Giovanni Schgör (g.schgor)

GUIDA INTRODUTTIVA AI FILTRI DIGITALI (3)

25 October 2009

Ricorsività

Nel **precedente articolo** abbiamo visto i filtri non-ricorsivi senza però introdurre il concetto di ricorsività.

Torniamo allora al più semplice tipo di filtro visti nel **primo articolo** di questa serie: il circuito RC.

Per ottenerne la sua **funzione di trasferimento** (cioè il rapporto fra segnale d'uscita e quello di ingresso), avevamo applicato al circuito il **metodo di Laplace**, ed avevamo poi sostituito $j\omega$ ad s, per ricavarne la risposta in frequenza.

Un approccio diverso è applicare al circuito le **relazioni differenziali** che definiscono il comportamento dei singoli componenti: per un **circuito RC** (senza carico sull'uscita) possiamo scrivere che la corrente nel condensatore C è uguale alla corrente nella resistenza R:

$C \cdot \frac{d(Vc)}{dt} = \frac{V - Vc}{R}$, dove V è la tensione d'ingresso e Vc quella d'uscita (su C).

Che possiamo riscrivere come : $\frac{d(Vc)}{dt} = \frac{V - Vc}{R \cdot C}$

Ponendo poi $R \cdot C = T$ (costante di tempo) ed applicando poi il metodo delle differenze finite, la relazione si trasforma in:

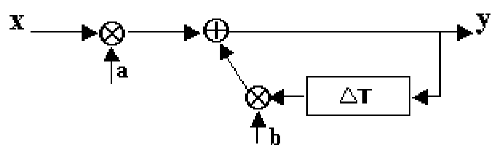
$\frac{vc_t - vc_{t-1}}{\Delta T} = \frac{v_t - vc_t}{T}$, dove v e vc sono valori istantanei rispettivamente al tempo t e t-1, e ΔT l'intervallo di campionamento del segnale.

Da quest'ultima possiamo infine ricavare, per ogni istante t, il valore di vc:

$$vc_t = v_t \cdot \left(\frac{\Delta T}{T + \Delta T}\right) + vc_{t-1} \cdot \left(\frac{T}{T + \Delta T}\right)$$

Abbiamo ottenuto un risultato importante: possiamo infatti ricavare per ogni istante t il valore d'uscita (vc_t) in funzione della tensione istantanea d'ingresso (v_t) e del valore d'uscita all'istante precedente (vc_{t-1}): è questo il concetto di **ricorsività** citato all'inizio.

Possiamo vederne la struttura di calcolo derivante, indicando come di consueto **x** il segnale d'ingresso, **y** quello d'uscita e con **a** e **b** la costanti moltiplicative (le espressioni precedenti in parentesi):

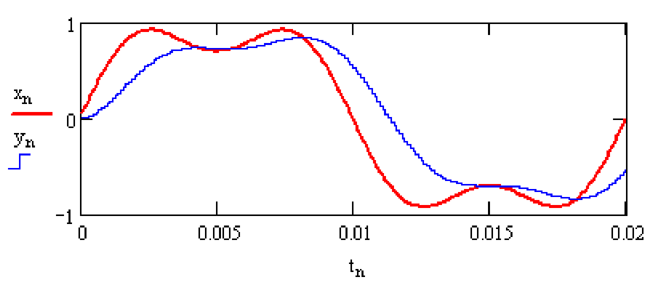


Come prova del comportamento del filtro "digitale" a confronto dell'equivalente analogico, applichiamo a questo la stessa forma d'onda (50Hz + terza armonica) utilizzata nel primo articolo;

$$T := \frac{1}{100 \cdot 2 \cdot \pi} \qquad \Delta T := 10^{-4} \qquad a := \frac{\Delta T}{T + \Delta T} \qquad b := \frac{T}{T + \Delta T}$$

$$n := 1..200 \qquad t_n := n \cdot \Delta T \qquad x_n := \sin(100 \cdot \pi \cdot t_n) + 0.3 \cdot \sin(300 \cdot \pi \cdot t_n)$$

$$y_0 := 0 \qquad y_n := x_n \cdot a + y_{n-1} \cdot b$$



ottenendo lo stesso filtraggio.

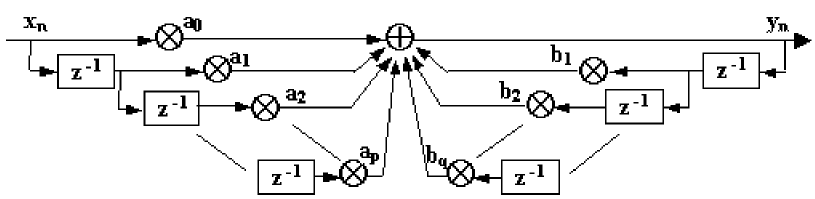
(Evidentemente non varrebbe la pena di fare in digitale un filtro del genere. Questa è solo a dimostrazione del metodo).

Strutture ricorsive

Con più pomposità teorica, avremmo potuto raggiungere lo stesso risultato applicando la **trasformata z**, sostituendo nella funzione di trasferimento l'espressione di (z^{-1}) al posto della s di Laplace. Per approfondimenti si rimanda al cap.17 di [questo Corso](), mentre qui si sottolinea che (z^{-1}) significa un rtardo di ΔT, (z^{-2}) significa un ritardo di $2\Delta T$, e così via.

E' poi abbastanza facile pensare di generalizzare la struttura ricorsiva aggiungendo campionamenti sia all'ingresso (x) che all'uscita (y).

Si può quindi considerare in generale una struttura di calcolo come questa:



la cui funzione di trasferimento in z è perciò: $H(z) = \dfrac{\sum_{n=1}^{p} a_n \cdot z^{-n}}{1 - \sum_{m=1}^{q} b_m \cdot z^{-m}}$

Dovrebbe a questo punto essere chiaro che una struttura di questo tipo permette di realizzare qualsiasi relazione di trasferimento. Non è quindi limitata alla sola realizzazione di filtri, ma permette ad es. la realizzazione di sofisticati regolatori (persino regolatori che non hanno l'equivalente in campo analogico).

Da qui l'importanza dell'argomento, che non può essere ignorato da chi si occupa di elettronica moderna.

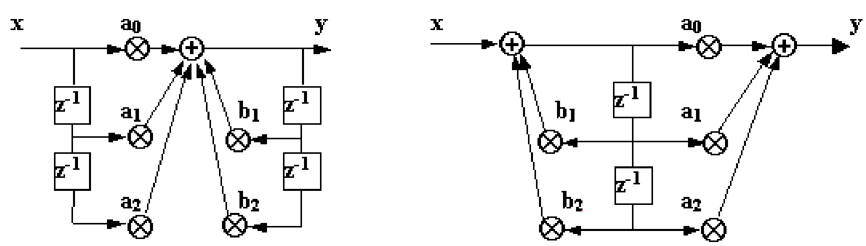
Spero tuttavia che nessuno si spaventi di fronte a queste strutture, perché in pratica si tratta di svolgere semplici operazioni di questo tipo: $y_t = a_0 \cdot x_t + a_1 \cdot x_{t-1} + a_2 \cdot x_{t-2} + ... + b_1 \cdot y_{t-1} + b_2 \cdot y_{t-2} + ...$

Il vero problema consiste nel determinare i valori dei coefficienti da assegnare per ogni particolare applicazione.

Strutture normalizzate

Il problema della complessità della struttura è stato risolto dai costruttori di integrati appositamente sviluppati per questi scopi, standardizzando strutture di determinato livello: se per un'applicazione non dovesse bastare, è possibile metterne più in serie, emulando quindi una struttura generale come quella indicata.

In particolare sono stati sviluppati integrati per strutture biquadratiche (**biquad**, in gergo) di questo tipo:



La struttura di sinistra è ricavata direttamente da quella generale, limitando i coefficienti di z a 2 per il numeratore (zeri) e 2 per il denomìinatore (poli).

L'espressione equivalente è dunque : $H(z) = \frac{y}{x} = \frac{a_0 + a_1 \cdot z^{-1} + a_2 \cdot z^{-2}}{1 - b_1 \cdot z^{-1} - b_2 \cdot z^{-2}}$

L'espressione di calcolo del valore di uscita è perciò: $y_n = a_0 \cdot x_n + a_1 \cdot x_{n-1} + a_2 \cdot x_{n-2} + b_1 \cdot y_{n-1} + b_2 \cdot y_{n-2}$

Esempio di applicazione

Per "toccare con mano" il metodo illustrato, cerchiamo di applicarlo al problema già visto in precedenza per un filtro passa basso a 100Hz.

Disponendo di un'unità quadratica, consideriamo un filtro del secondo ordine, ed ecco il procedimento in MathCad:

Da un filtro quadratico: $H(s) = \dfrac{1}{(1 + T \cdot s)^2}$

sostituendo (con approssimazione): $s = \dfrac{1 - z^{-1}}{\Delta T}$

si ottiene: $H(z) = \dfrac{1}{\left(1 + T \cdot \dfrac{1 - z^{-1}}{\Delta T}\right)^2}$

Esempio:

$\Delta T := 10^{-4}$ $\quad ft := 100$ $\quad T := \dfrac{1}{ft \cdot 2 \cdot \pi}$

$\dfrac{\Delta T}{\Delta T + T} = 0.059$ $\quad \dfrac{T}{\Delta T + T} = 0.941$

$$H(z) = \left(\frac{0.059}{1 - 0.941 \cdot z^{-1}}\right)^2 = \frac{0.003481}{1 - 1.882 \cdot z^{-1} + 0.88548 \cdot z^{-2}}$$

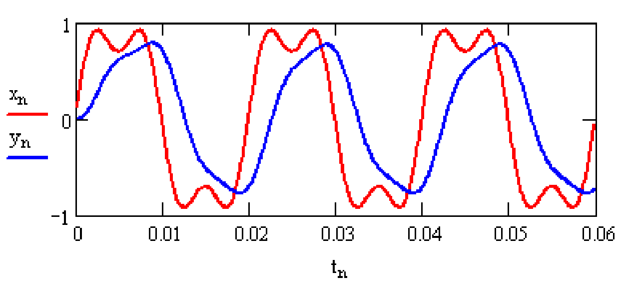
Come si vede, è stata raggiunta un'espressione che evidenzia i valori dei coefficienti (a_0 al numertore e b_1,b_2 al denominatore), valori che possiamo utilizzare nell struttura di calcolo biquadratica (si noti che a_1 e a_2 sono in questo caso uguali a zero).

Proviamo allora ad applicare questa struttura di calcolo alla solita forma d'onda a 50Hz con terza armonica:

$N := 600$ $\quad n := 0 .. N - 1$ $\quad t_n := n \cdot \Delta T$

$x_n := \sin(100 \cdot \pi \cdot t_n) + 0.3 \cdot \sin(300 \cdot \pi \cdot t_n)$ $\quad y_0 := 0$ $\quad y_1 := 0$

$n := 2 .. N - 1$ $\quad y_n := x_n \cdot 0.003481 + 1.882 \cdot y_{n-1} - 0.88548 \cdot y_{n-2}$



Il risultato migliorerebbe notevolmente se si impiegasse in serie un secondo filtro biquad, ma credo che per cogliere l'essenza del metodo, l'esempio fatto possa bastare,

I pericoli

E' ovvio che i filtri digitali godono dei vantaggi di questa tecnologia: insensibilità a derive dovute a temperatura o all'invecchiamento dei componenti, e con in più la possibilità di raggiungere prestazioni incomparabilmente superiori a quelle ottenibili con le tecniche analogiche.

Ci sono però insidie che nell'applicazione pratica richiedono particolare attenzione.

Un arrotondamento dei coefficienti o un troncamento nella precisione dei calcoli svolti dai microchips può ad esempio portare a comportamenti inaspettati.

Così l'inevitabile campionamento del segnale può comportare effetti di ***aliasing*** (per cui spesso è necessario utilizzare un filtro tradizionale come "anti-aliasing").

Non voglio qui entrare in questi particolari, ma vorrei solo segnalare che la ricorsività, cioè le retroazione del segnale d'uscita, può comportare anche **instabilità** (cioè un comportamento oscillante del segnale d'uscita). Analisi e simulazioni al computer sono quindi indispensabili in questo tipo di progettazioni.

Ultima osservazione è che applicando un impulso all'ingresso di un filtro ricorsivo, si ottiene un'uscita che si attenua nel tempo ma teoricamente dura all'infinito, per cui questi sono chiamati anche **filtri IIR (Infinite Impulse Response)** (in contrapposizione ai non-ricorsivi **FIR** visti nell'articolo precedente).

Concludo questa panoramica sui filtri digitali con l'auspicio espresso all'inizio di collaborazione da parte di eventuali utilizzatori per meglio evidenziare pregi e difetti riscontrati nelle loro applicazioni pratiche.

Estratto da "http://www.electroyou.it/mediawiki/index.php?title=UsersPages:G.schgor:articolo23"