile al classico passaggio da coordinate cartesiane a polari, perché lo spazio-tempo in se stesso rimane invariato, però alcune sezioni risultano curvate (non dimentichiamo che lo spazio è la sezione spaziale dello spazio-tempo).

In sostanza, gli spazi accelerati (quali sono gli spazi rotanti) sono curvi, e poiché un campo di gravità ha (in ogni regione ristretta) lo stesso effetto di una accelerazione, ma ha sempre carattere di oggettività, possiamo ammettere che la gravità è una curvatura dello spazio-tempo.

Formalismo della relatività

L'invariante (1) è una metrica avente forma quadratica omogenea, le cui variabili sono le coordinate.

Lo studio matematico delle proprietà dello spazio fu affrontato (citiamo Gauss) secoli prima che fosse possibile intuirne applicazioni reali. Tale studio mostra che la forma (1) o meglio (1') rimane omogenea nelle trasformazioni "ortogonali", le quali sono applicabili agli spazi euclidei. Negli spazi curvi, invece, la forma (1') va sostituita con la seguente forma quadratica completa:

$$ds^2 = g_{mn} dx_m dx_n \quad (3)$$

in cui gli indici m ed n variano da 1 a 4, con dx si intende il differenziale di una coordinata temporale o spaziale, ed è sottintesa la sommatoria rispetto agli indici che compaiono due volte, cioè sia m che n.

Le g_{mn} costituiscono una matrice 4 X 4, e possono essere interpretate come componenti scalari di un tensore, che chiameremo tensore fondamentale; esso ovviamente è funzione delle coordinate, cioè si riferisce ad ogni punto dello spazio-tempo.

Il tensore, come il vettore, è un formidabile anello di congiunzione fra due diversi aspetti del mondo: quello numerico, indispensabile per analizzare le relazioni e risolvere i problemi, e quello geometrico, che ha sapore di oggettività e funge da diretto supporto alle grandezze fisiche. Il tensore, di per sé, è un oggetto geometrico e potrebbe esistere anche senza alcun sistema di riferimento; le componenti sono dei numeri reali che rappresentano quell'oggetto in un determinato sistema di riferimento. Il tensore fondamentale a sua volta fornisce le proprietà metriche dello spazio-tempo, le quali non avrebbero senso in assenza del riferimento; trattasi di un argomento difficile e sfuggente che prende il nome di "geometria assoluta".

In un riferimento inerziale ed in assenza di gravità, alcune g_{mn} sono nulle e la (3) si riduce alla (1'). Il passaggio ad un riferimento accelerato modifica le g_{mn} , mentre l'introduzione di masse gravitazionali modifica il tensore fondamentale e di conseguenza pure le g_{mn} .

Nella teoria della relatività il tensore fondamentale svolge una funzione paragonabile a quella che, nella teoria della gravitazione di Newton, era svolta dal potenziale gravitazionale scalare.

La derivata di un tensore rispetto alle coordinate deve essere definita in modo alquanto complicato, coinvolgendo il tensore fondamentale, e conduce a uno strano risultato: traslando un tensore fino a riportarlo al luogo di partenza, si ottiene un tensore diverso. Anche le geodetiche spaziali diventano strane: non sono delle rette, ma delle linee chiuse, ed il volume totale dello spazio non è infinito benché non abbia alcun confine. Un ulteriore tensore, definito in modo più complicato del tensore fondamentale, ha il significato geometrico di "curvatura dello spazio-tempo" e prende il posto del campo di gravità della vecchia teoria.

Pertanto la gravità, diversamente dalle altre forze, non è descrivibile da un campo collocato "nello" spazio, ma si identifica con il campo del tensore fondamentale che descrive "lo" stesso spazio-tempo. Essa non è necessariamente una "forza", ma è una caratteristica dello spazio-tempo capace di governare direttamente il moto.

Nella nuova teoria, le leggi fisiche acquistano una forma estremamente sintetica. La legge gravitazionale lega semplicemente il tensore fondamentale alla distribuzione della materia-energia, le leggi della meccanica si riducono a un enunciato geometrico (cioè la traiettoria di una particella in assenza di "forze esterne" è una geodetica dello spazio-tempo) e le leggi dell'elettromagnetismo, responsabili delle "forze esterne", ricalcano in forma quadridimensionale la legge di Lorentz e riescono a riassumere anche quella di Coulomb. Questa altissima sintesi formale non deve creare illusioni: la risoluzione dei problemi mediante le equazioni tensoriali riesce utile e praticabile soltanto in casi particolarissimi.

Relatività e cosmologia

La teoria su accennata si presta bene per studiare l'affascinante problema cosmologico, ed infatti è stata utilizzata in tal senso dallo stesso Einstein e da altri. Gli studi cosmologici si basano su un modello dell'universo assai semplice cioè omogeneo e isotropo, trascurando le variazioni locali di densità dovute alla presenza dei corpi celesti e dei loro ammassi. Si noti che la densità media dell'universo risulta dell'ordine di una particella per metro cubo, bene al di sotto del minimo rilevabile.

Tale omogeneità può assumersi come ipotesi (in tal caso prende il nome di "principio cosmologico") o come dato sperimentale (in tal caso lo studio deve intendersi limitato allo "universo visibile").

Ricordiamo che nello spazio ordinario a tre dimensioni può immergersi una famiglia di superfici sferiche bidimensionali concentriche, collegate da una stella di raggi uscente dal centro comune.

Analogamente, nello spazio-tempo a quattro dimensioni può immergersi una famiglia di ipersuperfici sferiche tridimensionali, ciascuna delle quali è un universo spaziale. Le linee di universo che collegano radialmente tali ipersuperfici sono geodetiche dello spazio-tempo, pertanto rappresentano la caduta libera dei gravi.

Ciò rappresenta già una soluzione del problema cosmologico, e presenta due caratteristiche contrastanti col senso comune:

- l'universo spaziale (ovvero "lo spazio") non ha alcun confine e non contiene alcun centro, ma ha un volume finito
- lo spazio non è statico: esso precipita liberamente su se stesso.

La prima caratteristica è stata subito ammessa dagli studiosi, mentre la seconda ha dovuto superare il fortissimo pregiudizio che l'universo debba essere stabile. E' curioso notare che lo stesso pregiudizio ha indotto Einstein a commettere un errore, ipotizzando che una costante cosmologica potesse correggere l'inconveniente, e due secoli prima aveva indotto anche Newton a rifugiarsi in sofismi poco eleganti. Il primo a trattare semplicemente la questione è stato il russo Friedman.

Recenti dati astronomici indicano che l'universo si espande, pertanto il centro dell'universo nello spazio-tempo rappresenta una esplosione, la cui epoca può calcolarsi in appena 14 miliardi di anni fa (circa il doppio dell'età della crosta terrestre, o la somma degli anni compiuti dagli indiani oggi viventi). Percorrendo a ritroso qualsiasi linea di universo fisica, ci si deve arrestare su tale soglia singolare.

Anche la fisica delle particelle e la termodinamica possono offrire dei riscontri a tale ricostruzione della storia dell'universo, e complessivamente la confermano, ma in parte la smentiscono, specie nelle prime fasi. Ciò ha indotto i cosmologi a formulare qualche nuova ipotesi, come la materia antigravitazionale o l'espansione inflattiva. La cosmologia relativistica comprende anche lo studio dei buchi neri, strane implosioni gravitazionali, di entità contenuta ma inarrestabili, piccoli ma non puntiformi; e molto altro ancora.

Significato della relatività

Due condizioni generali stanno alla base di qualsiasi teoria fisica: la possibilità di avere oggetti eguali in posti diversi (per esempio, le righe spettrali di atomi della stessa specie), e la possibilità di misurare gli oggetti in qualsiasi posto ove si trovino. Sembra indiscutibile che oggetti eguali debbano avere misure eguali, cioè invarianti al variare del posto, eppure la relatività generale scuote quest'ultimo pilastro.

Nella concezione fisica da Cartesio in poi, le misure di spazio non si eseguono confrontando direttamente i corpi con l'unità di misura, bensì con la mediazione di un sistema di coordinate comune per tutti i corpi. Questo metodo consente di valutare sia l'estensione che la posizione dei corpi, consente di esprimere in forma matematica le leggi dinamiche, ma nasconde un certo grado di arbitrarietà nella definizione delle proprietà del riferimento.

L'espressione (3) dell'invariante mostra come esso sia una combinazione delle coordinate x , che abitualmente rappresentano delle misure, con i coefficienti g , che rappresentano delle caratteristiche dello spazio-tempo.

Può variare perfino la velocità della luce V , intesa come derivata della componente spaziale rispetto alla componente temporale, mentre il suo invariante s rimane nullo.

Un campione fisico invariante non può essere assunto come unità di misura delle coordinate, perchè non sono invarianti le sue misure, bensì l'opportuna combinazione di

esse con la metrica localmente valida. Einstein racconta che la scoperta della relatività generale tardò alcuni anni (attorno al 1913) perché "non ci si libera così facilmente dalla convinzione che alle coordinate debba spettare un immediato significato metrico". Einstein ha avuto occasione di scrivere che le coordinate sono parametri privi di significato fisico, ma tale affermazione è eccessiva. La fisica classica continua ad essere valida nei casi "normali" in cui le curvature non siano troppo forti, ed anche nei casi contrari può essere corretta mediante "contrazioni" e "dilatazioni" relativistiche. Il quadro fenomenologico in cui osserviamo gli eventi, e quelle particolari coincidenze fra eventi e strumenti che chiamiamo "misure", ha sede nello spazio e nel tempo e deve avvalersi di un sistema empirico di coordinate, nel quale le leggi della fisica classica conservano la loro validità, semplicità e "bellezza", mentre l'invariante spazio-temporale è una costruzione matematica che, ritengo, nessuno ha mai visto né toccato al di fuori dei libri. Esso è un po' come i fili del burattinaio, che in fondo governano il movimento, però se vogliamo goderci la scena facciamo meglio a non pensarci. Le leggi classiche, più o meno aggiustate per tenere conto della relatività, e la pura formulazione delle leggi relativistiche, sono due modelli della realtà che si integrano a vicenda e risultano utili per risolvere differenti problemi, prevalentemente pratici nel primo caso e più speculativi nel secondo. Il fatto che dei modelli profondamente diversi convergano nel rendere conto di una stessa realtà fisica non deve sorprendere, anzi è uno dei tratti caratteristici della fisica teorica.

La relatività non agevola la rappresentazione del mondo fisico: la rappresentazione numerica tramite coordinate perde il proprio carattere assoluto, e la rappresentazione geometrica tramite superfici e vettori perde il proprio carattere visivo a causa della presenza di una quarta dimensione.

Il tempo nella relatività

Introducendo lo spazio-tempo, già nella relatività ristretta, abbiamo visto che ogni riferimento ha bisogno, per misurare il tempo, di un numero infinito di orologi sincroni, dislocati in ogni punto dello spazio ed aventi tutte le stesse proprietà. La relatività ristretta è nata principalmente per rendere conto dei movimenti veloci fra oggetti vicini, e spesso utilizza per i propri ragionamenti coppie di riferimenti dotati di moto relativo, mentre la relatività generale ha a che fare con le grandi distanze e con gli effetti della gravità, ed utilizza un riferimento caratterizzato da una metrica non uniforme. Pure in un riferimento tanto libero, viene asserita l'esistenza di fasci di luce monocromatica, che si propagano mantenendo la propria frequenza. La durata della emissione di un tale fascio avrebbe valore eguale per qualsiasi osservatore, essendo costituita dallo stesso numero di oscillazioni aventi lo stesso periodo. Uso il condizionale perché l'universo si espande e quindi la frequenza varia alle grandi distanze, per effetto Doppler, ma ciò può essere a sua volta calcolato e compensato. Il periodo di un fascio di luce è semplicemente costante, ma il periodo di un orologio è invariante, che è una cosa più complicata, anche da verificare. Possiamo considerare due orologi eguali, poi spostarne uno su una stella lontana e infine riportarlo indietro per confrontare le letture? Nella relatività generale, a differenza della ristretta, teoricamente potremmo.

Per fare un esempio, supponiamo che in un'astronave, liberamente galleggiante nell'universo, vi sia uno di quei trasmettitori radio a frequenza estremamente stabile, che vengono utilizzati come campioni di tempo. Supponiamo che nell'astronave ci sia anche uomo che fa un elettrocardiogramma e lo trasmette alla Terra.

I quanti delle radioonde, che sono dotati di massa dinamica, cadendo sulla Terra ricevono energia e pertanto aumentano la loro frequenza (legge di Planck). Se vi è sulla Terra un trasmettitore campione di uguali proprietà, e magari anche un gemello che fa l'elettrocardiogramma, noteremo una differenza di frequenza (battimento) fra i due segnali campione, ed anche l'elettrocardiogramma distante risulterà accelerato rispetto a quello fatto sulla Terra. Ma questa formulazione comporta una variazione di frequenza lungo il percorso di un medesimo fascio, che nel riferimento relativistico non è necessaria. Nel linguaggio della relatività il discorso suona invece così: il periodo di tutti gli orologi aventi le stesse proprietà, inteso come segmento spazio-temporale avente le componenti spaziali nulle, è invariante, pertanto la sua misura varia da un posto all'altro al variare del coefficiente, che la metrica assegna alla componente temporale. Il periodo dell'orologio posto sulla Terra, così come la durata di qualsiasi altro fenomeno, è rallentato, cioè è misurato da un numero più grande, perchè sulla Terra la metrica è diversa per effetto della gravitazione, secondo la legge gravitazionale.

Cercando di riassumere: il fascio non cambia di frequenza lungo il percorso, ma gli orologi posti alle due estremità del percorso hanno "velocità diversa". In pratica, due orologi di identica costruzione, e che siano basati su un principio di funzionamento autonomo, dovrebbero avere i quadranti graduati diversamente: in uno un giro delle lancette varrebbe dodici ore, nell'altro tredici ore se è abbastanza rallentato.... Così sono rispettate tutte le coincidenze oggettive fra i diversi fenomeni, inclusi i giri delle lancette, e teoricamente il tempo locale.

Quando dico che "il fascio non cambia di frequenza", mi riferisco ovviamente al valore numerico della frequenza misurata con un orologio.

Quest'esempio mostra come la relatività si armonizza con le altre leggi fisiche, a prezzo di una certa delicatezza concettuale e di apparenti contraddizioni.

Vogliamo fare un paragone? Supponiamo che la vita a Londra costi il doppio che a Edimburgo. Nella soluzione classica, sul treno Edimburgo-Londra vi è un controllore che toglie metà denaro ai viaggiatori, mentre nella soluzione relativistica i negozianti a Londra segnano sui cartellini dei tempi... pardon, dei prezzi raddoppiati (in questo paragone, il tempo è denaro, ed Einstein è sostenitore della moneta unica).

Quando i cosmologi espongono la cronologia delle prime, brevissime fasi dell'evoluzione dell'universo, se la scala dei tempi adottata potesse essere quella, relativistica, di un orologio appartenente allo stesso universo nascente, dovrebbero risultare tempi maggiori, se è vero che gli orologi erano "rallentati".

L'entità del rallentamento degli orologi si determina integrando le equazioni tensoriali che costituiscono la legge gravitazionale, ma sotto determinate ipotesi il risultato diventa molto semplice:

$$ds = (1 - U/C^2) dt$$

dove U è il potenziale gravitazionale, pari alla costante di Newton moltiplicata per la massa dell'astro e divisa per il suo raggio.

Fenomeni eguali hanno eguale ampiezza s , e diversa durata t . Per esempio, trasmettitori eguali o atomi eguali emettono fasci con periodo t diverso se si trovano sulla superficie di astri diversi (effetto Einstein). Precisamente, più il potenziale dell'astro è grande, più il periodo è grande, cioè spostato verso il rosso.

Considerata la stranezza dell'argomento, dilunghiamoci ancora con un esempio.

Supponiamo di usare dappertutto, come orologi, degli atomi di cesio. Se il periodo di oscillazione del cesio, sulla Terra, vale 1, ci sarà un enorme astro sul quale, per l'effetto Einstein, lo stesso periodo vale 10. Può sembrare un fatto nominalistico e invece è un fatto fisico, perché la radiazione di quell'atomo, vista dalla Terra, ha ancora periodo 10. La teoria della relatività trae le conseguenze dal fatto di usare la luce come mezzo di osservazione, e vorrei aggiungere che non ne abbiamo di molto diversi.

Limiti della relatività

Su quest'argomento, che interessa la filosofia della scienza, faremo soltanto qualche osservazione.

Il principio di relatività afferma che le leggi fisiche debbono obbedire al principio stesso, e la teoria della relatività adopera tale principio per trovare le leggi dinamiche. Pertanto il successo della relatività è tautologicamente garantito, come una sorta di petizione di principio in cui si afferma che i sassi sono neri, e di conseguenza si costruisce un muro di sassi (neri), e infine si esclama: ecco la dimostrazione che i sassi sono veramente neri!

La formula (3), che definisce l'invariante s , può anche interpretarsi come condizione imposta alle coordinate x , ed in tal caso assume anch'essa un senso tautologico, come dire che qualsiasi funzione può essere invariante, a patto di usare delle coordinate che la rendano tale! Questa osservazione è piuttosto cruciale, dato che l'invariante costituisce il pilastro di tutta la teoria.

A contrastare tali osservazioni sta il progresso storico della scienza e della tecnica, di cui la teoria della relatività fa parte integrante, piaccia o non piaccia. Dopo tutto, l'asserzione che il Sole gira attorno alla Terra è soltanto storicamente superata, ma non è sbagliata (basterebbe istituire un riferimento astronomico solidale con la Terra).

Dove la relatività indubbiamente fallisce, è nella pretesa di essere una teoria fisica completa.

All'inizio del secolo XX si svilupparono sia la teoria della relatività, che la fisica quantistica; bisogna dire che Einstein cercò a lungo, senza successo, di eliminare questo dualismo nella fisica, e indusse altri fisici a sprecare sforzi in tale direzione.

Non è che le due teorie siano incompatibili (prescindendo dal problema dell'origine dell'universo); il fatto è che una sola di esse non basta a completare il quadro fisico.

La fisica quantistica fornisce risultati egregi anche nello spazio-tempo relativistico (per esempio citiamo la teoria dell'elettrone di Dirac), ma in una diversa interpretazione. E' un argomento delicato, che provo a riassumere in poche parole. Possiamo (anzi, dobbiamo) usare il riferimento spazio-temporale ed i concetti di evento e di particella, per descrivere i fenomeni ed i risultati delle misure, ma non riusciamo a produrre in tale contesto alcuna

teoria esatta che sia valida per i sistemi microscopici. Risulta invece possibile formulare tale teoria per una specie di sistema ausiliario, lo spazio degli stati, dove non vi sono particelle ma onde. Il collegamento fra i due sistemi è dato dal fatto che le onde rappresentano la conoscenza dello stato in cui si trovano le particelle. Tale conoscenza può essere deterministica (per esempio, i livelli energetici di un atomo), o probabilistica (per esempio, l'estensione dello stesso atomo); in questo caso, compiere una osservazione significa passare dalla probabilità alla certezza e dunque alterare l'onda, facendole compiere un salto. Questa è una rivoluzione del concetto di realtà, altrettanto profonda di quella operata da Einstein ma di tipo completamente diverso.

Fra tanti crolli e rivoluzioni, l'edificio matematico resta la struttura incrollabile e incontestata, capace di accogliere ogni nuova teoria fisica.

Infine la teoria della relatività non merita il proprio nome, poichè adotta metodi e finalità della geometria assoluta.

Utilità della relatività

La curvatura di un oggetto svolge un ruolo importante quando è molto marcata, oppure quando osserviamo una porzione abbastanza grande dell'oggetto.

Pertanto il passaggio alla relatività generale risulta utile quando abbiamo a che fare con campi gravitazionali molto intensi (astrofisica) o con spazi molto estesi (cosmologia) o con fenomeni verificabili con molta precisione perché periodici (orbite dei pianeti, righe di emissione spettrale).

Alcune previsioni della teoria (onde gravitazionali) hanno una verifica sperimentale molto successiva alla teoria stessa.

La relatività generale non dà luogo al dualismo fra massa inerziale e massa gravitazionale, che sussisteva nella meccanica classica ed ha impensierito tanti scienziati. Inoltre essa chiarisce come un universo, omogeneo su grande scala, possa essere privo di confini senza essere infinito.

La relatività ristretta risulta utile nel campo delle alte velocità (acceleratori di particelle) e nell'interpretazione dei fenomeni in cui l'equivalenza massa-energia risulta particolarmente evidente (fotoni, reazioni nucleari).

La sincronizzazione dei satelliti GlobalPositioningSystem ha certamente bisogno della relatività.

I progressi nella cosmologia, ottenuti grazie anche alla relatività, mostrano un universo chiuso e "sferico"; queste cose non sono verificabili, e dunque sconfinano nella filosofia, con un'inaspettata somiglianza alla visione aristotelica, la cui confutazione aveva segnato l'inizio della scienza moderna.

Le discussioni sulla relatività sono state vietate dal nazismo, ritardando providenzialmente la scoperta dell'energia nucleare, e dogmaticamente ridotte dal comunismo, cercando di privilegiare il ruolo della materia e sminuire il ruolo dell'osservatore.

Non credo che alcuna cultura oggi possa completamente prescindere dall'esistenza della teoria della relatività.

Estratto da "<https://www.electroyou.it/mediawiki/index.php?title=UsersPages:Ecotan:appunti-sulla-relativit-generale>"