



EnChamade

TELESCOPI: I - RICHIAMI DI OTTICA GEOMETRICA E PARASSIALE

17 January 2016

Abstract

In questo primo articolo della collana *Telescopi* sono ripresi i concetti fondamentali di ottica geometrica e ottica parassiale che sono alla base di tutti gli approcci di analisi e progetto dei telescopi. In particolare, dopo un breve richiamo sui concetti di onda elettromagnetica, di fronte d'onda e raggio, ampio spazio viene dedicato all'analisi parassiale di superfici ottiche mediante il metodo matriciale.

Una necessaria premessa introduttiva

Le motivazioni di questa raccolta di articoli

Già da parecchio tempo avevo in mente di realizzare una raccolta di articoli che trattasse in modo approfondito i telescopi ed il loro funzionamento. Recentemente, soprattutto dopo un intervento di admin in una discussione, mi sono convinto che questo progetto, che fino a quel momento non avevo considerato seriamente, poteva forse essere sviluppato. Ho quindi iniziato a pensare quali fossero gli obiettivi che volevo raggiungere per articolare al meglio il percorso espositivo da seguire. E alla fine ho partorito un'idea che credo essere molto originale se comparata a quello che comunemente si trova in rete o sui testi specialistici.

Devo però essere chiaro fin d'ora che negli articoli che comporranno questa collezione non troverete la risposta al vostro dubbio su quale telescopio comperare e tantomeno consigli o istruzioni su come utilizzarli nel campo. Al contrario, questa collana di articoli vuole collocarsi ad un livello superiore, offrendo invece le argomentazioni e gli strumenti matematici necessari a comprendere approfonditamente il funzionamento del telescopio. E riuscire in questo intento non è banale! Ma la volontà c'è. Auspico anche una forte partecipazione degli utenti di ElectroYou che, tramite i loro feedback, possono senza dubbio migliorare il prodotto finale.

Come sono organizzati gli articoli

Per cominciare verranno ripresi alcuni argomenti base di ottica ondulatoria e geometrica che vengono ampiamente trattati nei corsi base di fisica. Questo passo è assolutamente fondamentale per permettere, a coloro che hanno studiato questi argomenti in passato, di riprendere familiarità con tali concetti o, per coloro che non li hanno mai visti, di apprendere. Tuttavia, per alcuni argomenti ho scelto di utilizzare un approccio diverso da quello comunemente utilizzato nei corsi base di fisica o di ottica. In particolare, in questa collezione di articoli faremo largo uso

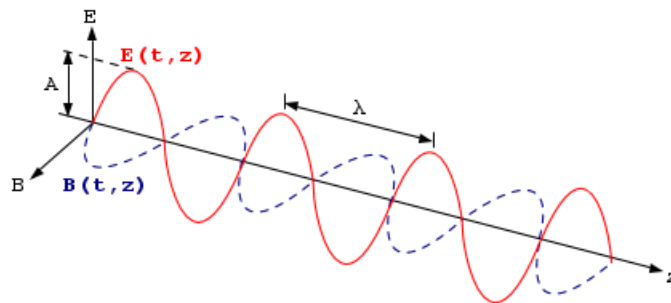
del metodo delle matrici parassiali che, considerando anche la mia esperienza personale, trovo interessante e molto adatto agli scopi che mi sono prefissato, nonostante trovi raro impiego sia in campo accademico che in campo professionale. Inoltre, durante l'esposizione alcune parti di testo verranno racchiuse in un rettangolo grigio per indicare che quella parte è stata riportata per ragioni di completezza ma che non è necessaria ai fini della comprensione dei concetti; il lettore potrà quindi scegliere di saltarla senza problemi. Si è deciso di procedere in questo modo per evitare di appesantire eccessivamente il flusso espositivo senza però rinunciare alla trattazione matematica completa.

Alcuni veloci richiami di ottica ondulatoria

Lo scopo principale di un telescopio è di raccogliere la luce proveniente da una sorgente lontana (e.g. un corpo celeste) e formare un'immagine di quest'ultima in modo che possa essere osservata attraverso un oculare o raccolta da un detector (pellicola, CCD, CMOS). E' quindi evidente come, prima di parlare di telescopi o, più in generale, di sistemi ottici, sia necessario parlare di luce. Oggi sappiamo che una gran parte dei fenomeni ottici, quali ad esempio gli effetti di diffrazione o interferenza, possono essere rigorosamente giustificati attribuendo alla luce una natura ondulatoria, descrivendola come un'onda elettromagnetica che si propaga e interagisce con la materia seguendo le regole imposte dalle equazioni di Maxwell.

Senza entrare troppo nel merito nella teoria delle onde elettromagnetiche, allo scopo di riprendere alcuni concetti fondamentali consideriamo l'onda armonica che si propaga nel vuoto lungo la direzione z riportata in figura 1.

Figura 1: onda armonica piana utilizzata per riprendere alcuni dei concetti fondamentali delle onde elettromagnetiche.



In questo esempio, dove il sistema di riferimento è stato scelto in modo opportuno per semplificare le espressioni matematiche, il campo elettrico di quest'onda elettromagnetica è descritto dalla relazione

$$E(t, z) = A \sin \left[2\pi f \left(t + \frac{z}{c} \right) + \phi \right] = A \sin \left[\frac{2\pi}{\lambda} (ct + z) + \phi \right]$$

dove A è l'ampiezza massima del campo elettrico, f è la frequenza dell'onda armonica, c è la velocità della luce nel vuoto e ϕ è una fase arbitraria di partenza. Si noti che è stato definito il parametro

$$\lambda = \frac{c}{f}$$

che assume il nome **lunghezza d'onda** in vuoto dell'onda armonica; il suo significato fisico può essere chiaramente compreso osservando la figura 1. Giusto per fissare un'ordine di grandezza, la luce visibile ha lunghezze d'onda comprese fra i 400nm e gli 800nm.

L'indice di rifrazione

La velocità di propagazione nel vuoto dell'onda armonica appena descritta è pari alla velocità della luce. Tuttavia quando l'onda elettromagnetica si propaga in un altro mezzo come ad esempio l'acqua o il vetro, la sua velocità di propagazione diminuisce. Nel caso l'onda si propaghi in un mezzo lineare, omogeneo, isotropo e senza perdite, la velocità di propagazione è data dalla relazione

$$v = \frac{c}{n}$$

dove n è chiamato **indice di rifrazione** ed è una grandezza adimensionale caratteristica del mezzo. In generale, i mezzi sono **dispersivi** e quindi l'indice di rifrazione che li caratterizza dipende dalla lunghezza d'onda dell'onda elettromagnetica. Nel campo del visibile, la dipendenza dalla lunghezza d'onda dell'indice di rifrazione dei materiali, come ad esempio il vetro, è solitamente quantificato mediante formule di dispersione empiriche, quali ad esempio la formula di dispersione di Cauchy (di norma arrestata al secondo termine)

$$n(\lambda) = A + \frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^4} + \dots$$

o la formula di dispersione di Sellmeier

$$n^2(\lambda) = 1 + \frac{B_1\lambda^2}{\lambda^2 - C_1} + \frac{B_2\lambda^2}{\lambda^2 - C_2} + \frac{B_3\lambda^2}{\lambda^2 - C_3}$$

In generale, per la luce visibile, la maggior parte dei materiali trasparenti ha:

$$1 < n(\lambda_{\text{rosso}}) < n(\lambda_{\text{giallo}}) < n(\lambda_{\text{blu}})$$

o alternativamente

$$\frac{dn}{d\lambda} < 0$$

significando che l'indice di rifrazione n decresce all'aumentare della lunghezza d'onda λ . In questo caso il mezzo si dice essere a **dispersione normale**. Al contrario se l'indice cresce al crescere della lunghezza d'onda, il mezzo è a **dispersione anomala**. Questa dipendenza dell'indice di rifrazione è la causa, come vedremo, del problema di **aberrazione cromatica** che riguarda tutti gli **strumenti rifrattivi**, ossia che utilizzano lenti; ovviamente tale problema non affligge gli **strumenti a riflessione**, ossia che utilizzano solamente specchi.

Se il mezzo è assorbente, la radiazione viene assorbita durante la propagazione in esso. In questo caso l'indice di rifrazione diventa un numero complesso in cui la parte immaginaria tiene conto dell'assorbimento del materiale

$$\mathbf{n} = n + ik$$

Più avanti vedremo che un materiale molto assorbente è adatto alla realizzazione di superfici molto riflettenti e quindi alla realizzazione di specchi.

Il fronte d'onda

Considerando un generico istante di tempo t_0 , il campo elettrico può ora essere descritto dalla relazione

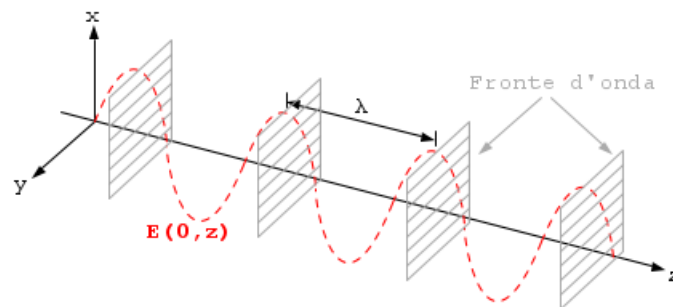
$$E(t_0, z) = A \sin \left[\frac{2\pi}{\lambda} z + \phi_0 \right]$$

dove

$$\phi_0 = \frac{2\pi}{\lambda} ct_0 + \phi.$$

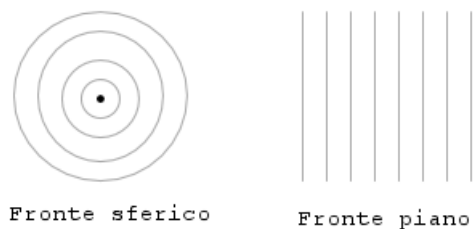
Analizzando questa relazione si osserva che il luogo dei punti in cui la fase totale dell'onda risulta uguale ad un preciso valore è un piano. Questo concetto è chiaramente visualizzato in figura 2 dove è rappresentato il luogo dei punti dove la fase totale dell'onda usata come esempio è 90° , 450° , 810° , ecc.

Figura 2: visualizzazione del fronte d'onda per l'onda elettromagnetica considerata in figura 1.



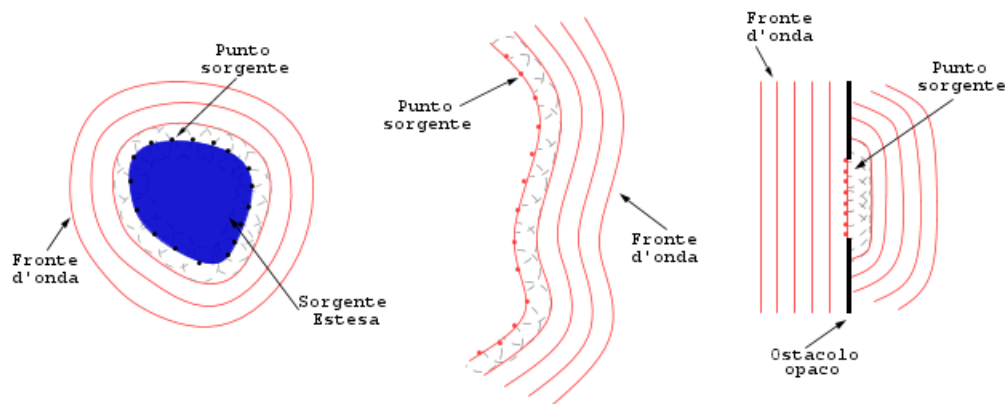
Questo luogo dei punti in cui la fase totale risulta essere costante prende il nome di **fronte d'onda**. In particolare, nel caso in cui il fronte d'onda sia piano, come nell'esempio considerato fino a qui, si parla di onda piana. Vi sono però anche molti altri tipi di fronti d'onda. Uno molto importante è il **fronte d'onda sferico**, emesso da un punto sorgente infinitesimo, chiamato **punto sorgente**, posto ad una distanza finita dall'osservatore (figura 3).

Figura 3: fronte d'onda sferico e fronte d'onda piano.



L'importanza del punto sorgente infinitesimo e del fronte d'onda sferico risiede nel fatto che essi sono gli strumenti base per la costruzione di fronti d'onda più complessi come quelli emessi da sorgenti estese o quelli ottenuti per effetto di interazione fra la luce ed ostacoli opachi. In pratica una sorgente estesa o, più in generale, un generico fronte d'onda possono essere scomposti in sorgenti puntiformi secondarie che emettono a loro volta onde sferiche secondarie con le stesse caratteristiche dell'onda primaria (lunghezza d'onda, frequenza, velocità) se non vi è un cambio del mezzo in cui l'onda si sta propagando (nel caso contrario, la lunghezza d'onda e la velocità si adatteranno al cambio di mezzo). Sommando fra loro i contributi dati da ogni singola sorgente secondaria, si può costruire il nuovo fronte d'onda prodotto per effetto della propagazione all'istante successivo; il procedimento può quindi essere ripetuto iterativamente. Questo principio, chiamato **principio di Huygens-Fresnel**, costituisce uno strumento di calcolo molto utile perchè consente di determinare direttamente il fronte d'onda ad un certo istante una volta noto quello ad un qualsiasi istante precedente o successivo (figura 4).

Figura 4: alcuni esempi di ricostruzione del fronte d'onda utilizzando il principio di Huygens-Fresnel.



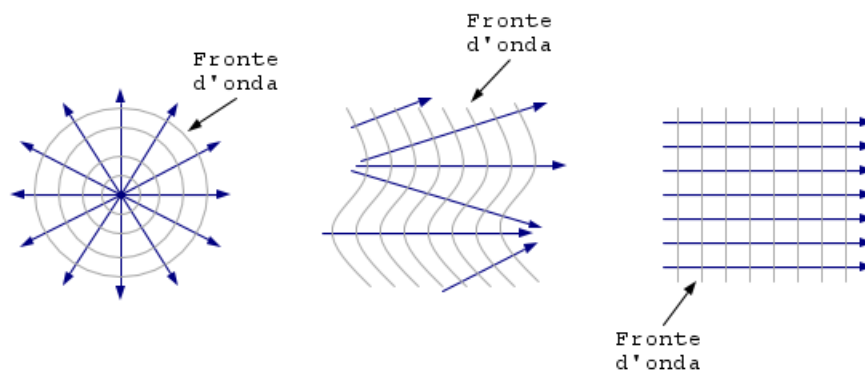
Quando si parla di sorgenti e fronti d'onda, c'è un caso particolare che viene incontrato molto spesso quando si parla di telescopi. Si tratta della situazione in cui una sorgente estesa è posta ad una distanza molto grande, al limite all'infinito, dall'osservatore. In questo caso la porzione di fronte d'onda raccolta dall'osservatore sarà, di fatto, una sezione molto piccola e può essere quindi approssimato, localmente, ad un fronte d'onda piano; ecco quindi il motivo per cui si dice che un'onda piana è generata da una sorgente posta all'infinito. Questo è il caso della maggior parte dei

corpi celesti: la distanza che ci separa da loro è di norma molti ordini di grandezza superiore alla loro dimensione e quindi possono essere considerati sorgenti all'infinito.

Il concetto di raggio

Un interessante approccio operativo che consente di evitare l'utilizzo del modello ondulatorio nell'analisi di strumentazione ottica è dato dal concetto di raggio. A tutti sarà capitato di osservare che la luce diretta del sole che entra in casa attraverso una finestra sembra propagarsi lungo una traiettoria retta. Questa evidenza sperimentale suggerì ai primi studiosi di ottica l'introduzione di un modello puramente geometrico, dove la luce che si propaga attraverso un mezzo lineare e omogeneo viene descritta da infinità di raggi che si propagano sempre lungo una traiettoria rettilinea. Applicando la teoria ondulatoria, si può dimostrare che questa approssimazione è ammissibile quando $\lambda \rightarrow 0$. Più in generale, l'approssimazione geometrica della luce è tanto più ammissibile quanto più le dimensioni degli elementi ottici che costituiscono lo strumento (lenti, specchi, fori, fenditure, ecc..) sono molto maggiori della lunghezza d'onda della luce. Tenendo conto che quando si costruisce un telescopio, le dimensioni fisiche degli specchi e delle lenti sono dell'ordine delle decine di millimetri e più, alle tipiche lunghezze d'onda del visibile possiamo concludere che è ammissibile studiare il un sistema ottico considerando la luce composta da raggi. Così procedendo abbiamo un modello più adatto a focalizzare l'attenzione solo su alcuni aspetti del funzionamento del nostro sistema. Tuttavia, come vedremo, gli effetti dovuti alla natura ondulatoria della luce (quali diffrazione, interferenza, etc.), pur essendo piccoli, alterano le prestazioni finali dello strumento e richiedono comunque una valutazione alla fine del progetto. Una proprietà importante dei raggi è che essi sono sempre perpendicolari al fronte d'onda. Ecco che quindi, conoscendo il fronte d'onda emesso da una sorgente, possiamo anche derivare il modello a raggi come riportato in figura 5.

Figura 5: esempi di relazione fra raggi e fronte d'onda.



Solitamente in uno schema ottico si tracciano i pochi raggi che sono significativi per la comprensione e l'analisi che si sta svolgendo. Nel passato mi è anche capitato di vedere un tentativo di rappresentare l'intensità della luce aumentando o diminuendo la densità di raggi. In

qualche caso questo metodo potrebbe essere utile ma in generale non è di facile applicazione e quindi non verrà adottato.

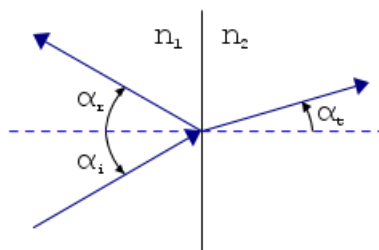
L'ottica geometrica e l'approssimazione parassiale

L'ottica geometrica si propone di studiare con un approccio puramente geometrico la propagazione e la deviazione di un fascio di luce, rappresentato mediante il modello a raggi, quando questo incontra una superficie d'interfaccia fra due mezzi caratterizzati da un diverso indice di rifrazione. Trattandosi di un'analisi basata esclusivamente su regole geometriche, nel campo dell'ottica geometrica non vengono assolutamente considerati gli effetti che possono essere indotti dalla natura ondulatoria della luce (e.g. la diffrazione). Ed è proprio questa la potenzialità di questa analisi: geometricamente si riesce a valutare in modo abbastanza semplice la qualità che uno strumento ottico, quale ad esempio un telescopio, possiede nella formazione dell'immagine della sorgente che sta osservando senza dover risolvere direttamente le complicate equazioni di Maxwell. Ovviamente, una volta valutate le prestazioni di uno strumento, esse dovranno poi essere correttamente interpretate tenendo in considerazione gli effetti indotti dalla natura elettromagnetica della luce; questo punto verrà discusso più avanti.

Lo studio geometrico di un sistema ottico è interamente retto sulle relazioni di Snell [Ref].

Si consideri la situazione generale riportata in figura 6 in cui un raggio di luce viaggia attraverso l'interfaccia fra due mezzi caratterizzati dagli indici di rifrazione n_1 e n_2 .

Figura 6: rifrazione e riflessione su una superficie d'interfaccia.



In generale, a seconda delle caratteristiche ottiche dei due mezzi, una parte dell'irradianza del fascio di luce incidente verrà riflessa mentre un'altra parte verrà trasmessa. Si può dimostrare [1] che la relazione fra gli angoli in questo caso è fornita dalle seguenti relazioni:

$$\alpha_i = \alpha_r$$

$$n_1 \sin \alpha_i = n_2 \sin \alpha_t$$

A differenza di quanto si trova nei libri classici di fisica, in cui solitamente si tralascia questo dettaglio, qui conviene far notare la convenzione di segno che viene implicitamente adottata per gli angoli che compaiono in figura. Considerando gli angoli formati fra un asse di riferimento e un raggio in propagazione, assumiamo che gli angoli formati da raggi che viaggiano dal basso verso

l'alto sono positivi mentre, se il raggio viaggia dall'alto verso il basso l'angolo è negativo. Quindi, tutti gli angoli in figura 6, sono positivi.

Utilizzando le relazioni di Snell, è possibile analizzare il percorso che ogni singolo raggio emesso dalla sorgente percorre all'interno del sistema ottico. Questa è la base della tecnica chiamata *ray-tracing* che viene implementata in tutti i software di progettazione ottica. Purtroppo, un'analisi di questo tipo porta ad avere equazioni molto complesse e poco maneggiabili per un'analisi preliminare realizzata manualmente. Si preferisce quindi introdurre delle approssimazioni che permettano di semplificare tali equazioni riuscendo comunque a mantenere un'informazione qualitativa sul funzionamento del sistema ottico. L'approssimazione che si attua è chiamata approssimazione parassiale e consiste nel considerare solo raggi molto vicini all'asse ottico e con inclinazioni molto piccole rispetto ad esso. In questo modo, tutte le funzioni trigonometriche che comparirebbero nelle equazioni possono essere approssimate con il termine al prim'ordine del loro sviluppo in serie:

$$\sin \alpha \simeq \tan \alpha \simeq \alpha$$

$$\cos \alpha \simeq 1$$

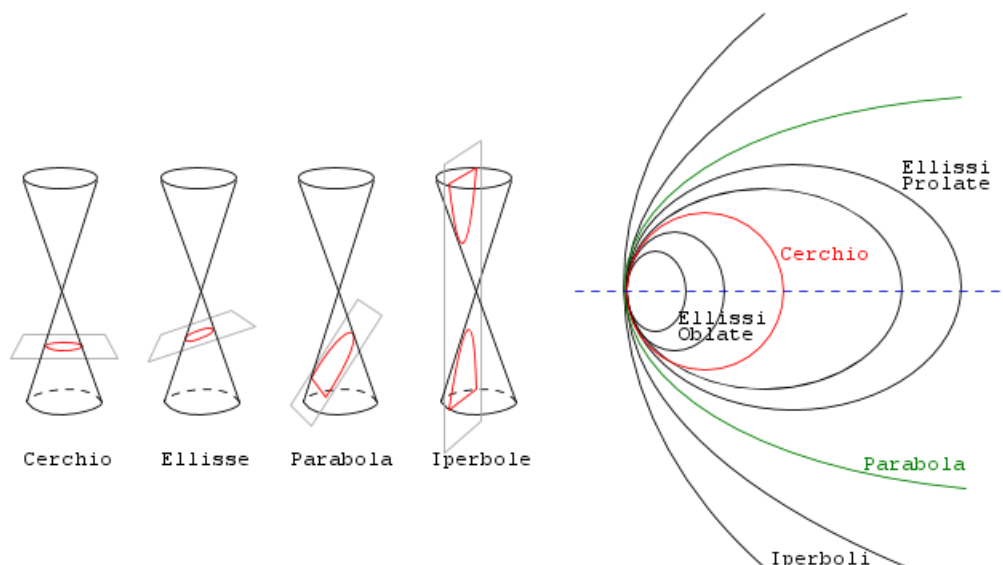
Con tale approssimazione, la seconda relazione di Snell diventa

$$n_1 \alpha_i = n_2 \alpha_t$$

Il metodo delle matrici parassiali

Un sistema ottico, quando si analizza da un punto di vista geometrico, può essere considerato come un insieme di superfici tridimensionali che i raggi di luce incontrano sequenzialmente durante la loro propagazione. Le tipiche superfici che vengono utilizzate, oltre a quelle piane, nella realizzazione di telescopi sono quelle derivante tramite rotazione attorno ad un asse di sezioni coniche (e.g. ellissoidi, paraboloidi, iperboloidi e sfere) mostrate in figura 7.

Figura 7: Superfici derivate da rotazione di sezioni coniche utilizzate nella realizzazione di telescopi.



Vale la pena soffermarsi un attimo sulle *superfici sferiche*. I progettisti di strumentazione ottica in generale tendono a lavorare quasi esclusivamente con superfici sferiche. Questo perché, da un punto di vista costruttivo, la realizzazione di una superficie sferica è più semplice e meno costosa rispetto a tutte le altre superfici derivate dalle sezioni coniche (che, solitamente, nel campo vengono indicate con il termine *asferiche*). Quindi, di norma, si utilizzano superfici asferiche solo quando è strettamente necessario, come accade nel campo dei telescopi astronomici. La superficie sferica assume anche una grande importanza nell'analisi teorica perché nell'approssimazione parassiale, dove si considera solamente la parte di superficie attorno all'asse di rotazione, tutte le superfici asferiche possono essere approssimate da una sfera. Ecco quindi che in approssimazione parassiale non ha importanza conoscere la tipologia di superficie conica in esame ma basta considerarla sferica. Inoltre, essendo tali superfici ottenute per rotazione, è sufficiente eseguire l'analisi parassiale solo su un piano di riferimento definito in modo da contenere l'asse di rotazione (che assume il nome di asse ottico della superficie). In questo modo il problema si riduce a due dimensioni senza perdere tuttavia informazioni utili. Torneremo però più avanti a parlare delle superfici asferiche quando parleremo delle aberrazioni.

Il sistema di riferimento adottato

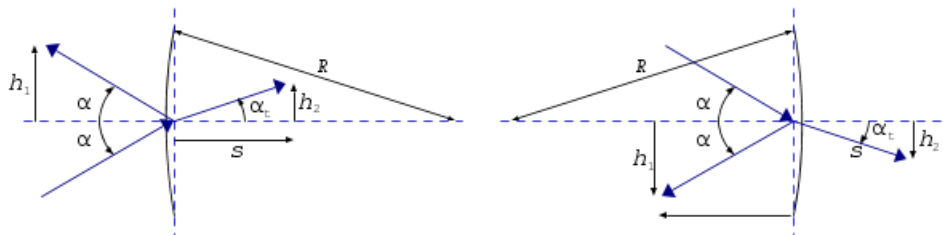
Da qui in poi tutte le analisi verranno effettuate considerando un preciso sistema di riferimento. Innanzitutto, per evitare errori, considereremo sempre la propagazione dei raggi da sinistra verso destra. Data la superficie ottica in esame, costruiremo su di essa un sistema di tipo cartesiano dove l'asse delle ascisse corrisponde all'asse ottico e l'asse delle ordinate è posto sulla superficie (o sul vertice) in esame. Avremo poi che

- le distanze misurate verso la sinistra della superficie hanno segno negativo mentre quelle misurate verso destra hanno segno positivo;

- le altezze misurate sopra l'asse ottico hanno segno positivo mentre le altezze misurate sotto l'asse ottico hanno segno negativo;
- se il centro di curvatura della superficie giace a destra della superficie (**superficie convessa**) allora il raggio di curvatura è considerato positivo, altrimenti il raggio di curvatura è negativo (**superficie concava**);
- gli angoli formati fra l'asse delle ascisse e un raggio in propagazione assumono segno positivo se il raggio viaggia dal basso verso l'alto altrimenti l'angolo assume segno negativo; questo vale anche per gli angoli misurati rispetto la normale alla superficie.

In figura 8 sono riportati alcuni esempi sul sistema di riferimento adottato: tutte le grandezze indicate nella parte sinistra della figura hanno valore numerico positivo mentre quelle indicate nella parte destra hanno valore numerico negativo.

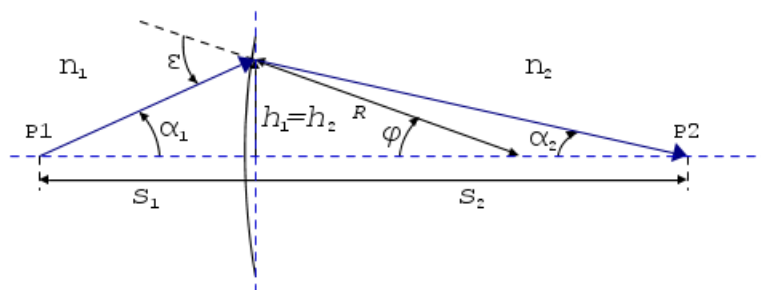
Figura 8: esempi sul sistema di riferimento adottato. Nella figura di sinistra tutte le grandezze indicate sono positive mentre nella figura di destra tutte le grandezze indicate sono negative.



Rifrazione su una superficie sferica

Si consideri una superficie di forma sferica fra due mezzi caratterizzati, per ora, da indici di rifrazione tali da soddisfare la condizione $n_1 < n_2$. Una parte dei raggi provenienti dalla sorgente posizionata in P1 vengono rifratti dalla superficie convergendo nel punto P2 che chiamiamo punto immagine. Tale situazione è riportata, per un generico raggio, in figura 9.

Figura 9: Situazione considerata per lo studio della rifrazione della luce su una superficie sferica.



Come è dimostrato di seguito, gli angoli α_1 e α_2 e le altezze h_1 e h_2 riportate in figura 9 sono legate fra loro dalla relazione matriciale

$$\begin{pmatrix} h_2 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{R} \left(\frac{n_1}{n_2} - 1 \right) & \frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}$$

Prova

Con riferimento alla figura 9 e ricordandoci che stiamo lavorando in approssimazione parassiale, è facile osservare che

$$-\alpha_2 - \epsilon_2 = -\varphi$$

$$-\alpha_2 + \frac{n_1}{n_2} \epsilon_1 = -\alpha_2 + \frac{n_1}{n_2} (\alpha_1 - \varphi) = -\varphi$$

da cui, osservato che $h_1 = h_2 = h$, si ricava

$$\alpha_2 = \varphi \left(1 - \frac{n_1}{n_2} \right) + \frac{n_1}{n_2} \alpha_1 = \frac{h}{R} \left(\frac{n_1}{n_2} - 1 \right) + \frac{n_1}{n_2} \alpha_1 =$$

dove, nell'ultimo passaggio, si è utilizzato l'approssimazione

$$\varphi \simeq -\frac{h}{R}$$

Si può infine riscrivere la precedente relazione in forma matriciale, ottenendo appunto

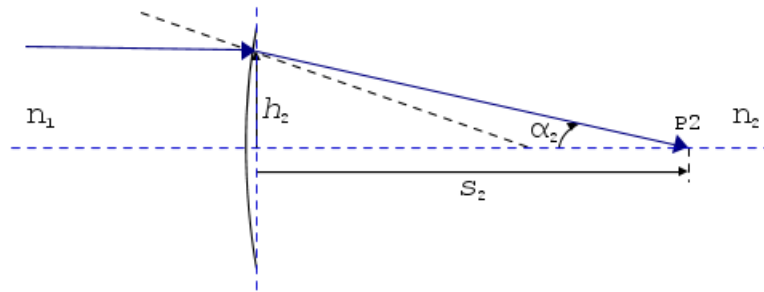
$$\begin{pmatrix} h_2 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{R} \left(\frac{n_1}{n_2} - 1 \right) & \frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}$$

La matrice appena ricavata ha una moltitudine di proprietà interessanti che sono ampiamente discusse in alcuni testi specifici di ottica come [2], [3] o [4]. Tralascieremo quindi l'esposizione della maggior parte di queste caratteristiche richiamando solamente quelle che in seguito potranno tornarci utili. Tra queste, ci soffermiamo sul significato del primo termine della seconda riga che normalmente viene indicato come C . Questo si ricava dalla relazione

$$C = \left. \frac{\alpha_2}{h_1} \right|_{\alpha_1=0}$$

Scritta così a molti potrebbe non dire nulla. Allo scopo di comprendere meglio il significato di questa relazione, consideriamo il disegno in figura 10.

Figura 10: situazione utile a comprendere il concetto di lunghezza focale.



La condizione $\alpha_1 = 0$ presuppone che il raggio in ingresso sia parallelo all'asse; equivalentemente, si dice che l'oggetto sorgente P1 è posto all'infinito. Considerando la convenzione di segni abbiamo che

$$s_2 = -\frac{h_2}{\alpha_2} = -\frac{1}{C}$$

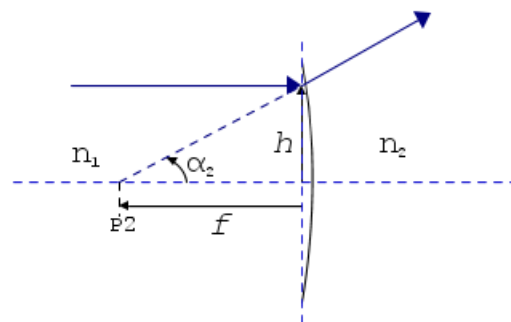
scoprendo che il termine C , a meno del segno, è l'inverso della distanza dalla superficie del punto P2 in cui convergono i raggi provenienti da un oggetto posto all'infinito e che vengono rifratti dalla superficie stessa; questa è la definizione di *distanza focale* della superficie. Indicando quindi con f questa distanza focale, abbiamo

$$C = -\frac{1}{f} = \frac{1}{R} \left(\frac{n_1}{n_2} - 1 \right)$$

Una superficie il cui valore di distanza focale è positivo viene detta *superficie convergente* o *superficie positiva*.

La distanza focale di una superficie può assumere anche un valore negativo. Fino a qui abbiamo considerato il caso in cui il raggio di curvatura della superficie è positivo (*superficie sferica convessa*) e che i due mezzi siano caratterizzati da indici di rifrazione tali da soddisfare la condizione $n_1 < n_2$. Se però $R < 0$, la superficie è *sferica concava* e la lunghezza focale diventa negativa. Da un punto di vista fisico, questo significa che il punto di fuoco diventa *virtuale* in quanto si trova a sinistra della superficie (figura 11).

Figura 11: comportamento di una superficie con lunghezza focale negativa.



In pratica, quando un raggio proveniente da una sorgente posta all'infinito incide su una superficie caratterizzata da una focale negativa, questo raggio assume l'angolo di divergenza uguale a quello di un raggio emesso da un punto sorgente posto alla distanza f prima della superficie (figura 11). In questo caso si parla di *superficie divergente* o *superficie negativa*. Infine, se $n_1 > n_2$, la superficie concava diventa positiva e quella convessa diventa negativa.

Approfondimento

Riportando l'attenzione alla figura 9, possiamo scrivere

$$s_1 = -\frac{h_1}{\alpha_1} s_2 = -\frac{h_2}{\alpha_2}$$

Ricordando la relazione matriciale

$$\begin{pmatrix} h_2 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{R} \left(\frac{n_1}{n_2} - 1 \right) & \frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}$$

dopo qualche passaggio algebrico troviamo la relazione

$$\frac{n_2}{s_2} - \frac{n_1}{s_1} = \frac{n_2 - n_1}{R} = \frac{n_2}{f}$$

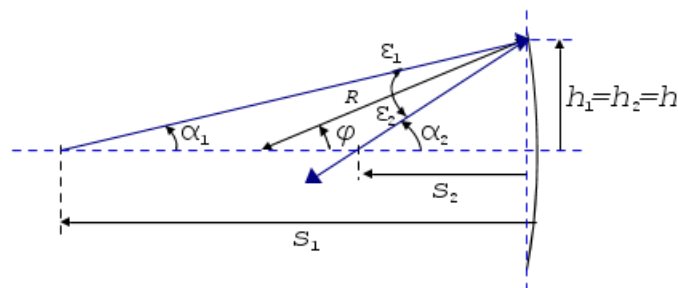
Questa relazione viene chiamata *legge fondamentale del diottro* e lega, attraverso la focale f , la posizione della sorgente s_1 e dell'immagine (sia essa virtuale che reale) s_2 .

Riflessione su una superficie sferica

Con analogo procedimento, possiamo analizzare la riflessione di un raggio su una superficie sferica concava. Con riferimento alla figura 12, si ha

$$\begin{pmatrix} h_2 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2}{R} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}$$

Figura 12: riflessione su una superficie sferica concava.



Prova

Con analogo procedimento a quello seguito per lo studio della rifrazione, abbiamo

$$-\alpha_2 = \alpha_1 + \epsilon_1 - \epsilon_2$$

e considerando che per la legge di Snell nel caso in esame deve essere $\epsilon_1 = -\epsilon_2$, otteniamo

$$-\alpha_2 = \alpha_1 + 2\epsilon_1$$

Inoltre, possiamo scrivere

$$\alpha_1 + \epsilon_1 = \varphi$$

ottenendo

$$-\alpha_2 = \alpha_1 + 2(\varphi - \alpha_1) = 2\varphi - \alpha_1 = -\frac{2}{R}h_1 - \alpha_1$$

Considerando quest'ultima relazione e ricordando che per costruzione del problema $h_1 = h_2$, giungiamo alla forma matriciale

$$\begin{pmatrix} h_2 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2}{R} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}$$

Analoghe considerazioni a quelle fatte per la superficie rifrattiva portano a definire la focale della superficie come

$$f = -\frac{R}{2}$$

In particolare si ha che una superficie concava è positiva mentre una superficie convessa è negativa.

Approfondimento

Anche in questo caso, poichè

$$s_1 = -\frac{h_1}{\alpha_1}$$

$$s_2 = \frac{h_2}{\alpha_2}$$

otteniamo dopo qualche semplice passaggio la *relazione fondamentale dello specchio sferico*

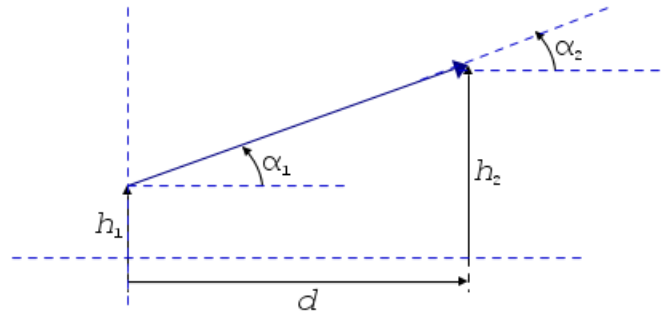
$$\frac{1}{s_2} + \frac{1}{s_1} = \frac{2}{R} = -\frac{1}{f}$$

Propagazione libera

Con riferimento alla figura 13, la matrice equivalente di un raggio che si è propagato per una distanza d all'interno dello stesso mezzo è data da

$$\begin{pmatrix} h_2 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}$$

Figura 13: raggio in propagazione libera.



Analisi con il metodo delle matrici parassiali di sistemi ottici complessi

Il metodo delle matrici parassiali è molto interessante quando il nostro sistema ottico è composto da più superfici in serie. In questi casi si può facilmente dimostrare che il sistema può essere descritto da una matrice equivalente ottenuta dalla moltiplicazione a sinistra delle matrici di ogni singola superficie incontrata. Giusto per fissare le idee, se il sistema ottico in esame è composto dalla sequenza delle superfici $S_1 \dots S_N$ e M_n è la matrice parassiale dell' n -esima superficie, la matrice equivalente del sistema sarà ottenuta dalla relazione

$$M_{EQ} = M_N M_{N-1} \dots M_2 M_1$$

Questo aspetto è molto interessante perché fornisce uno strumento estremamente potente per i calcoli parassiali anche quando abbiamo in gioco molte superfici. Un primo esempio, che comunemente si trova nei libri di fisica che trattano i fondamenti dell'ottica, è la *lente sottile*. La lente sottile è composta dalla successione di due superfici rifrattive, la prima convessa e la seconda concava, che confinano fra esse un mezzo con indice di rifrazione maggiore; nel caso di lente sottile, si considera che le due superfici sono poste ad una distanza trascurabile l'una dall'altra. La matrice equivalente di questo sistema è data dalla relazione

$$M_{EQ} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{R_2} \left(\frac{n_2}{n_1} - 1 \right) & \frac{n_2}{n_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{R_1} \left(\frac{n_1}{n_2} - 1 \right) & \frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \left(\frac{n_2}{n_1} - 1 \right) \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) & 1 \end{pmatrix}$$

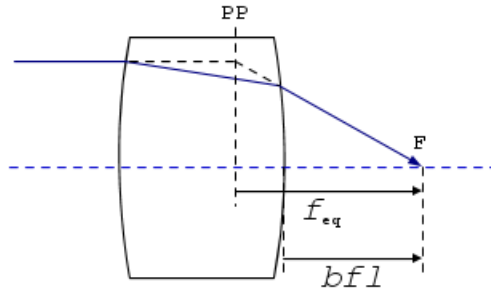
dove l'elemento C della matrice è ancora l'inverso di una focale, anche se questa volta ha il significato di *focale equivalente* del sistema indicata con f_{eq} . L'approssimazione a lente sottile è il modo più semplice per descrivere una lente reale e verrà ampiamente utilizzato più avanti.

Un modello più rigoroso dovrebbe tenere in considerazione anche la distanza fra le due superfici che formano la lente. Con il metodo matriciale, trattare questo modello non è particolarmente complicato:

$$\begin{aligned} M_{EQ} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{R_2} \left(\frac{n_2}{n_1} - 1 \right) & \frac{n_2}{n_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{R_1} \left(\frac{n_1}{n_2} - 1 \right) & \frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 + \frac{d}{R_1} \left(\frac{n_1}{n_2} - 1 \right) & d \frac{n_1}{n_2} \\ \left(\frac{n_2}{n_1} - 1 \right) \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} - \frac{d}{R_1 R_2} \left(1 - \frac{n_1}{n_2} \right) \right) & 1 + \frac{d}{R_2} \left(1 - \frac{n_1}{n_2} \right) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ci soffermiamo ancora un attimo sul concetto di focale equivalente di un sistema ottico introducendo una proprietà della matrice equivalente. Per comprendere appieno il significato di focale equivalente, conviene prendere come riferimento la figura 14.

Figura 14: lente spessa e significato della focale equivalente.



Il piano PP riportato in figura 14 assume il nome di *secondo piano principale* mentre la lunghezza bfl viene comunemente chiamata *back focal length*. Considerando genericamente la matrice equivalente del sistema di figura 14, abbiamo

$$\begin{pmatrix} h_2 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}$$

da cui, aiutandosi anche con la figura 14, si può osservare che

$$\frac{h_1}{f_{eq}} = -\alpha_2 = \frac{h_2}{bfl}$$

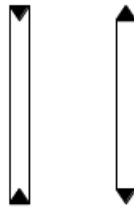
ottenendo facilmente che

$$f_{eq} = -\frac{h_1}{\alpha_2} = -\frac{1}{C}$$

$$bfl = -\frac{h_2}{\alpha_2} = -\frac{h_2 h_1}{h_1 \alpha_2} = -\frac{A}{C}$$

In pratica, la focale equivalente di un sistema è definita come la distanza fra il punto di fuoco F e il secondo piano principale, quando il sistema è illuminato con una sorgente posta all'infinito (fronte piano in ingresso). La *bfl* è invece la distanza fra il punto di fuoco F e l'ultima superficie del sistema. Dal punto di vista matematico possiamo anche trarre la conclusione che, dato un sistema ottico complesso, dal punto di vista di un osservatore che si trova dopo l'ultima superficie questo sistema può essere rappresentato da una *superficie equivalente* con focale f_{eq} e posta dove si trova il secondo piano principale del sistema. Giusto per fare una similitudine, è un procedimento analogo a quando si calcola la resistenza equivalente di una rete di resistori. Sfruttando questo principio di superficie equivalente, negli anni mi sono trovato bene definendo una simbologia che possa tornare utile nella stesura di disegni ottici equivalenti. Ho quindi introdotto i simboli riportati in figura 15 per descrivere superfici positive e negative.

Figura 15: simbolo che rappresenta una superficie positiva (a sinistra) ed una superficie negativa (a destra).



Con analogo ragionamento si può trovare il modello equivalente del sistema visto dalla parte della sorgente, portando alla definizione del *primo piano principale* e del concetto di *ffl* (*front focal length*). Tuttavia, per gli scopi prefissati nei primi articoli questo aspetto non è fondamentale e lo trascuriamo. Ritorneremo su questo punto più avanti, quando parleremo di oculari.

Conclusioni

In questo primo articolo, dopo un rapido richiamo di alcuni concetti fondamentali dell'ottica ondulatoria e geometrica, abbiamo ampiamente analizzato il metodo delle matrici parassiali. La potenzialità di tale metodo risiede nel fatto che fornisce un modo semplice di calcolare, applicando l'approssimazione parassiale, l'altezza e l'inclinazione che uno specifico raggio assume mentre si propaga nel sistema e incontra le varie superfici. Come vedremo più avanti, queste informazioni sono necessarie per stimare le aberrazioni che il sistema presenta. Con il calcolo della matrice equivalente è anche semplice calcolare alcuni parametri globali del sistema tra cui la focale equivalente f_{eq} o la back focal length *bfl*. Inoltre, la natura matriciale di questo metodo lo rende particolarmente adatto ad essere implementato in appositi script scritti con i più comuni linguaggi di programmazione.

Sfruttando i concetti esposti fino a qui, nel prossimo articolo inizieremo ad effettuare l'analisi parassiale delle varie configurazioni di telescopi esistenti, calcolando la loro focale equivalente ed iniziando ad individuare alcuni aspetti importanti nel loro progetto.

Bibliografia

- [1] M. Born, E. Wolf, "Principles of optics - 7th edition", Cambridge University Press, 1999.
- [2] E. Hetch, "Optics - 4th edition", Pearson Edition, 2002.
- [3] F.L. Pedrotti, L.M. Pedrotti, L.S. Pedrotti, "Introduction to Optics - 3rd edition", Pearson Edition, 2006.
- [4] A. Gerrard, J. M. Burch, Introduction to Matrix Methods in Optics, Dover, 1994.

Estratto da ["http://www.electroyou.it/mediawiki/index.php?title=UsersPages:Enchamade:telescopi-i-richiami-di-ottica-geometrica-e-parassiale"](http://www.electroyou.it/mediawiki/index.php?title=UsersPages:Enchamade:telescopi-i-richiami-di-ottica-geometrica-e-parassiale)