



EnChamade

TELESCOPI: II – FORMAZIONE DELLE IMMAGINI E ASPETTI GENERALI SUI SISTEMI OTTICI

10 April 2016

Abstract

In questo secondo articolo tratteremo alcuni aspetti generali che riguardano i sistemi ottici complessi. Inizieremo con il richiamare brevemente alcuni concetti sulla teoria della formazione delle immagini, fornendo alcuni esempi di applicazione utili a comprendere questo argomento. Discuteremo poi alcune definizioni e parametri che vengono comunemente utilizzati per definire e descrivere i sistemi ottici complessi, tra cui il concetto di stop, di pupilla d'ingresso e di uscita, di campo di vista, di sistema parassiale equivalente e di rapporto focale.

UNA NOTA:

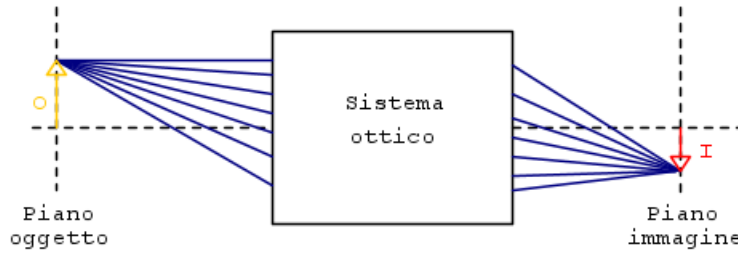
I richiami sulla teoria della formazione delle immagini sono stati inseriti allo scopo di dare al lettore una solida base che permetta di comprendere a fondo il processo di determinazione della pupilla d'ingresso (e di uscita se necessaria) in un sistema ottico complesso. Tuttavia, nella trattazione dei telescopi non vi sarà mai bisogno di questi concetti perché, per loro natura, la pupilla d'ingresso coinciderà quasi sempre con il primo elemento ottico. E' dunque possibile tralasciare la prima sezione dell'articolo senza pregiudicare la comprensione degli argomenti successivi.

La formazione delle immagini

Da qui in poi tratteremo prevalentemente sistemi ottici complessi e quindi è utile approfondire ancora un po' il loro comportamento. Anche se non sarebbe strettamente necessario per comprendere il funzionamento della maggior parte dei telescopi, è opportuno analizzare comunque come un sistema ottico forma un'immagine di un oggetto. Infatti, in futuro potrà succedere che per determinare alcune caratteristiche importanti di un sistema ottico, quali ad esempio la **pupilla d'ingresso** o la **pupilla d'uscita**, sarà necessario ricorrere al calcolo delle immagini formate attraverso più elementi ottici.

Piano oggetto, piano immagine e loro relazione

In generale, un sistema ottico ha lo scopo di raccogliere la luce proveniente da un oggetto O e realizzare un'immagine I , eventualmente riscalata ed invertita, di esso: un tale sistema viene comunemente detto **sistema di imaging** (figura 1).

Figura 1: scopo principale di un sistema ottico realizzato per applicazioni imaging.

Come si può evincere dalla figura 1, tipicamente, in campo ottico, per oggetto e per immagine non s'intende un solido in tre dimensioni, ma un piano. Questo perché, da un punto di vista rigoroso, un **sistema ottico ideale** per sua natura riproduce su uno specifico piano immagine solo l'immagine, eventualmente invertita e riscalata, di un solo specifico piano oggetto. Cambiando posizione del piano oggetto, cambia anche la posizione del piano dove viene formata la sua immagine. In generale, quindi, dato un sistema ottico ideale, questo coniuga in modo univoco una famiglia di piani oggetto ad una famiglia di piani immagine. Un sistema ottico con queste caratteristiche è detto sistema **stigmatico**. Un sistema reale, al contrario, produce un'immagine dell'oggetto che non è la copia esatta di esso ma una copia che risulta degradata per effetto delle **aberrazioni ottiche** introdotte dai vari elementi che compongono il sistema ottico e dalla diffrazione. Mentre gli effetti di diffrazione non sono eliminabili, molto si può fare per quanto riguarda le aberrazioni ottiche. In generale, quindi, il gioco del progettista è quello di sviluppare il progetto cercando di minimizzare il più possibile il degrado indotto dalle aberrazioni, rendendo il sistema ottico più stigmatico possibile. Nonostante la presenza di questi effetti di degrado, molte informazioni possono essere ottenute analizzando il sistema in regime di ottica parassiale che, per natura delle approssimazioni che vengono assunte nell'analisi, descrive il nostro sistema reale con un modello di sistema stigmatico.

L'ottica parassiale fornisce tutti gli strumenti utili a stimare in modo soddisfacente la posizione dell'immagine ed anche il suo fattore di scala M a partire dalla posizione del piano oggetto e la conoscenza della distanza focale f di ogni elemento ottico che compone il sistema in analisi. Per esempio, nel corso del precedente articolo avevamo già ricavato la relazione che lega fra loro la posizione del piano oggetto e del piano immagine per una superficie sferica riflettente [1]. Definito quindi con s_o e s_i la distanza dalla superficie riflettente del piano oggetto ed immagine rispettivamente, avevamo trovato che

$$\frac{1}{s_i} + \frac{1}{s_o} = \frac{2}{R} = -\frac{1}{f}$$

dove R è il raggio di curvatura della superficie riflettente. Con considerazioni simili a quelle che si erano fatte per ricavare questa relazione, si potrebbe inoltre dimostrare che il fattore di scala dell'immagine M è dato dalla relazione [2]

$$M = -\frac{s_i}{s_o}$$

La superficie sferica riflettente viene comunemente chiamata **specchio sferico**.

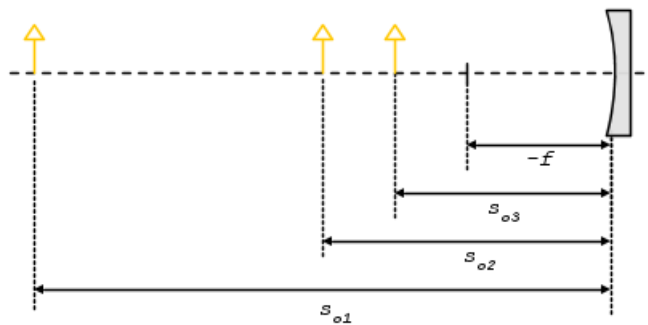
Esempio 1: Si vuole calcolare la posizione e fattore di scala dell'immagine formata attraverso una superficie concava con raggio di curvatura $R = 1000\text{mm}$ degli oggetti posti alla distanza di $2R$, R e $R/2$.

Applicando il sistema di riferimento descritto nello scorso articolo, $R = -1000\text{mm}$ perché la superficie è concava. La posizione degli oggetti deve essere a sinistra della superficie e quindi s_o deve essere negativa. Avremo quindi che

$$\begin{aligned}s_{o1} &= 2R = -4f = -2000\text{ mm} \\ s_{o2} &= R = -2f = -1000\text{ mm} \\ s_{o3} &= 3/4R = -3/2f = -750\text{ mm}\end{aligned}$$

dove si è utilizzata anche la definizione di focale f di una superficie riflettente data nel precedente articolo [1]. In figura 2 è riportata la situazione in esame.

Figura 2: posizioni degli oggetti rispetto alla superficie sferica riflettente dell'esempio 1.



Partendo dalla formula trovata per la superficie riflettente, dopo qualche passaggio algebrico abbiamo

$$s_i = \frac{Rs_o}{2s_o - R}$$

trovando

$$\begin{aligned}s_{i1} &= 2/3R = -666.66\text{ mm} \\ s_{i2} &= R = -1000\text{ mm} \\ s_{i3} &= 3/2R = -1500\text{ mm}\end{aligned}$$

Si noti che tutte le immagini sono a sinistra dello specchio perché le distanze trovate sono negative. Questo è ragionevole dato che la superficie, che da questo momento in poi chiameremo specchio sferico, lavora in riflessione. I fattori di scala sono:

$$\begin{aligned}M_1 &= -0.33 \\M_2 &= -1 \\M_3 &= -2\end{aligned}$$

dove il segno negativo sta ad indicare che l'immagine è invertita. Nel primo caso, l'immagine è più piccola delle dimensioni dell'oggetto. Nel secondo caso l'immagine ha le stesse dimensioni mentre nell'ultimo caso l'immagine è ingrandita.

Similarmente, si può trovare [2] che per una lente di focale f descritta tramite il modello di lente sottile, i piani immagine e i piani oggetto sono collegati dalla relazione

$$\frac{1}{s_i} - \frac{1}{s_o} = \frac{1}{f}$$

e l'ingrandimento M dell'immagine è dato da

$$M = \frac{s_i}{s_o}$$

Esempio 2: Si vuole calcolare la posizione dell'immagine formata attraverso una lente sottile di focale $f = 500\text{mm}$ degli oggetti posti alla distanza di $4f$, $2f$ e $3/2f$.

Tenendo sempre il sistema di riferimento definito nel precedente articolo, gli oggetti sono posti a sinistra della lente e quindi le distanze devono essere negative. Abbiamo quindi

$$\begin{aligned}s_{o1} &= -4f = -2000\text{ mm} \\s_{o2} &= -2f = -1000\text{ mm} \\s_{o3} &= -3/2f = -750\text{ mm}\end{aligned}$$

e dopo qualche passaggio algebrico, troviamo che

$$s_i = \frac{f s_o}{s_o + f}$$

ottenendo

$$\begin{aligned}s_{i1} &= 4/3f = 666.66\text{ mm} \\s_{i2} &= 2f = 1000\text{ mm} \\s_{i3} &= 3f = 1500\text{ mm}\end{aligned}$$

Questa volta tutte le immagini si trovano a destra della lente e questo è ovvio perché la lente lavora in trasmissione e quindi forma l'immagine di un oggetto quando la luce passa attraverso essa. I fattori di scala saranno

$$\begin{aligned}M_1 &= -0.33 \\M_2 &= -1 \\M_3 &= -2\end{aligned}$$

che sono identici a quelli trovati nell'esempio precedente. Si può concludere che, a meno del segno su s_i che identifica dove l'immagine si formerà, a parità di focale, lo specchio sferico e la lente si comportano nello stesso identico modo.

Le immagini che abbiamo considerato fino ad ora sono dette **immagini reali** perché il sistema ottico crea fisicamente un'immagine dell'oggetto. In pratica, immaginando che il piano oggetto sia formato da sorgenti puntiformi elementari, la parte dei raggi uscenti da una generica sorgente puntiforme che viene raccolta dal sistema ottico è direzionata verso uno specifico punto del piano immagine, formando in esso l'immagine della sorgente puntiforme. Questo è il principio che viene utilizzato nei proiettori, dove l'obiettivo può modificare la propria focale per coniugare il piano della diapositiva al piano immagine rappresentato dallo schermo o dal muro dove comparirà proprio l'immagine della diapositiva, eventualmente riscalata.

Esiste però anche la possibilità di creare un'**immagine virtuale**, quando l'oggetto è posto ad una distanza inferiore alla focale dell'elemento ottico.

Esempio 3: Si vuole calcolare la posizione dell'immagine formata attraverso una lente sottile di focale $f = 500\text{mm}$ di un oggetto posto alla distanza $f/2$ dalla lente.

Applicando gli stessi ragionamenti fatti nel precedente esempio si trova che

$$s_i = -f = -500\text{ mm}$$

e

$$M = 2$$

Stranamente, in questo caso l'immagine si forma a sinistra della lente e questo potrebbe sconvolgere molti di voi. In realtà, il significato fisico di questo risultato è che il cono di raggi che esce dalla lente è lo stesso che si avrebbe se non ci fosse la lente e l'oggetto fosse posizionato dove c'è la sua immagine virtuale e ingrandito M volte. Fisicamente però non esiste la sua immagine.

Dagli esempi precedenti si può estrarre la seguente regola generale: Dato un elemento ottico di focale f positiva, abbiamo

1. Se l'oggetto è più distante di $2f$ dall'elemento ottico, l'immagine sarà invece ad una distanza $< 2f$ e risulterà sempre invertita e rimpicciolita;
2. Se l'oggetto è a $2f$ dall'elemento ottico, l'immagine sarà reale, anch'essa a $2f$ e risulterà invertita ma con fattore di scala 1;
3. Se l'oggetto è più vicino di $2f$ dall'elemento ottico ma più lontano di f , l'immagine sarà reale ad una distanza $> 2f$ e risulterà sempre invertita ed ingrandita;
4. Se l'oggetto è più vicino di f dall'elemento ottico, l'immagine sarà virtuale e risulterà sempre non invertita ed ingrandita.

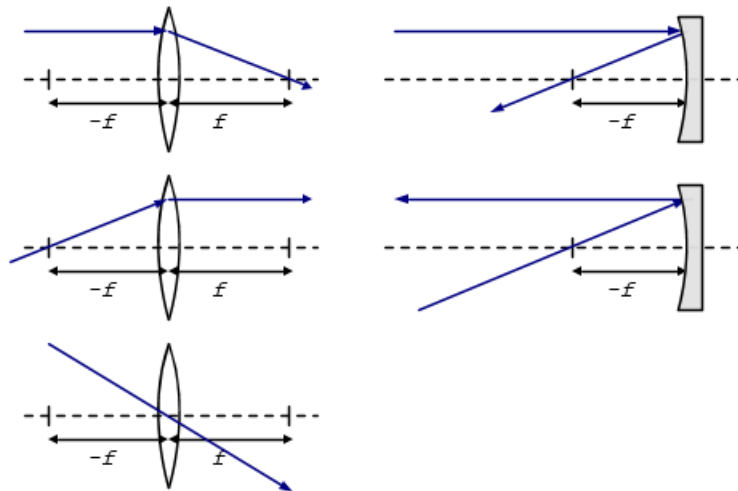
Se l'elemento ottico è negativo, si può dimostrare che l'immagine prodotta sarà sempre virtuale, non invertita e rimpicciolita [2].

Nel caso il sistema ottico sia formato da più elementi, l'analisi della formazione delle immagini può essere eseguita applicando iterativamente le equazioni viste fino a questo punto, prendendo come oggetto per l'elemento ottico successivo l'immagine formata dal elemento ottico precedente.

Metodo grafico per l'analisi della formazione delle immagini

Oltre al metodo più rigoroso e matematico, esiste un metodo grafico che permette la stima sia della posizione che del fattore di scala di un'immagine. L'idea di questo metodo si basa sul tracciare alcuni raggi "furbi" il cui percorso può essere determinato senza fare alcun calcolo. Considerando per il momento solo superfici con focale positiva, il primo raggio interessante è il raggio parallelo all'asse che sappiamo venire direzionato verso il punto di fuoco quando esso incontra la superficie ottica. Vedendo al contrario questo comportamento, un raggio che incrocia l'asse ottico ad una distanza pari alla focale della superficie ottica viene reso parallelo all'asse ottico dopo quest'ultima. Esiste poi un terzo raggio molto interessante quando si stanno trattando superfici rifrattive. Si può dimostrare che, in approssimazione parassiale, il raggio che passa per il centro della superficie rifrattiva non subisce alcuna deviazione. In figura 3 sono riportati tutti i casi sia per una superficie riflettente a focale positiva che per una superficie rifrattiva a focale positiva.

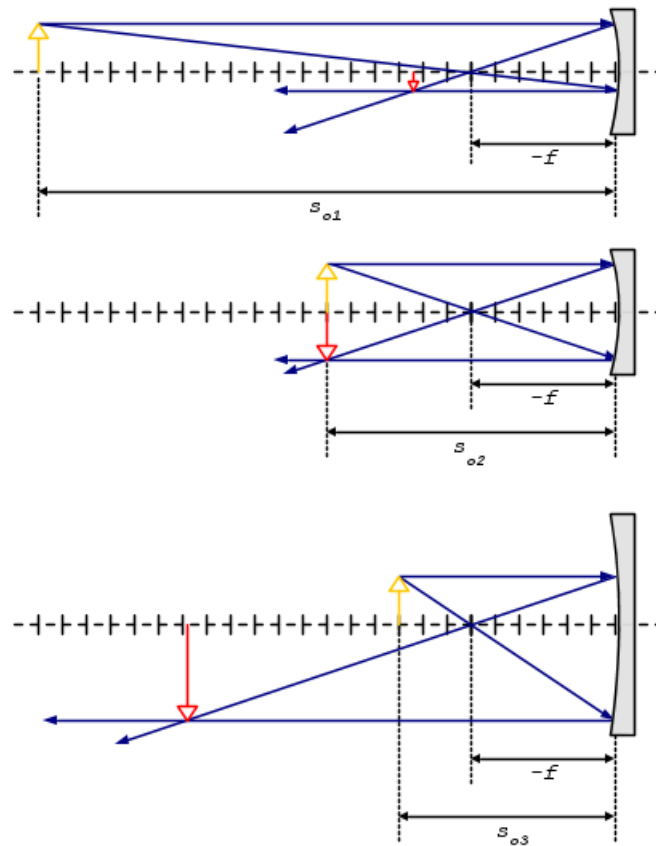
Figura 3: i raggi "furbi" che sono utilizzati nella stima grafica della formazione delle immagini ottenuta con elementi positivi rifrattivi (a sinistra) e riflessivi (a destra).



Dato un oggetto, che di norma indicheremo con una freccia gialla, il metodo consiste nel tracciare il percorso di due raggi "furbi" che partono dal punto dell'oggetto più lontano dall'asse ottico, detto **punto marginale**, e trovare il luogo in cui questi due raggi si reincontrano: questo punto sarà l'immagine del punto marginale che deve essere contenuto nel piano immagine.

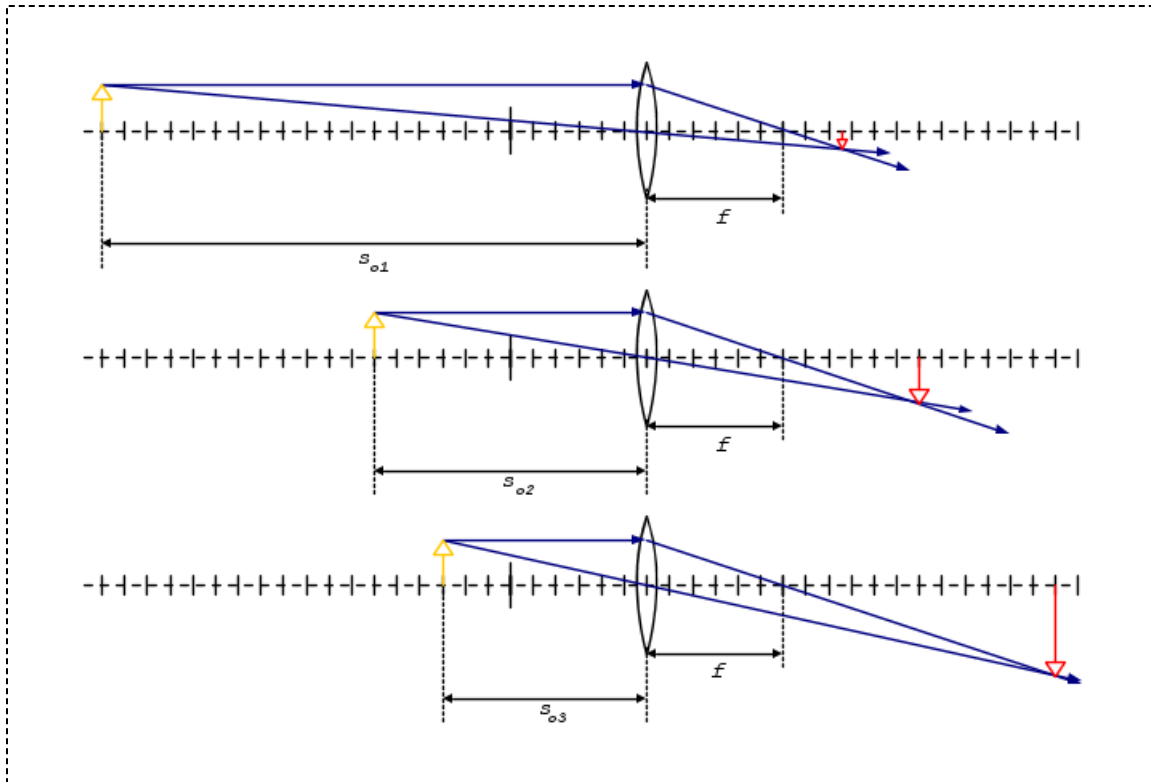
Esempio 4: Si stimi con il metodo grafico la posizione ed il fattore di scala per i casi riportati nell'esempio 1 e dell'esempio 2.

Utilizzando le regole del metodo grafico, per i casi dell'esempio 1 si ottengono le stime di figura 4.

Figura 4: stima grafica delle immagini dei casi trattati nell'esempio 1.

Per i casi nell'esempio 2 si ottengono le stime riportate in figura 5.

Figura 5: stima grafica delle immagini dei casi trattati nell'esempio 2.

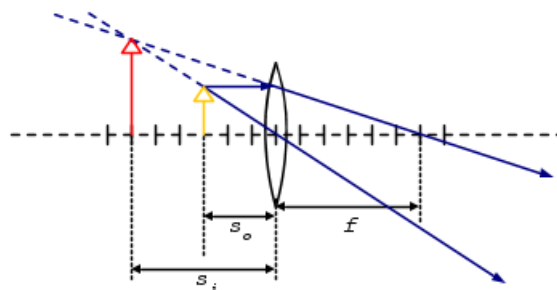


Nel caso di immagini virtuali, poiché non esiste un punto in cui i due raggi convergono fisicamente, la stima della posizione dell'immagine e dell'ingrandimento avviene andando a cercare il punto di incontro dei prolungamenti all'indietro dei raggi tracciati.

Esempio 5: Si stimi con il metodo grafico la posizione ed il fattore di scala per il caso dell'esempio 3.

Applicando il metodo grafico si ottiene la stima di figura 6.

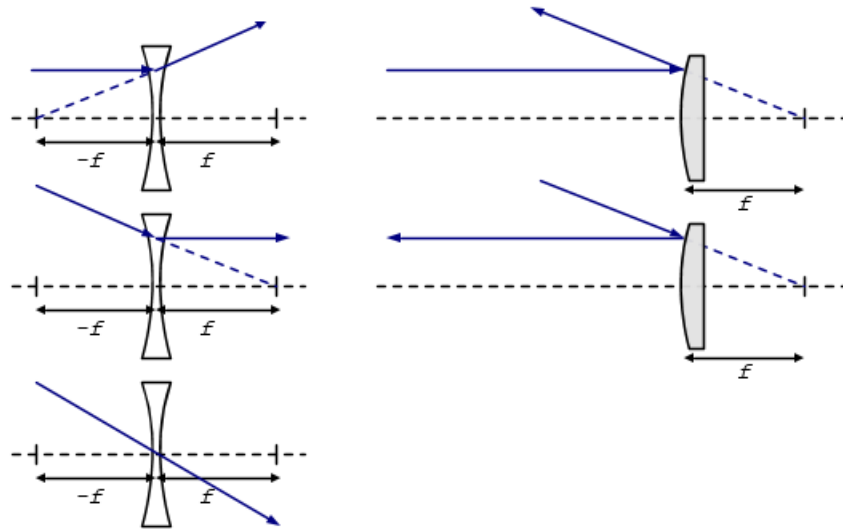
Figura 6: stima grafica dell'immagine nel caso trattato nell'esempio 3.



Nel caso di elementi con focale negativa, il metodo grafico funziona esattamente allo stesso modo. Questa volta però occorre tenere presente che un raggio parallelo viene deviato dalla superficie come se provenisse dal punto di fuoco. Analogamente, un raggio diretto verso il punto di fuoco

della superficie, viene reso parallelo. In figura 7 sono riportati i raggi furbi da utilizzare quando si sta lavorando con un elemento negativo.

Figura 7: i raggi "furbi" che sono utilizzati nella stima grafica della formazione delle immagini ottenuta con elementi negativi rifrattivi (a sinistra) e riflessivi (a destra).



Esempio 6: Un oggetto è posto ad una distanza di 1000mm da uno specchio convesso con raggio di curvatura $R = 1000\text{mm}$. Si ricavi la posizione dell'immagine e l'ingrandimento sia per stima grafica che per via matematica.

Applicando la formula calcolata prima abbiamo

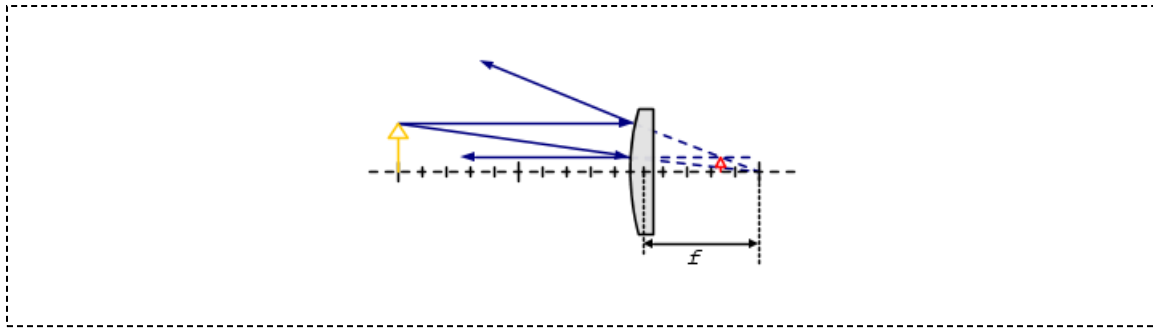
$$s_i = \frac{Rs_o}{2s_o - R} = \frac{1000 \cdot (-1000)}{-2000 - 1000} = 333\text{mm}$$

e il fattore di scala è

$$M = -\frac{s_i}{s_o} = -\frac{333}{-1000} = 0.33$$

Con il metodo grafico si ottiene invece la stima riportata in figura 8.

Figura 8: stima grafica dell'immagine.



Definizioni ed aspetti generali dei sistemi ottici

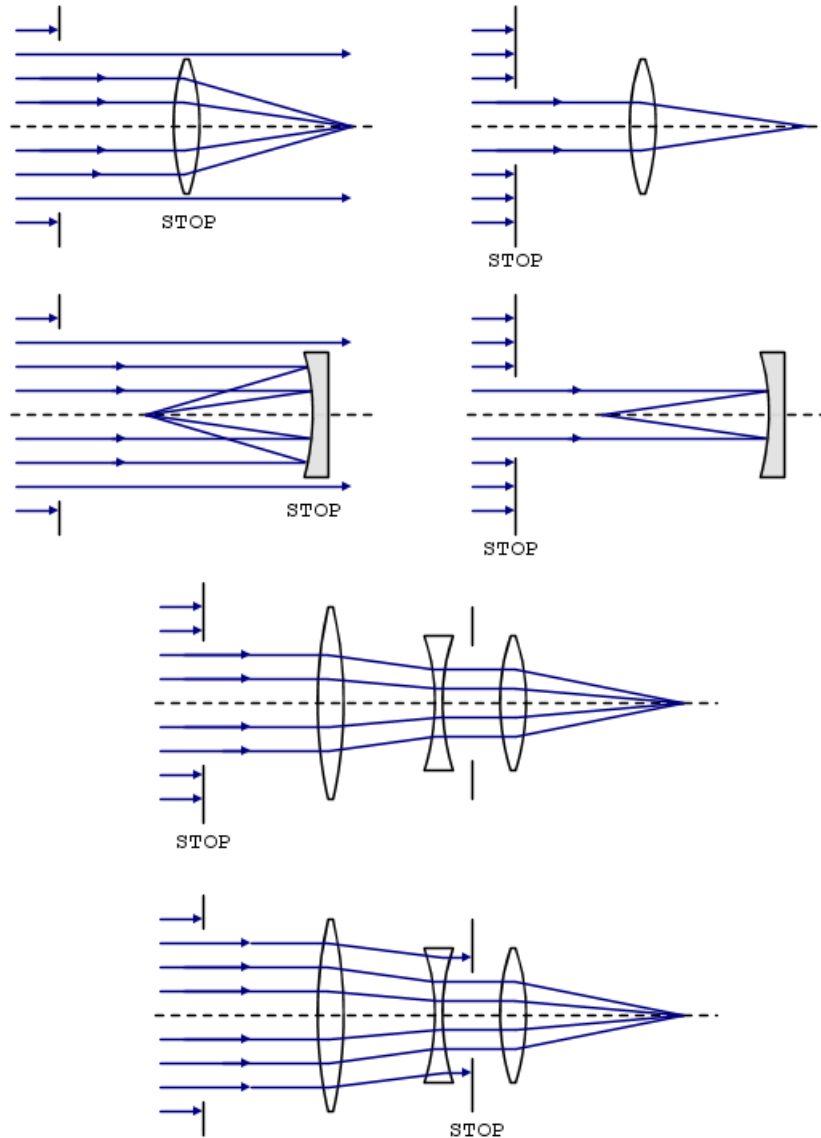
Nel primo articolo della collana *Telescopi* abbiamo visto come sia semplice, attraverso l'approccio matriciale, operare l'analisi parassiale di un sistema ottico complesso formato da molte superfici. Tuttavia, prima di essere pronti ad affrontare l'analisi parassiale delle principali configurazioni di telescopi, è opportuno introdurre alcuni aspetti ed alcune importanti definizioni che serviranno a riassumere e classificare opportunamente le caratteristiche e le prestazioni dei telescopi che analizzeremo.

Diaframmi, stop e pupille

E' molto strano, ma fra i componenti ottici più importanti in un sistema ottico ci sono i *diaframmi*. Nella nostra trattazione, un diaframma è in generale un'apertura praticata su una superficie totalmente assorbente (cioè non riflettente né trasmittente) che limita la dimensione del cono di raggi che dal piano oggetto si propagano, attraverso il sistema ottico, verso il piano immagine. Da notare che, attribuendo un senso più ampio al termine, un diaframma potrebbe anche essere costituito da uno specchio o da una lente che, avendo di fatto un diametro finito, limita naturalmente il cono di raggi raccolto.

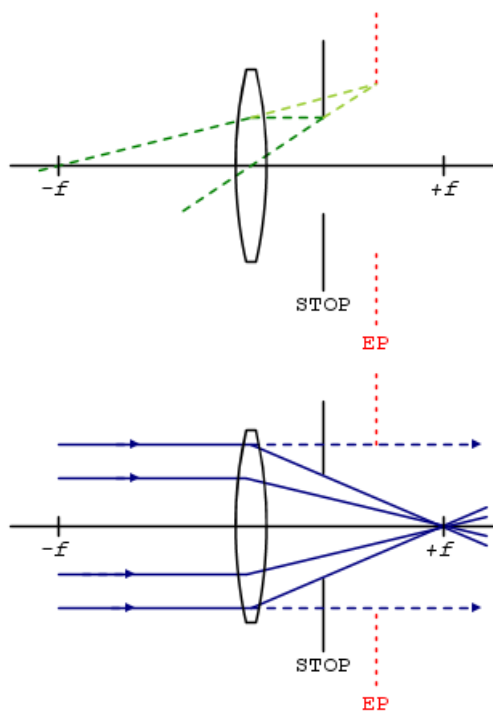
Indicheremo con il termine *stop* o *diaframma d'apertura* il diaframma che maggiormente limita la dimensione del cono di raggi che dal piano oggetto arriva al piano immagine. In figura 9 sono riportati alcuni sistemi ottici in cui è indicato l'elemento che funge da stop.

Figura 9: Esempi di stop su sistemi ottici.



Nei telescopi, di norma, lo stop è dato dal diametro del primo elemento ottico o da un diaframma posto davanti ad esso, come illustrato nei primi cinque esempi di figura 9. In questo specifico caso lo stop corrisponde fisicamente anche alla *pupilla d'ingresso* del sistema ottico, ossia l'apertura entro cui tutti i raggi che arrivano al piano immagine devono obbligatoriamente passare. Al contrario, nel caso in cui lo stop si trovi dopo il primo elemento ottico (ultimo caso di figura 9), la pupilla d'ingresso è data dall'immagine di quest'ultimo ottenuta attraverso gli elementi ottici che lo precedono. La pupilla d'ingresso non è quindi un'apertura reale ma virtuale, cioè non esiste fisicamente. Un esempio di come ricavare la pupilla d'ingresso in questo secondo caso è riportato in figura 10.

Figura 10: Esempio di determinazione della pupilla d'ingresso nel caso di stop inserito all'interno di un sistema complesso.



Con analogo ragionamento, si può definire anche la *pupilla di uscita*, ossia l'apertura attraverso la quale passano tutti i raggi che escono dal nostro sistema ottico. Anch'essa può coincidere con lo stop, se quest'ultimo è proprio l'ultimo elemento del sistema, o essere virtuale, nel caso lo stop si trovi dentro il sistema; in quest'ultimo caso, la pupilla d'uscita si trova formando l'immagine attraverso tutti gli elementi successivi allo stop.

La pupilla d'ingresso è uno dei parametri del sistema ottico che determina la quantità di energia luminosa raccolta dal sistema ottico. Nel caso dei telescopi, i quali hanno lo scopo di osservare sorgenti lontane molto deboli, le pupille d'ingresso devono essere grandi. La pupilla d'uscita ha invece un ruolo più articolato. Conoscere la dimensione e la posizione della pupilla d'uscita è necessario per accoppiare in cascata in modo soddisfacente due sistemi ottici. Infatti, per avere il massimo trasferimento di energia, la pupilla d'ingresso del secondo strumento deve coincidere con la pupilla d'uscita del primo strumento. Un semplice esempio di questo meccanismo si ha quando un osservatore guarda attraverso un oculare di un telescopio. Se la pupilla d'uscita del sistema telescopio/oculare è maggiore della pupilla dell'occhio dell'osservatore, si ha perdita di intensità luminosa e l'immagine risulterà meno luminosa.

La posizione e la dimensione dello stop, oltre che a condizionare la posizione e la dimensione delle pupille d'ingresso e d'uscita, ricopre un ruolo importante anche nel controllo delle aberrazioni ottiche. Come vedremo più avanti, ad esempio, la scelta della posizione dello stop può portare addirittura all'eliminazione delle aberrazioni di coma e astigmatismo.

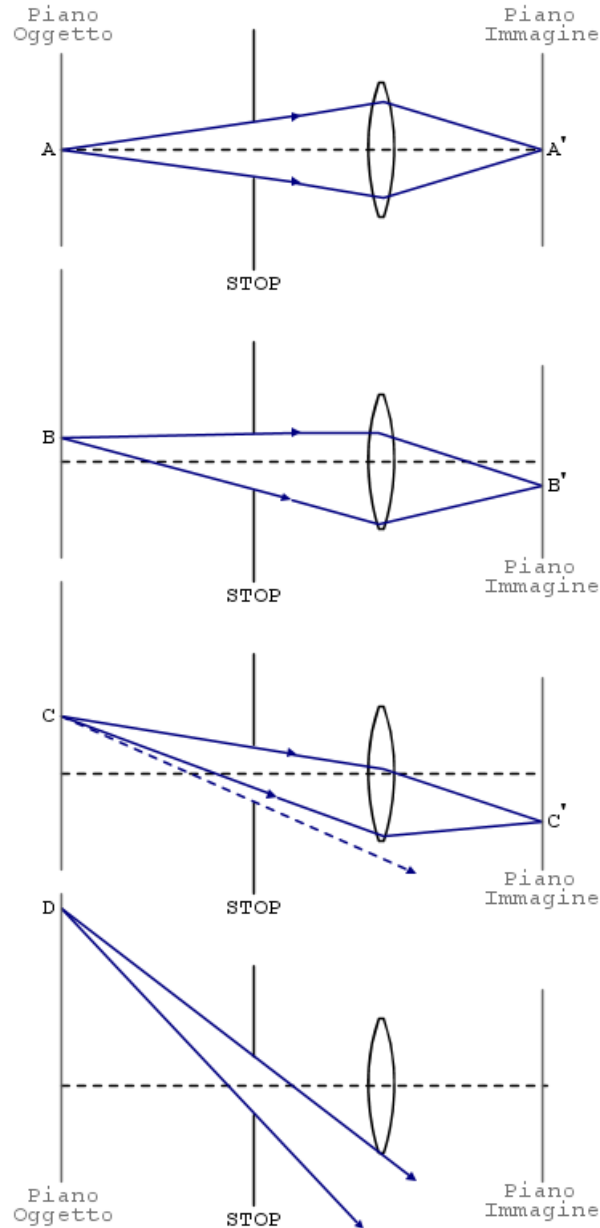
Diaframmi di campo, vignetting e campo di vista

Oltre al concetto di stop che è legato alla quantità di energia raccolta, è molto importante conoscere anche la porzione del piano oggetto che effettivamente viene riprodotta nel piano immagine dal

nostro sistema ottico.

Giusto per capire il concetto che vogliamo esporre, immaginate di guardare attraverso una finestra che si trova ad alcuni metri da voi. La dimensione della finestra determina la porzione del paesaggio esterno che potete vedere e, per aumentare la porzione di paesaggio visibile, occorre avvicinarsi ad essa. Nei sistemi ottici si ha un comportamento simile dove la funzione di limitazione della porzione del piano oggetto che viene processata è data dal diaframma di campo. Supponiamo di avere un sistema ottico composto da un diaframma posto davanti a una lente come mostrato in figura 11 e di voler analizzare le immagini dei punti del piano oggetto A, B, C e D realizzate da questo sistema.

Figura 11: Concetto di diaframma di campo e di vignetting.



Nella figura 11 è immediato verificare come il diaframma posto davanti la lente sia lo stop del sistema e coincida anche con la pupilla d'ingresso. Nel caso del punto A e del punto B, il sistema riproduce le immagini del piano immagine raccogliendo il massimo cono di raggi compatibile con la pupilla d'ingresso. Nel caso del punto C, invece, la situazione è un po' diversa. Il sistema forma ancora l'immagine di questo punto ma, a causa della limitata dimensione della lente, esso utilizza solo una parte del cono di luce raccolto dalla pupilla d'ingresso rendendo quindi l'immagine meno luminosa. Questo fenomeno si chiama *vignetting* ed è il responsabile del calo di luminosità che solitamente si nota ai bordi di un'immagine ripresa con una macchina fotografica. Nel caso del punto D, addirittura, il cono di luce raccolto dalla pupilla d'ingresso sfiora la lente ma non viene raccolto da essa: in questo caso non abbiamo la formazione di un'immagine e, in generale, per

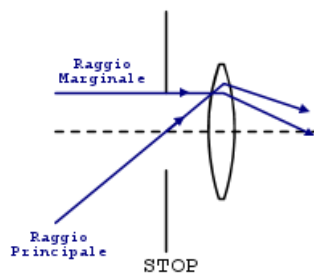
tutti i punti con distanza maggiore di D dall'asse ottico, il sistema non formerà alcuna immagine. L'elemento che limita il campo di vista è la lente ed essa è l'elemento che funge da diaframma di campo. La distanza di D dall'asse ottico determina il *campo di vista* del sistema. Esiste anche la possibilità di definire il campo di vista tramite il doppio dell'angolo β sotteso fra il punto D e il centro della pupilla d'ingresso: in questo caso si preferisce parlare di *campo di vista angolare* e risulta estremamente conveniente quando si parla di telescopi perché il piano oggetto è collocato all'infinito. Va comunque sottolineato che la corretta linea progettuale per uno strumento ottico prevede che l'elemento che funge da stop di campo sia il detector utilizzato per raccogliere l'immagine (un CCD, un CMOS o una pellicola fotografica) e non un elemento ottico sparso per il sistema: in questo modo si ottimizza l'utilizzo dell'area sensibile del detector.

Alcune volte si preferisce definire il campo di vista considerando il vignetting introdotto nell'immagine. Si possono trovare quindi definizioni di campo di vista che considerano solo la parte del piano oggetto che viene riprodotta con un vignetting non superiore al 50% o, nei casi di sistemi ottici ad altissime prestazioni, la parte del piano oggetto che viene riprodotta senza effetti di vignetting. E' quindi compito del progettista decidere la quantità di vignetting ammesso nel campo di vista, raggiungendo dei compromessi. In generale, si può dimostrare che, a parità di pupilla d'ingresso e campo di vista, la diminuzione del vignetting nel campo di vista provoca un aumento di massa e di costo del sistema.

Il raggio principale e il raggio marginale

Per effettuare un'analisi parassiale consistente di un sistema ottico complesso è di norma sufficiente considerare solo alcune famiglie di raggi che hanno delle proprietà di simmetria rispetto alle pupille d'ingresso e/o d'uscita particolari. Nel caso dei telescopi, si può ottenere una buona stima delle grandezze del sistema analizzando, mediante l'approccio matriciale, il percorso di due soli raggi chiamati rispettivamente *raggio principale* e *raggio marginale* (figura 12).

Figura 12: Il raggio principale e quello marginale.



Si definisce raggio principale (o, dall'inglese, *chief ray*) il raggio proveniente dal bordo del campo di vista che attraversa esattamente al centro la pupilla d'ingresso (e quindi anche lo stop e la pupilla d'uscita); per convenzione, si considera il raggio che attraversa l'asse ottico dal basso verso l'alto. Così definito, questo raggio porta informazioni sul campo di vista ed è in qualche modo il testimone di come i raggi fuori asse vengono processati dal sistema ottico. Non a caso quindi, come vedremo più avanti, conoscere il tracciamento parassiale di questo raggio serve a stimare la quantità delle

aberrazioni fuori asse, come ad esempio il coma e l'astigmatismo. Dato quindi un sistema ottico, tramite il formalismo matriciale è possibile calcolare per ogni superficie l'angolo e l'altezza che il raggio principale assume. Tali grandezze verranno indicate con sopra una barra, seguendo la convenzione usata in [3]. Ad esempio, per la superficie i -esima, il calcolo dell'angolo e dell'altezza sarà dato dalla relazione

$$\begin{pmatrix} \bar{h}_i' \\ \bar{\alpha}_i' \end{pmatrix} = \mathbf{M}_i \begin{pmatrix} \bar{h}_i \\ \bar{\alpha}_i \end{pmatrix}$$

dove $\mathbf{M}_i$ è la matrice parassiale dell' i -esima superficie. Il tracciamento del raggio principale inizierà dalla pupilla d'ingresso del sistema dove, considerato β il semiangolo che definisce il campo di vista, per definizione il vettore parassiale del raggio è

$$\bar{\mathbf{v}}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{\beta} \end{pmatrix}$$

Da notare che nella nostra trattazione indicheremo sempre la pupilla d'ingresso del sistema con il pedice 0.

Il raggio marginale è un raggio parallelo all'asse ottico che passa nel bordo della pupilla d'ingresso (e quindi anche dello stop e della pupilla d'uscita); per convenzione, si assume il raggio marginale sopra l'asse ottico. Tale raggio fornisce informazioni sulla massima apertura del sistema, parametro fondamentale per la stima non solo dell'*aberrazione sferica* ma anche delle *aberrazioni fuori asse*. I vettori parassiali calcolati per ogni superficie per il raggio marginale vengono indicati senza barra, seguendo la convenzione usata in [3]. Anche in questo caso, il tracciamento del raggio marginale inizierà dalla pupilla d'ingresso del sistema dove, sempre per definizione, il vettore parassiale del raggio è

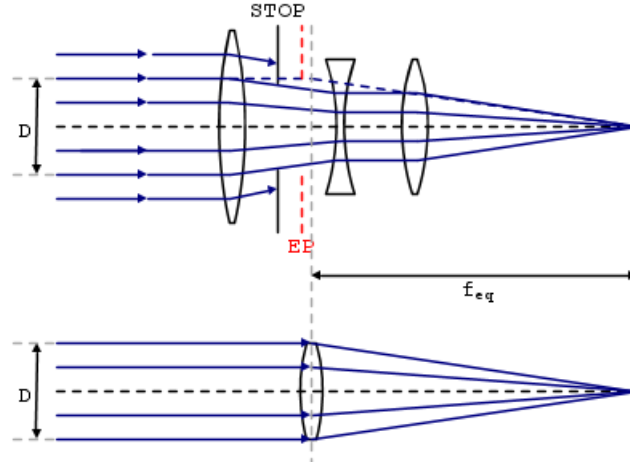
$$\mathbf{v}_0 = \begin{pmatrix} \frac{D}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

dove con D indichiamo il diametro della pupilla d'ingresso.

Sistema equivalente parassiale e rapporto focale

Nel primo articolo della collana *Telescopi* abbiamo visto come sia semplice calcolare tramite il metodo delle matrici parassiali la focale equivalente di un sistema ottico composto da molti elementi. Abbiamo poi attribuito un significato fisico al concetto di focale equivalente, definendola come la focale che dovrebbe avere una superficie posta nella posizione del secondo piano principale per essere equivalente, da un punto di vista parassiale, al sistema ottico complesso. Ora, sfruttando il concetto di pupilla d'ingresso, possiamo espandere ulteriormente il concetto di sistema equivalente. Definendo con D il diametro della pupilla d'ingresso e considerando che quest'ultima è legata alla quantità di luce raccolta dal sistema è ragionevole pensare che, nella descrizione equivalente del sistema complesso, la dimensione della superficie di focale equivalente sia pari alla dimensione della pupilla d'ingresso. In pratica, un sistema parassiale equivalente è definito dalla coppia di parametri (D, f_{eq}) : questo concetto è chiaramente visualizzato in figura 13.

Figura 13: Sistema parassiale equivalente.



Un parametro molto interessante che può essere facilmente derivato da questa rappresentazione equivalente è chiamato *rapporto focale* o *F-numero*. Esso è indicato con la simbologia $f/\#$ ed è definito come

$$f/\# = \frac{f_{eq}}{D}$$

e risulta essere un parametro molto importante sotto vari aspetti. Chi si occupa di fotografia, ad esempio, sa bene che questo parametro determina la durata dell'esposizione. In pratica, fissata la quantità totale di energia luminosa che si vuole raccogliere, un sistema con rapporto focale piccolo impiega meno tempo a raccoglierla rispetto ad un

sistema con rapporto focale grande; proprio per questo motivo si dice che un sistema con rapporto focale minore è *più luminoso* o *più veloce*. Più specificamente, la quantità di energia raccolta dal sistema è proporzionale all'inverso del quadrato di $f/\#$. Per rendersene conto, consideriamo il modello parassiale equivalente (D, f_{eq}) di un sistema ottico avente un campo di vista α . Considerando una simmetria circolare, la quantità di energia su unità d'area nel piano immagine è proporzionale all'area della pupilla d'ingresso (e quindi proporzionale al quadrato di D) e inversamente proporzionale all'area occupata dall'immagine di tutto il campo di vista:

$$I_{im} \propto \frac{\pi D^2}{A_{im}} = \frac{\pi D^2}{\pi (\tan \alpha f_{eq})^2} = \frac{1}{\tan^2 \alpha} \frac{1}{(f/\#)^2}$$

Il rapporto focale gioca anche un ruolo fondamentale nelle aberrazioni ottiche. Come vedremo più avanti, ogni tipo di aberrazione presenta una dipendenza inversamente proporzionale alla potenza di un rapporto focale [4]. Questo implica che il progetto di un sistema a basso rapporto focale (detto *sistema veloce* o *luminoso*) presenterà nativamente aberrazioni più importanti che richiedono tecniche di eliminazione complesse, con conseguente aumento del costo finale del sistema. Proprio per la sua importanza, il rapporto focale costituisce uno dei parametri che vengono identificati nei requisiti di progetto.

Conclusioni

In questo secondo articolo abbiamo richiamato tutti i concetti che vengono utilizzati nel descrivere ed analizzare un sistema ottico complesso, quali il concetto di stop, di pupilla d'ingresso e d'uscita, di campo di vista, di modello parassiale equivalente, di rapporto focale e di raggi marginali e principali. Tutti questi concetti verranno largamente utilizzati dal prossimo articolo dove, finalmente, inizieremo a parlare di telescopi e delle loro proprietà.

Bibliografia

- [1] EnChamade, "Telescopi: I - Richiami di ottica geometrica e parassiale", ElectroYou, 2016.
- [2] E. Hetch, "Optics - 4th edition", Pearson Edition, 2002.
- [3] J. M. Geary, "Introduction to Lens Design with Practical ZEMAX Examples", Willmann Bell, Inc., 2002.
- [4] V. N. Mahajan, "Aberration Theory Made Simple - 2nd edition", SPIE Press, 2011.

Estratto da "<http://www.electroyou.it/mediawiki/index.php?title=UsersPages:Enchamade:telescopi-ii-formazione-delle-immagini-e-aspetti-generalisui-sistemi-ottici>"