



Giovanni Schgör (g.schgor)

PROBLEMA DI CONTROLLO DINAMICO

20 September 2010

Il problema

Sistemando vecchie riviste ho ritrovato un mio articolo di trent'anni fa sulla simulazione che riporta, fra diversi esempi, un semplice ma interessante problema di controllo dinamico.

L'articolo è stato pubblicato sulla rivista dell' ANIE TECNOLOGIE ELETTROTECNICHE nel Marzo 1981 (N.3), il titolo (dato dalla Redazione della rivista) è **Simulare per meglio comprendere** ed il problema è questo:

data una massa (**M**) appesa ad una molla con parametro di elasticità **K_m** , in equilibrio statico **y_{en}** , viene applicata mediante un elettromagnete una forza **F_{em}** che porta la massa ad una nuova posizione di equilibrio **y_{ef}** .

L'equilibrio statico

Il punto di equilibrio naturale **y_{en}** della massa appesa è ricavabile considerando le forze in gioco: il peso (cioè $M \cdot g$, con **g** accelerazione di gravità = $9.81 m / s^2$) e la forza antagonista della molla, esprimibile con $\frac{y_{en}}{K_m}$.

K_m è infatti l'allungamento della molla in funzione della forza applicata e le sue dimensioni sono m / N .

Nel nostro caso l'equilibrio delle forze è $M \cdot g = \frac{y_{en}}{K_m}$, quindi $y_{en} = K_m \cdot M \cdot g$.

Con un esempio numerico, supponendo $K_m = 10^{-3} m / N$ (1mm per newton) ed una massa di 1,02 Kg(massa), si ha un peso $M \cdot g$ di 10N, quindi un allungamento della molla di 10mm.

E' evidente che se in queste condizioni si applicasse una forza elettromagnetica **F_{em}**, questa andrebbe ad aggiungersi (o a togliersi, secondo il verso di questa) al peso, portando il sistema in una nuova posizione di equilibrio "forzato" **y_{ef}** .

L'equilibrio dinamico

L'analisi dell'equilibrio ora visto non tiene conto del comportamento dinamico del sistema, cioè come in realtà si muove la massa se applicata bruscamente alla molla in condizioni di riposo ($\mathbf{y} = \mathbf{0}$).

Per questa analisi dobbiamo esprimere la forza "istantanea" $\mathbf{F}(t)$ a cui è sottoposta la massa. Supponendo per il momento di considerare l'influenza del solo peso (cioè $\mathbf{F}_{em} = \mathbf{0}$) e della forza antagonista della molla, in ogni istante di tempo t deve essere $F(t) = M \cdot g - \frac{y(t)}{K_m}$.

Ma questa forza, applicata alla massa ne provoca l'accelerazione secondo la nota legge $F(t) = M \cdot a(t)$. L'accelerazione $\mathbf{a}(t)$ è però la derivata della velocità di spostamento, che a sua volta è la derivata della posizione istantanea $\mathbf{y}(t)$.

In definitiva è: $a(t) = \ddot{y}(t)$ ($\ddot{y}$ è la notazione convenzionale della derivata seconda di $\mathbf{y}$, rispetto a t).

L'equilibrio dinamico è così esprimibile dall'equazione differenziale $M \cdot \ddot{y}(t) = M \cdot g - \frac{y(t)}{K_m}$, cioè: $\ddot{y}(t) = g - \frac{y(t)}{M \cdot K_m}$.

La matematica mette a disposizione diversi metodi per la soluzione di equazioni di questo tipo, ma diciamo subito che la soluzione è un andamento nel tempo oscillante attorno al valore di equilibrio statico $\mathbf{y}_{en}$.

Questo risultato può lasciare perplessi: non è realistico pensare che la massa oscilli permanentemente! Il fatto è che nell'equazione dell'equilibrio non abbiamo tenuto conto delle inevitabili "resistenze al moto" che si verificano nella realtà e che in un tempo più o meno lungo porterebbero ad uno "smorzamento" delle oscillazioni fino a raggiungere una posizione stabile in $\mathbf{y}_{en}$.

E' comunque certo che senza speciali precauzioni, il movimento risulterebbe oscillatorio.

La soluzione più classica per evitare le oscillazioni sarebbe l'aggiunta di un ammortizzatore, cioè di un dispositivo che si oppone alla velocità di spostamento, tarato in modo tale da rendere aperiodico il movimento stesso.

Una soluzione alternativa, esposta nell'articolo citato all'inizio, è il controllo mediante l'applicazione di una forza elettromagnetica, opportunamente modulata.

Si noti che non si tratta di un controllo di posizione, ma di un semplice controllo ON-OFF, a ciclo aperto, col solo scopo di raggiungere la posizione di equilibrio statico, con il minimo di oscillazioni.

La simulazione

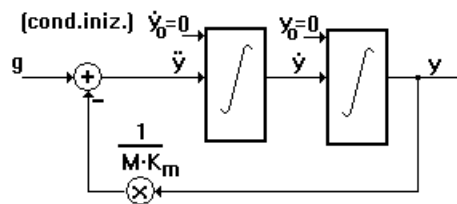
Per esaminare il comportamento dinamico del sistema, invece di utilizzare procedimenti matematici, si propone di ricorrere alla simulazione.

Abbiamo visto che l'equazione dell'equilibrio dinamico può essere scritta nella forma $\ddot{y} = g - \frac{y}{M \cdot K_m}$, cioè l'accelerazione della massa è data dall'accelerazione di gravità meno l'azione della molla.

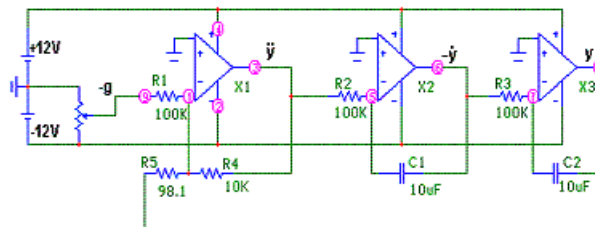
Questo suggerisce un semplice schema di soluzione realizzabile con amplificatori operazionali, il cui comportamento è oggi facilmente analizzabile con un qualsiasi programma di simulazione.

E' infatti evidente che integrando l'accelerazione ($\ddot{y}$) si ottiene la velocità ($\dot{y}$), che a sua volta, con successiva integrazione, determina la posizione (y) e la relativa forza frenante della molla.

Ecco quindi lo schema di calcolo:

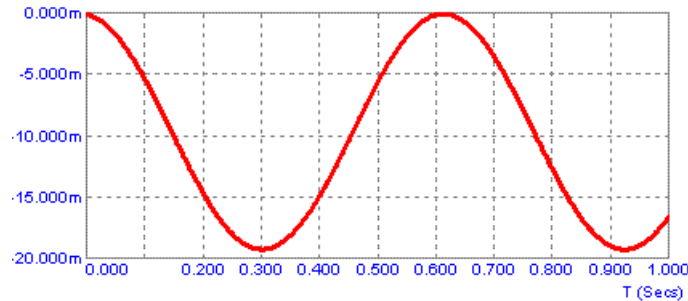


Questo può essere implementato, ad es. in MicroCap9, con una configurazione di operazionali



in cui il primo (X1) fa da sommatore (si noti l'inversione del segno di g e della retroazione per tener conto dell'azione invertente dell'operazionale), mentre X2 ed X3 fanno da integratori rispettivamente di $\ddot{y}$ e $\dot{y}$.

Il risultato è y , espresso in mm di allungamento della molla e rappresentato direttamente da MicroCap9 in questo modo:

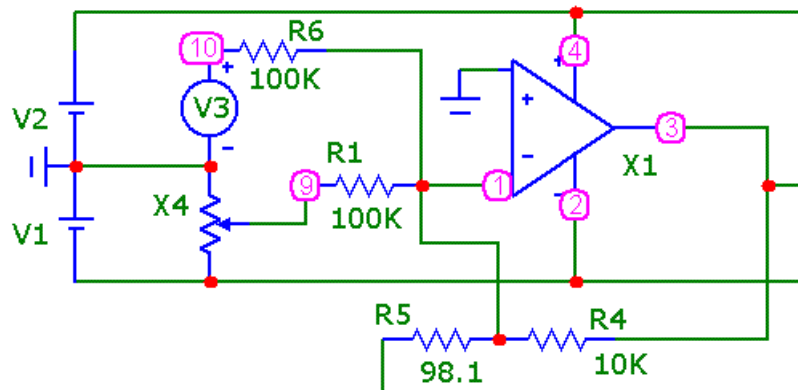


in cui si vede nettamente che la posizione di equilibrio (10mm) viene superata fino a raggiungere un'elongazione doppia per poi oscillare permanentemente fra 0 e 20mm.

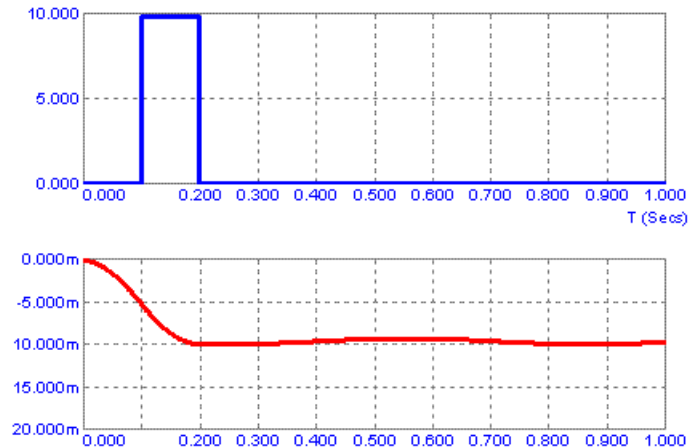
La stabilizzazione

Per stabilizzare il movimento si può ricorrere, come si diceva, all'azione di una forza elettromagnetica che modifichi l'effetto della gravità.

Nel circuito MicroCap visto, ciò comporta l'aggiunta di un segnale d'ingresso allo stadio sommatore:



Il generatore V3 genera infatti un segnale impulsivo di valore $\frac{F_{em}}{M}$ che per un certo intervallo di tempo si oppone alla gravità. Con pochi tentativi è quindi possibile trovare l'istante di inizio e la durata di questo impulso in modo che il movimento della massa si stabilizzi al valore di equilibrio statico (10mm), senza oscillare. Ed ecco il risultato



La traccia blu è l'impulso di correzione (V3), quella rossa l'elongazione della molla (y). Come si vede, un impulso della durata di 1/10 s che inizi 1/10 s dopo il rilascio della massa è sufficiente a stabilizzare il movimento.

Il posizionamento forzato

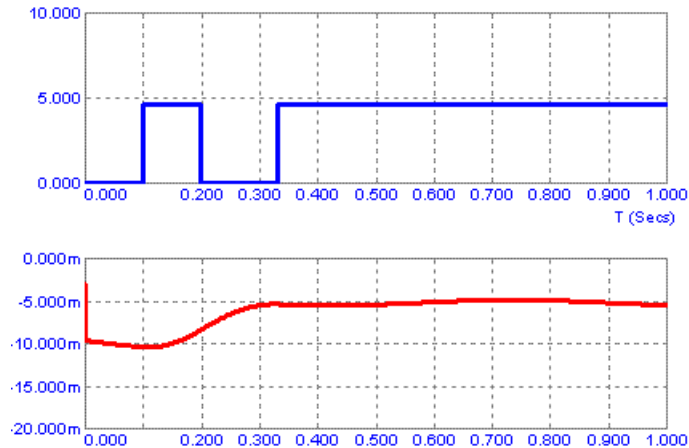
Con lo stesso circuito di simulazione possiamo anche esaminare il caso indicato all'inizio di posizionamento della massa sottoposta, oltre che all'azione della gravità, ad una forza elettromagnetica permanente F_{em} che le si oppone.

Supponiamo quindi di partire dalla posizione di equilibrio statico naturale ($y_{en}=10\text{mm}$) visto prima, e di applicare una forza elettromagnetica in senso contrario alla gravità e di valore corrispondente alla metà del peso della massa M appesa alla molla.

E' evidente che la nuova posizione di equilibrio dovrebbe essere $y_{ef} = 5\text{mm}$, ma è altrettanto evidente che se applicassimo semplicemente in modo continuo la forza F_{em} otterremmo solo un'oscillazione attorno a questo punto.

Per iniziare da y_{en} dobbiamo fissare a 10mm il valore iniziale dell'integratore (X3) che determina y: questo si ottiene facilmente in MicroCap ponendo tale valore come "condizione iniziale" del condensatore C2 (IC=10m, dove m qui sta per *millesimi*) e dobbiamo poi trovare il giusto valore di pausa alla forza F_{em} applicata per "frenare" il forzamento.

Il risultato è questo:



Come si vede, una "pausa" di ca 0.13 s, dopo 0.1 s dall'applicazione di F_{em} , stabilizza il posizionamento a y_{en}

Conclusioni

La soluzione indicata si basa su un comportamento ideale del sistema in assenza, come già detto, di una qualsiasi ammortizzazione del movimento (che porterebbe ad una stabilizzazione naturale del sistema stesso, ma con andamento oscillante smorzato).

Un progetto reale dovrebbe tener conto di questo e probabilmente anche della costante di tempo dell'elettromagnete (l'impulso di tensione applicata non si trasforma istantaneamente in forza elettromagnetica).

Tutto ciò complicherebbe non poco un approccio puramente matematico al problema, mentre non varierebbe molto la configurazione di simulazione.

Credo pertanto che quanto illustrato sia sufficiente a dimostrare l'importanza che la simulazione ha assunto nell'indagine e nella comprensione del comportamento dei sistemi.

Estratto da "<http://www.electroyou.it/mediawiki/index.php?title=UsersPages:G.schgor:articolo32>"