



EdmondDantes

T COME TRIGONOMETRIA

8 February 2010

Lo scopo della trigonometria

[A che serve...?](#) A cosa servono gli integrali? Quando vado al supermercato non li uso! A cosa serve la trigonometria?

Se dobbiamo risolvere problemi geometrici con triangoli i cui lati hanno le dimensioni del centimetro, allora non serve a niente. Usiamo un righello e misuriamo i lati del triangolo.

E se un lato del triangolo è la distanza di una stella, il diametro della Terra o un punto inaccessibile? Usiamo il righello di plastica?

Detto ciò appare chiaro che la trigonometria, inizialmente, progredì grazie allo studio di astronomi e geografi. Gli studiosi che diedero vita a questa scienza furono [Ipparco di Nicea](#) e [Claudio Tolomeo](#), i massimi astronomi dell'antichità. Per i loro studi gli serviva uno **strumento**: la trigonometria. A che serve...?

A che serve...?

Gli utenti di **Electroportal** non possono e non devono porsi questa domanda. A che serve...?

Gran parte delle relazioni che si usano in elettrotecnica provengono da considerazioni trigonometriche.

Prendiamo ad esempio la macchina sincrona. Le relazioni fasoriali provengono quasi esclusivamente da considerazioni geometriche e trigonometriche fatte sui diagrammi fasoriali. La condizione di sovraeccitazione o sottoeccitazione ha la sua naturale radice fisica, prima di tutto la fisica, ma questa ci parla con la matematica...con la trigonometria.

A cosa serve calcolare il raggio di una circonferenza che circonda un triangolo? A niente, detto così!

Immaginiamo però che il triangolo sia il triangolo delle cadute di tensioni e che la circonferenza sia il luogo geometrico descritto dall'estremità di un fasore tensione

che ruota al variare delle condizioni di carico, mantenendo costante la propria ampiezza...

E la relazione della caduta di tensione industriale per un trasformatore? Ancora una considerazione di carattere geometrico e trigonometrico.

Teorema di Tolomeo

Il teorema di Tolomeo afferma che

in un quadrangolo convesso inscrittibile, il prodotto delle misure delle diagonali è uguale alla somma delle misure dei prodotti dei lati opposti.

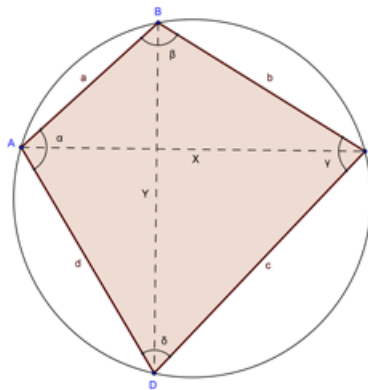


figura.png

Dimostrazione

Si indica con x ed y le diagonali AC e BD del quadrilatero di figura.

Per il teorema del coseno, ricordando che in un quadrilatero inscritto gli angoli opposti sono supplementari, possiamo scrivere:

$$x^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\beta \quad (1)$$

$$x^2 = c^2 + d^2 + 2cd \cdot \cos\beta \quad (2)$$

Dalla prima equazione ricaviamo $\cos\beta$

$$\cos\beta = \frac{a^2 + b^2 - x^2}{2ab}$$

e sostituiamolo nella seconda equazione, ottenendo:

$$x^2 = \frac{(ac + bd)(ad + bc)}{ab + cd} \quad (a)$$

Con operazioni analoghe:

$$y^2 = \frac{(ac + bd)(ab + cd)}{ad + bc} \quad (b)$$

Moltiplicando membro a membro ed estraendo la radice quadrata, otteniamo il teorema di Tolomeo:

$$xy = ac + bd$$

Se le relazioni a e b vengono divise, anzichè moltiplicate, membro a membro, otteniamo:

$$\frac{x}{y} = \frac{ad + bc}{ab + cd}$$

ovvero il teorema di **Legendre**:

in un quadrilatero inscritto, il rapporto fra le diagonali è uguale al rapporto fra le somme dei prodotti dei lati che concorrono nei loro estremi.

Formula di [Brahmagupta](#)

L'area A del quadrilatero di figura è la somma delle aree dei triangoli ABC e ACD , quindi possiamo scrivere (si ricordi che l'area di un triangolo è uguale al semiprodotto di due lati per il seno dell'angolo compreso):

$$A = \frac{ab \cdot \sin \beta}{2} + \frac{cd \cdot \sin \beta}{2}$$

Moltiplichiamo per 4 ambo i membri

$$4A = 2(ab + cd) \operatorname{sen} \beta \quad (3)$$

Sottraendo membro a membro la 1 e la 2, cioè i le relazioni che esprimono il quadrato della diagonale AC, si ha:

$$a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = 2(ab + cd) \cos \beta \quad (4)$$

Elevando al quadrato ambo i membri della 3 e 4, e sommando, otteniamo:

$$16A^2 + (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 = 4(ab + cd)^2 (\operatorname{sen}^2 \beta + \cos^2 \beta)$$

Con semplici passaggi algebrici si ottiene:

$$16A^2 = (-a + b + c + d)(a - b + c + d)(a + b - c + d)(a + b + c - d) \quad (5)$$

E' chiaro che:

$$a + b + c + d = 2p$$

cioè il perimetro del quadrilatero in esame, quindi la 5 può essere riscritta come:

$$16A^2 = 16(p - a)(p - b)(p - c)(p - d)$$

Semplificando ed estraendo la radice quadrata, otteniamo la formula di Brahmagupta:

$$A = \sqrt{(p - a)(p - b)(p - c)(p - d)}$$

Quando $d=0$, la formula di **Brahmagupta** coincide con quella di **Erone**, il quale trovò la propria formula non via trigonometrica (non esisteva questa scienza) ma per via geometrica.

Raggio del cerchio circoscritto

Ricordando che in un triangolo il rapporto fra un lato qualsiasi e il seno dell'angolo opposto è uguale al diametro del cerchio circoscritto, scriviamo:

$$2R = \frac{x}{\text{sen}\beta} \quad (6)$$

Ricavando x dalla relazione a e $\text{sen}\beta$ dalla relazione 3 e sostituendoli alla relazione 6, otteniamo:

$$R = \frac{\sqrt{(ac + bd)(ad + bc)(ab + cd)}}{4A}$$

Un vecchio problema di navigazione

Adesso vi illustrerò un importante problema di navigazione, ormai *banale* grazie alle moderne tecnologie che permettono la misura diretta delle distanze: determinare la posizione **X** di una nave in vista di tre punti noti **A**, **B** e **C** della costa.

Facciamo riferimento alla seguente figura:

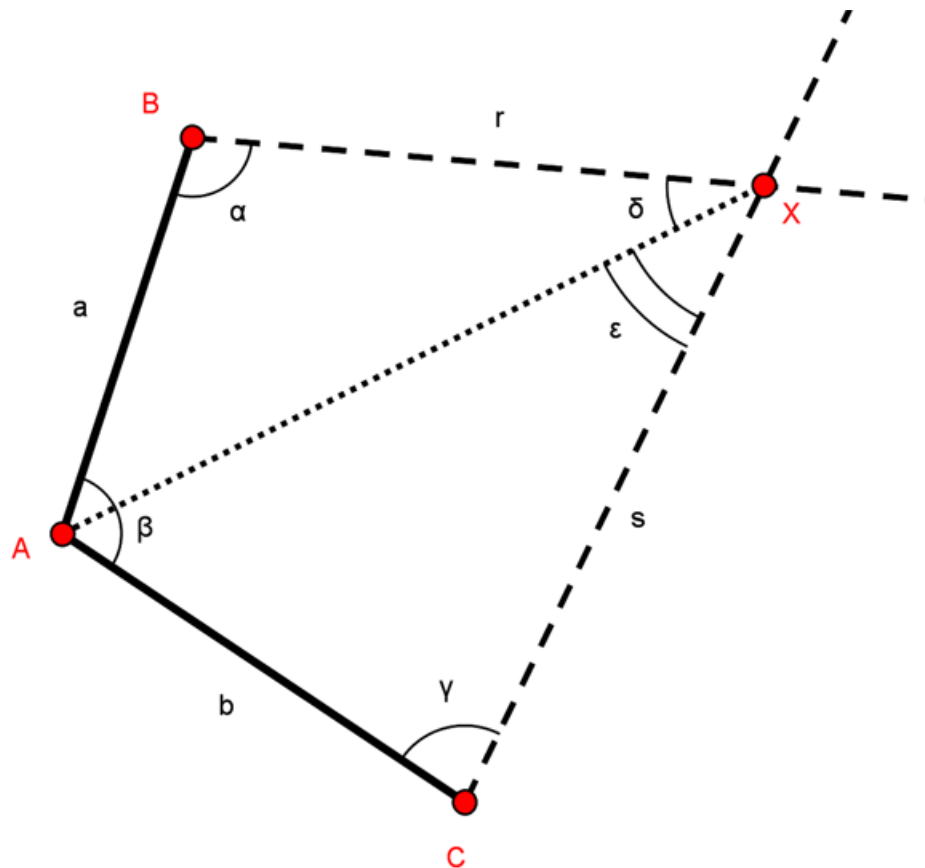


Figura.png

Un tempo non esistevano strumenti in grado di eseguire misure dirette delle distanze, però si potevano misurare con grande precisione le ampiezze degli angoli mediante il teodolite.

Andiamo al nostro problema di navigazione, risolto da [Willebrord Snellius](#), l'[Erastotene Olandese](#).

Per semplicità di scrittura evito i soprassegni per indicare i segmenti e il simbolo $^{\circ}$ per indicare i gradi sessagesimali.

I punti A, B e C sono noti (punti strategici ed immutabili come torri, monti, fari e così via), dunque conosciamo i segmenti **AB**, **BC** e l'ampiezza dell'angolo β .

Usando il teodolite presente sulla nave siamo in grado di misurare le ampiezze degli angoli δ e ϵ .

Per individuare univocamente la posizione della nave, occorre conoscere gli angoli α e γ , incognite del nostro problema.

E' noto che la somma degli angoli interni di un quadrilatero vale 360, quindi per il nostro quadrilatero **ABCX** possiamo scrivere:

$$\alpha + \gamma = 360 - (\beta + \delta + \varepsilon)$$

Conosciamo la somma delle nostre incognite. Individuandone la differenza, siamo in grado di trovarne i valori.

Applichiamo il teorema dei seni ai triangoli **ABX** e **BCX**:

$$\frac{\text{sen}\alpha}{BX} = \frac{\text{sen}\delta}{a}$$

$$\frac{\text{sen}\gamma}{BX} = \frac{\text{sen}\varepsilon}{b}$$

Dividendoli membro a membro:

$$\frac{\text{sen}\alpha}{\text{sen}\gamma} = \frac{b \cdot \text{sen}\delta}{a \cdot \text{sen}\varepsilon}$$

e applicando la proprietà del comporre e scomporre, otteniamo:

$$\frac{\text{sen}\alpha + \text{sen}\gamma}{\text{sen}\alpha - \text{sen}\gamma} = \frac{b \cdot \text{sen}\delta + a \cdot \text{sen}\varepsilon}{b \cdot \text{sen}\delta - a \cdot \text{sen}\varepsilon}$$

Al primo membro della precedente applichiamo una delle relazioni della prostaferesi (minuscolo poichè non è né una unità di misura né il cognome di uno studioso). Il secondo membro verrà moltiplicato e diviso per $b \cdot \text{sen}\delta$.

$$\frac{\frac{1}{\text{tg}\frac{1}{2}(\alpha + \gamma)}}{\frac{1}{\text{tg}\frac{1}{2}(\alpha - \gamma)}} = \frac{1 + \frac{a \cdot \text{sen}\varepsilon}{b \cdot \text{sen}\delta}}{1 - \frac{a \cdot \text{sen}\varepsilon}{b \cdot \text{sen}\delta}}$$

Ricordo che il secondo membro è un termine noto, essendo noti **a**, **b**, ε e δ .

Poniamo:

$$tg\Theta = \frac{a \cdot \operatorname{sen}\varepsilon}{b \cdot \operatorname{sen}\delta}$$

Dunque:

$$\frac{tg\frac{1}{2}(\alpha + \gamma)}{tg\frac{1}{2}(\alpha - \gamma)} = \frac{1 + tg\Theta}{1 - tg\Theta}$$

Da quest'ultima relazione otteniamo:

$$tg\frac{1}{2}(\alpha - \gamma) = \frac{1 + tg\Theta}{1 - tg\Theta} tg\frac{1}{2}(\alpha + \gamma)$$

$tg\Theta$ è un termine noto, $(\alpha + \gamma)$ è noto, quindi è possibile calcolare $tg\frac{1}{2}(\alpha - \gamma)$ ed infine $\frac{1}{2}(\alpha - \gamma)$.

E' lecito scrivere

$$\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\gamma = k$$

$$\frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\gamma = h$$

Sistema di due equazioni in due incognite che mi rifiuto di risolvere.

Note le incognite il problema è risolto, poichè basta applicare il teorema dei seni per calcolare le distanze **AX**, **BX** e **CX**. Il punto **X** si trova nella intersezione delle semirette **r** e **s**.

Willebrord Snellius non aveva la calcolatrice programmabile, ma le **tavole antiche**.

Dovette fare altre posizioni finali, sfruttando identità e relazioni trigonometriche per arrivare a formulazioni idonee ai suoi strumenti.

Note

La trigonometria è stata fin dal principio una delle applicazioni più pratiche della matematica. Alla sua nascita seguirono invenzioni meravigliose in campo meccanico, opere di irrigazioni, calcoli astronomici sempre più precisi e strumenti di misura. In una parola la **civiltà**.

Chiedo scusa per questo articolo, ma ieri sera stavo leggendo un libro sull'argomento...

Estratto da "<http://www.electroyou.it/mediawiki/index.php?title=UsersPages:Edmonddantes:trigonometria>"