

Isidoro KZ (IsidoroKZ)

PENDOLI RISONANTI: UN ALTRO PUNTO DI VISTA.

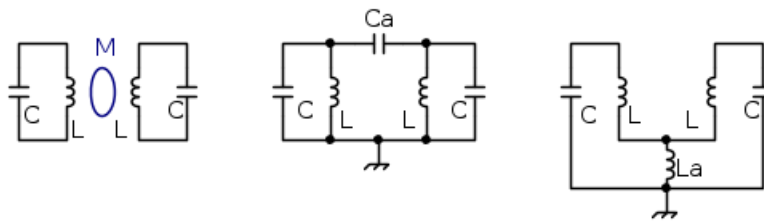
6 November 2010

Sommario

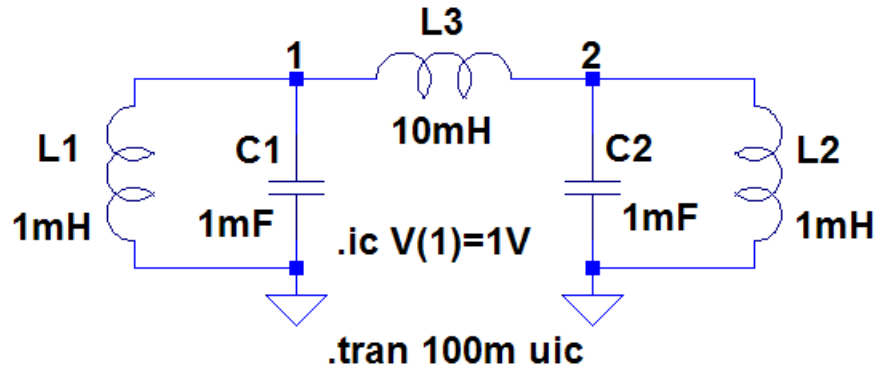
Lo splendido articolo di [Carloc](#) sui [pendoli risonanti](#) mi ha fatto venire in mente alcune considerazioni. Il problema proposto e analizzato da Carloc ha un equivalente nel mondo elettrico, sotto forma di circuiti risonanti. Al termine dell'articolo precedente ci sono gli schemi di **circuiti risonanti accoppiati**, che si comportano esattamente come i pendoli dell'esempio. Oltre a questo parallelismo, c'è un altro modo di affrontare il problema dei pendoli risonanti, prendendo a prestito dall'elettronica analogica il concetto di **modo differenziale** e di **modo comune**. Usando questa idea, la soluzione del problema diventa un po' più facile e più intuitiva. Naturalmente i **matematici** la vedono in modo ancora diverso, parlando di **cambiamento di basi**, ma in realtà dicendo le stesse cose in un altro linguaggio.

Introduzione

Lo splendido articolo di [Carloc](#) si conclude con il parallelo fra il sistema meccanico e questi circuiti formati da risonatori accoppiati.

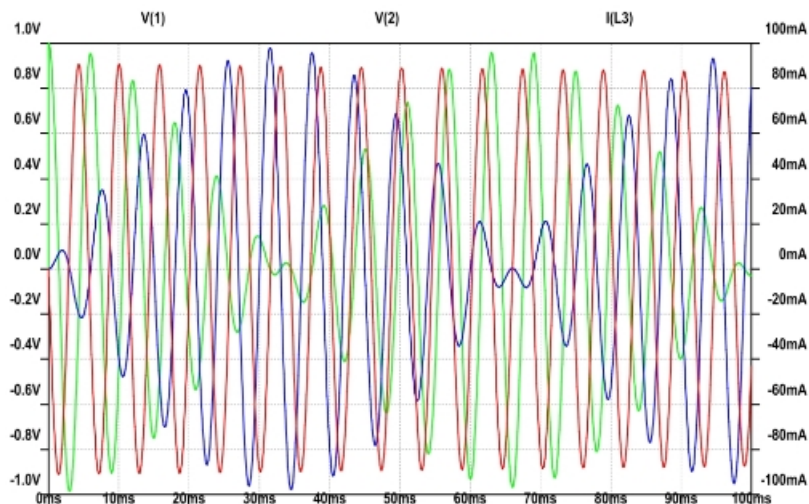


Visto che non ho il tempo di andare in laboratorio, preparare un circuito e misurarlo, ho voluto verificare con una simulazione il comportamento di questo circuito:



PendRis1.gif

Pur non essendo uno di quelli proposti nell'articolo originale, anche questo circuito ha un comportamento analogo. Una simulazione con LTspice fornisce queste forme d'onda per la tensione sui due condensatori (tracce verde e blu) e la corrente nell'induttore L3 (traccia rossa):



Oscacc1.jpg

Si vede che anche qui le tensioni V1 e V2 sui due condensatori oscillano ma si cambiano di ampiezza, mentre la corrente nella induttanza L3 che accoppia i due circuiti rimane di ampiezza costante.

Una nota en passant

Un metodo rapido per determinare l'ordine di un sistema e` quello di contare quanti elementi *indipendenti* che immagazzinano energia sono presenti nel sistema. I due pendoli accoppiati hanno 5 elementi che immagazzinano energia:

- pendolo 1 con la sua energia potenziale (funzione della variabile ϑ_1)

- pendolo 1 con la sua energia cinetica (funzione della variabile $\dot{\vartheta}_1$)
- pendolo 2 con la sua energia potenziale (funzione della variabile ϑ_2)
- pendolo 2 con la sua energia cinetica (funzione della variabile $\dot{\vartheta}_2$)
- molla fra i due pendoli, con energia elastica data dalla differenza degli angoli $\vartheta_1 - \vartheta_2$

Si vede che e' possibile imporre delle condizioni iniziali ad esempio ai primi 4 elementi che immagazzinano energia (posizione e velocita' dei pendoli), ma per la molla di accoppiamento non c'e' nessun grado di liberta': una volta stabilita la posizione dei pendoli, e' fissata anche la posizione della molla, che quindi non e' indipendente e non contribuisce all'ordine del sistema.

Analisi da elettronico

Il problema originale e' stato analizzato con un approccio meccanico, considerando come grandezze descrittive del problema i due angoli ϑ_1 e ϑ_2 e le loro derivate, scrivendo poi le equazioni differenziali che descrivono il sistema.

Quando un elettronico circuitale si trova a lavorare con due grandezze, ad esempio due tensioni date rispetto a un riferimento comune, gli viene abbastanza naturale lavorare non con le tensioni originali V_1 e V_2 ma con la tensione di modo differenziale $V_d = V_1 - V_2$ e la tensione di modo comune, tensione media $V_c = \frac{V_1 + V_2}{2}$. Questa e' la tecnica usata normalmente nei sistemi di acquisizione dati, trasmissione analogica di precisione... Nel nostro caso possiamo considerare gli angoli dei pendoli come grandezze originali, e andare a lavorare con l'angolo differenza $\vartheta_d = \vartheta_1 - \vartheta_2$ e l'angolo medio o angolo di modo comune $\vartheta_c = \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2}$

Prima di proseguire bisogna fare due controlli:

- E' una operazione lecita abbandonare le variabili originali e usare somma e differenza?
- Questa operazione porta delle semplificazioni?

La risposta e' si' ad entrambe le domande. Il sistema e' lineare (o meglio linearizzato): al posto di considerare le soluzioni per ciascuna delle due variabili posso prendere una combinazione lineare delle variabili e ho ancora una soluzione del problema. Da notare che non si perde informazione. Si puo' sempre passare da ϑ_1, ϑ_2 a ϑ_d, ϑ_c e tornare indietro con le formule inverse:

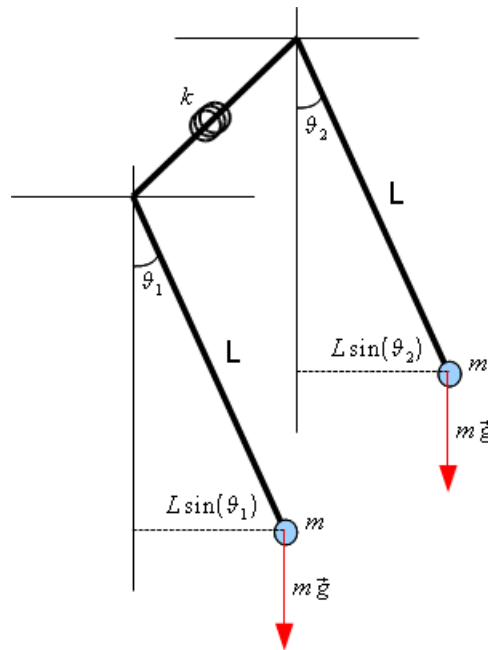
$$\vartheta_1 = \vartheta_c + \frac{\vartheta_d}{2}$$

$$\vartheta_2 = \vartheta_c - \frac{\vartheta_d}{2}$$

Il metodo inoltre e' molto conveniente se si pensa a che cosa vuol dire fisicamente eccitare il sistema con un angolo iniziale di modo comune e uno di modo differenziale.

Modo comune

Consideriamo la figura di Carloc:



PendRis.png

e immaginiamo di eccitarla con una condizione iniziale di solo modo comune. Gli angoli ϑ_1 e ϑ_2 sono uguali (praticamente come in figura). La molla che accoppia i due pendoli non subisce sollecitazioni e torsioni. Quando si lasciano andare i due pendoli, che, ricordiamo, sono della stessa lunghezza, questi oscillano in parallelo, e la molla in mezzo continua a non essere sollecitata. In pratica l'accoppiamento è come se non esistesse, ciascun pendolo oscilla con la sua frequenza propria, senza sapere che c'è un altro pendolo identico lì vicino. In pratica il sistema che descrive l'oscillazione di modo comune è quello di un pendolo semplice, che dà origine a una normale equazione differenziale del secondo ordine con due condizioni iniziali. L'equazione del pendolo è sempre data da $I\ddot{\vartheta}_1 = \sum \tau$, ma in questo caso c'è solo il momento dovuto alla forza di gravità che agisce sul pendolo, la molla non ha alcun effetto. L'equazione diventa

$mL^2\ddot{\vartheta}_1 = -mgL \sin(\vartheta_1)$, e linearizzando per angoli piccoli si ha

$mL^2\ddot{\vartheta}_1 = -mgL\vartheta_1$ da cui l'equazione differenziale diventa $\ddot{\vartheta}_1 = -\frac{g}{L}\vartheta_1$ e visto che l'angolo ϑ_1 è anche uguale a ϑ_c , abbiamo trovato l'equazione differenziale che descrive l'angolo di modo comune:

$$\ddot{\vartheta}_c = -\frac{g}{L}\vartheta_c$$

Modo differenziale

Vediamo ora che cosa significa fisicamente una eccitazione di modo differenziale, in cui cioè $\vartheta_1 = -\vartheta_2$. Questo vuol dire immaginare di spostare il pendolo 1 da un lato (ad esempio a sinistra) e il pendolo 2 dal lato opposto con lo stesso angolo, in modo (anti)simmetrico.

In queste condizioni succede un fatto importante. Il punto di mezzo della molla non si sposta! Essendo i suoi estremi ruotati dello stesso angolo in versi opposti, il centro della molla rimane immobile. Se lasciamo andare i due pendoli, questi cominceranno ad oscillare in modo antisimmetrico, in opposizione di fase, e il punto centrale della molla, a causa della simmetria del moto, continuerà a rimanere fermo, anche quando i pendoli oscillano..

A questo punto si può pensare di fissare il punto centrale della molla direttamente a un qualcosa di fermo (al "muro"). Abbiamo ottenuto che ciascuno dei due pendoli non vede l'altro, semplicemente sente l'effetto di una molla che gli applica una coppia. Da notare che fissando il punto centrale della molla, in pratica tagliandola a metà, ne raddoppiamo la costante elastica k : a pari angolo di rotazione c'è solo mezza molla che la assorbe e che reagisce con coppia doppia. Per gli elettronici duri e puri: questo è un esempio di applicazione del teorema di Miller con guadagno del sistema pari a -1.

L'equazione differenziale che descrive il comportamento del primo pendolo, quando l'altro oscilla in opposizione di fase, è data analogamente a prima da $I \ddot{\vartheta}_1 = \sum \tau$

In questo caso ci sono due coppie che agiscono sul pendolo, quella data dalla gravità e quella della molla. La cosa importante è che la coppia della molla dipende *solo* dall'angolo ϑ_1 e non anche da ϑ_2 , in quanto il punto di mezzo della molla è (come se fosse) attaccato al muro!

L'equazione che descrive il moto di uno dei due pendoli, con l'altro in moto antisimmetrico, diventa quindi

$$mL^2 \ddot{\vartheta}_1 = -mgL \sin(\vartheta_1) - 2k\vartheta_1 \text{ e con le solite semplificazioni otteniamo}$$

$$\ddot{\vartheta}_1 = - \left(\frac{g}{L} + \frac{2k}{mL^2} \right) \vartheta_1$$

Nell'oscillazione differenziale si ha che $\vartheta_1 = \frac{\vartheta_d}{2}$ e sostituendo, semplificando il due, otteniamo l'equazione differenziale per l'angolo differenziale:

$$\ddot{\vartheta}_d = - \left(\frac{g}{L} + \frac{2k}{mL^2} \right) \vartheta_d$$

Questa è una "semplice" equazione differenziale del secondo ordine lineare. Quello che è stato fatto è di *disaccoppiare* il sistema originale, del quarto ordine, in due sistemi indipendenti del secondo ordine, più facili da risolvere.

Sovrapposizione e scomposizione

Osserviamo che sia l'oscillazione comune che quella differenziale sono oscillazioni sinusoidali, ad ampiezza costante e di frequenza diversa.

La frequenza del modo comune, quella solita del pendolo, vale

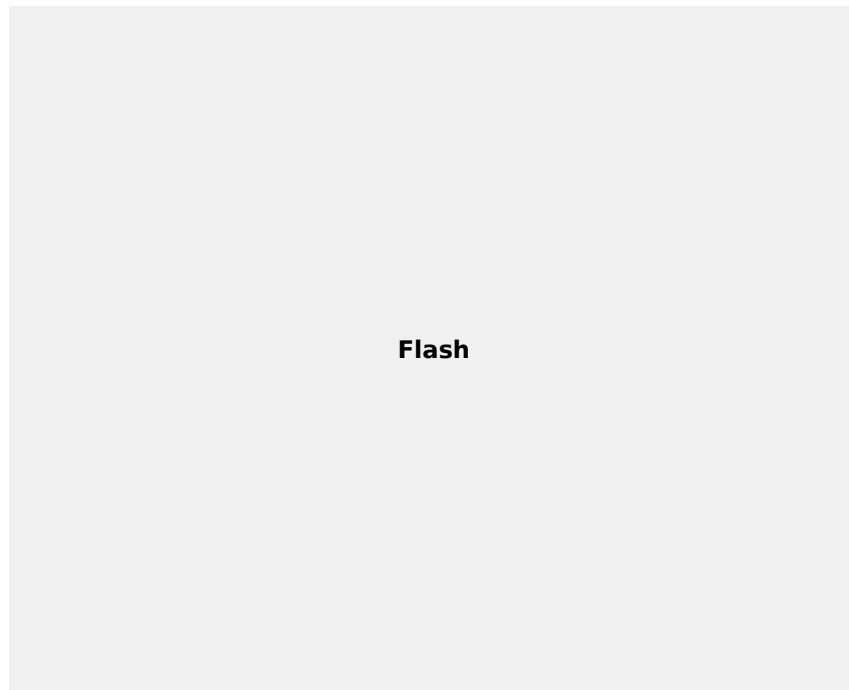
$$\omega_c = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

mentre quella di modo differenziale è più elevata, tanto maggiore quanto più alto è il coefficiente k di rigidità della molla:

$$\omega_d = \sqrt{\frac{g}{L} + \frac{2k}{mL^2}}$$

La molla di accoppiamento interviene e lavora solo nel modo differenziale, e questo spiega in modo intuitivo il risultato mostrato da Carloc e verificato con la simulazione iniziale: la corrente nell'induttore IL(3) è una senoide di ampiezza costante.

Admin, coadiuvato da un mio collega gatto, ha realizzato un bel filmato in cui si vedono le eccitazioni e relative oscillazioni di modo comune e di modo differenziale.



Se si sovrappongono e sommano due oscillazioni sinusoidali di frequenza diversa si ottiene un fenomeno di battimento, che è esattamente quello che si vede sia nei filmati che nella simulazione. La variazione di ampiezza dell'oscillazione vista dipende dalla sovrapposizione di due sinusoidi a frequenza simile. Se le due sinusoidi sovrapposte hanno ampiezza opportuna, ci sono momenti in cui l'oscillazione di uno dei due pendoli ha ampiezza nulla.

Consideriamo la situazione iniziale vista nei filmati. Solo uno dei due pendoli viene

spostato di un angolo $\vartheta_1 = \vartheta_{iniz}$, mentre per l'altro si ha $\vartheta_2 = 0$. In queste condizioni l'angolo differenziale vale $\vartheta_d = \vartheta_1$ mentre quello di modo comune vale $\vartheta_c = \frac{\vartheta_1}{2}$.

Queste due oscillazioni evolvono contemporaneamente e indipendentemente una dall'altra (il sistema è lineare), ad ampiezza costante.

Quello che vediamo è la posizione di ciascuno dei due pendoli, che si ricava sommando le soluzioni delle equazioni indicate in precedenza.

Se fra le condizioni iniziali non esiste una opportuna relazione di ampiezze, ad esempio velocità iniziali nulle e ampiezze tali che $\vartheta_d = 2\vartheta_c$ non si ha l'effetto di fermata di un pendolo e dell'altro.

Per un qualsiasi insieme di condizioni iniziali, $\vartheta_1, \vartheta_2, \dot{\vartheta}_1, \dot{\vartheta}_2$ possiamo ricavare gli angoli iniziali ϑ_c, ϑ_d con le formule viste prima e anche le velocità angolari iniziali di modo comune e modo differenziale $\dot{\vartheta}_c, \dot{\vartheta}_d$ che si ottengono dalle velocità $\dot{\vartheta}_1, \dot{\vartheta}_2$ con le solite formule di semisomma e differenza.

Analisi da matematico

Un matematico non è interessato alle considerazioni viste prima. Ma quando arriva al sistema di equazioni accoppiate (riprese con i simboli di Carloc)

$$\begin{cases} \ddot{\vartheta}_1 = -(\omega^2 + h^2)\vartheta_1 + h^2\vartheta_2 \\ \ddot{\vartheta}_2 = -(\omega^2 + h^2)\vartheta_2 + h^2\vartheta_1 \end{cases}$$

potrebbe dire: posso sommare e sottrarre le due equazioni e definire due nuove variabili, ad esempio

$$\vartheta_d = \vartheta_1 - \vartheta_2 \text{ e}$$

$$\vartheta_s = \vartheta_1 + \vartheta_2$$

In questo modo le equazioni diventano:
$$\begin{cases} \ddot{\vartheta}_s = -(\omega^2 + h^2)\vartheta_s + h^2\vartheta_s = -\omega^2\vartheta_s \\ \ddot{\vartheta}_d = -(\omega^2 + h^2)\vartheta_d - h^2\vartheta_d = -(\omega^2 + 2h^2)\vartheta_d \end{cases}$$

e queste sono le due equazioni disaccoppiate già trovate in precedenza usando considerazioni meccaniche.

Questa trasformazione di variabili può anche essere vista come una rotazione degli assi nello spazio delle soluzioni. Se si definisce

$$\vartheta'_1 = \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{\sqrt{2}} \text{ e}$$

$$\vartheta'_2 = \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{\sqrt{2}}$$

in pratica si è effettuata una rotazione di 45 gradi degli assi nello spazio $(\vartheta_1, \vartheta_2)$ ritrovando di nuovo, con un diverso fattore moltiplicativo, la componente di modo comune e quella di modo differenziale.

Conclusioni

La scomposizione in modo comune e modo differenziale salta fuori anche in campi in cui a prima vista non si direbbe si possa applicare. Disaccoppiare i sistemi di equazioni differenziali e' un metodo generale (ben piu' complicato di quanto esposto qui) che consente di semplificare l'analisi di problemi piu' diversi. Ad esempio e' stato applicato allo studio degli stati metastabili dei flip flop per valutarne il tempo di uscita dalla metastabilita'. Usando come variabili le tensioni delle uscite Q e /Q si hanno equazioni abbastanza complicate, scomponendo invece in modo comune e differenziale si hanno equazioni molto piu' maneggevoli

Ringraziamenti

Un ringraziamento a Carloc che con il suo ottimo articolo mi ha dato la possibilita' di scrivere queste considerazioni. Inoltre Carlo mi ha anche fornito il disegno dei pendoli che compare in questo articolo.

RenzoDF ha contribuito alla grafica fornendo una versione ripulita dello schema dei risonatori accoppiati.

Ultimo, ma non meno importante, **admin** e il suo gatto hanno realizzato il filmato che mostra i modi di oscillazione. Una figura vale mille parole, un filmato ne vale un numero incalcolabile!

Estratto da "<http://www.electroyou.it/mediawiki/index.php?title=UsersPages:Isidorokz:pendoli-risonanti-considerazioni>"