

Giovanni Schgör (g.schgor)

## RETTIFICAZIONE DI CURVE CON LE DIFFERENZE FINITE

10 February 2013

La rettificazione, cioè il calcolo della lunghezza, di una linea curva, matematicamente espressa fra due estremi, richiede la conoscenza ed una discreta abilità nel risolvere integrali generalmente non semplici.

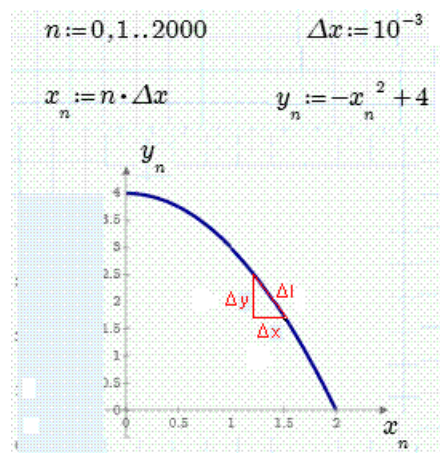
L'applicazione del metodo delle **differenze finite**, reso oggi possibile con l'uso del computer, ne facilita enormemente il calcolo, con precisioni più che sufficienti nelle eventuali applicazioni pratiche.

Esamineremo quindi prima l'approccio "teorico" del problema e poi diversi esempi con il confronto fra le soluzioni ottenute.

### La rettificazione

Per semplicità iniziamo da curve piane, definite nel piano x-y con una relazione del tipo  $y = f(x)$ , ad es. come la parabola  $y = -x^2 + 4$ .

Con **Mathcad Express** è possibile disegnare la curva in un certo intervallo di x, poniamo fra 0 e 2



Scegliendo un incremento di x di un millesimo, avremo il calcolo di 2000 punti nell'intervallo stabilito.

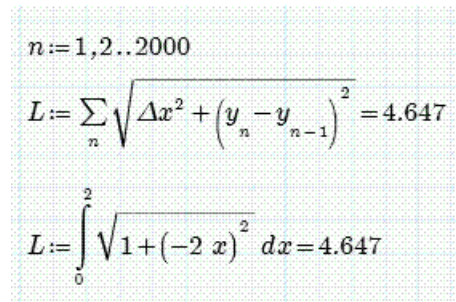
Nella figura è disegnato (in rosso e molto ingrandito) un triangolo retto con cateti  $\Delta x, \Delta y$  ed ipotenusa  $\Delta l$ , che possiamo considerare uguale all'incremento di lunghezza della curva per ogni  $\Delta x$ .

Va da sè che con questa approssimazione, la lunghezza della parabola nell'intervallo considerato (fra (0,4) e (2,0)) non è altro che la sommatoria di tutti gli  $\Delta l$ .

Per un risultato "esatto" dobbiamo ricorrere al calcolo integro-differenziale in questo modo: Gli incrementi (finiti)  $\Delta x$  e  $\Delta y$  vengono sostituiti dagli incrementi infinitesimali  $dx$  e  $dy$ , per cui  $dl = \sqrt{dx^2 + dy^2}$  da cui possiamo ricavare l'integrale:

$$L = \int dl = \int \sqrt{\left(\frac{dx}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot dx = \int \sqrt{1 + f'(x)^2} \cdot dx$$

Nel caso della parabola, la  $f'(x)$  risulta  $= -2x$ , ed ecco allora, sempre con Mathcad Express, i risultati dei due metodi:



$$n := 1, 2 \dots 2000$$

$$L := \sum_n \sqrt{\Delta x^2 + (y_n - y_{n-1})^2} = 4.647$$

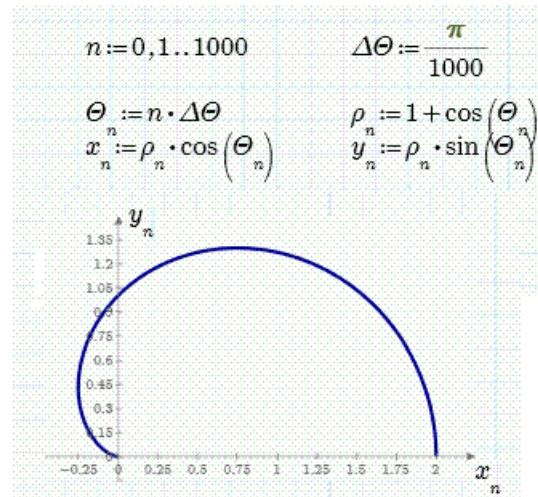
$$L := \int_0^2 \sqrt{1 + (-2x)^2} dx = 4.647$$

Come si vede, i risultati coincidono fino alla terza cifra decimale.

## Curve in coordinate polari

Alcune curve sono più facilmente esprimibili utilizzando le coordinate polari ( $\rho = f(\Theta)$ ), anziché le coordinate cartesiane (x,y), come ad es. vari tipi di spirali, le cardioidi e le lemniscate).

Vediamo la rettificazione della cardioide espressa da  $\rho = 1 + \cos(\Theta)$ .



Per rappresentare la curva nel piano cartesiano si è provveduto al cambio di coordinate, ottenendo i singoli valori di  $x, y$  che servono poi per la rettificazione ad elementi finiti. Si può infatti procedere come già visto, solo osservando che  $\Delta x$  non è più costante ma dato dalla differenza fra i valori di  $x$  consecutivi ( $\Delta x = x_n - x_{n-1}$ ).

Per il procedimento classico mediante integrazione, si osserva che il tirangolo infinitesimale che ha come ipotenusa  $dl$ , ha ora come cateti  $\rho d\Theta$  e  $d\rho$ , per cui

$$dl = \sqrt{(\rho)^2 + \left(\frac{d\rho}{d\Theta}\right)^2} \cdot d\Theta$$

Ed ecco il confronto in Mathcad Express delle due procedure di calcolo:

$n := 1, 2 \dots 1000$ 

$$L := \sum_n \sqrt{(x_n - x_{n-1})^2 + (y_n - y_{n-1})^2} = 4$$

$$L := \int_0^\pi \sqrt{(1 + \cos(\Theta))^2 + (\sin(\Theta))^2} d\Theta = 4$$

Malgrado ci sia di mezzo la conversione di coordinate, il risultato delle differenze finite "coincide" con quello teorico.

## Curve nello spazio

Ovviamente il metodo è estendibile a curve nello spazio tridimensionale ( $x, y, z$ ).

Nel caso di curve parametriche nel tempo, come ad es le traiettorie di un braccio robotizzato, la lunghezza può essere espressa come:

$$L = \int \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} \cdot dt$$

che con le differenze finite diventa:

$$L = \sum_t \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$$

dove ovviamente gli incrementi delle coordinate sono dati dalla differenza in istanti successivi

( $\Delta x = x_t - x_{t-1}$ , ecc.)

Si noti che questa relazione è valida per qualsiasi tipo di curva spaziale, anche per quelle non definibili matematicamente, purché siano misurabili i singoli incrementi.

E' altrettanto chiaro che il metodo delle differenze finite può essere applicato anche al calcolo di superfici e volumi nello spazio tridimensionale. Ma questo potrà essere oggetto di prossimi articoli se l'argomento sarà ritenuto di interesse da parte degli utenti di EY.

Estratto da "<http://www.electroyou.it/mediawiki/index.php?title=UsersPages:G.schgor:rettificazione-di-curve-con-le-differenze-finite>"