

Isidoro KZ (IsidoroKZ)

Sensitivity II - Esempio su circuito di autopolarizzazione per bjt

28 November 2010

Indice

- [1 Introduzione](#)
- [2 Circuito di autopolarizzazione per bjt](#)
 - [2.1 Calcolo delle sensibilita`](#)
 - [2.1.1 Guadagno statico di corrente](#)
 - [2.1.2 Resistenza di emettitore](#)
 - [2.1.3 Tensione base emettitore](#)
 - [2.1.4 Tensione di alimentazione](#)
 - [2.1.5 Resistenze R1 e R2](#)
- [3 Esempio su un circuito](#)
 - [3.1 Valutazione quantitativa](#)
- [4 Conclusioni](#)
- [5 Riferimenti](#)
- [6 NOTE](#)

Introduzione

Nel precedente articolo [\[1\]](#) sono state definite le sensitivities, cioe` i legami lineari che esistono fra grandezze di funzionamento della rete e i valori di componenti, parametri... Lo scopo della analisi della **sensibilita`** e` di conoscere come le grandezze di funzionamento della rete dipendano dai parametri che possono variare a causa ad esempio di tolleranze, derive, invecchiamento...

In questo articolo saranno sviluppati alcuni **esempi**, tutti tratti dall'**elettronica analogica**, per mostrare sia il metodo di calcolo sia per mostrare alcuni risultati che possono essere utili nella pratica di progettazione.

Non si fara` riferimento alla teoria, gia` sviluppata, saranno solo mostrati esempi con relativi calcoli, sia analitici che numerici.

Circuito di autopolarizzazione per bjt

Polarizzare un transistor vuol dire inserirlo in un circuito che faccia scorrere attraverso il transistor la corrente a riposo voluta dal progettista. Fissare e stabilizzare la corrente è di importanza fondamentale, perché quasi tutti i parametri, a cominciare dalla transconduttanza, dipendono dalla corrente che circola nel transistor. Questa corrente inoltre determina le tensioni che si hanno sul transistor, e quindi ad esempio la sua dinamica, ma questo è un altro problema. Qui sarà analizzato solo il circuito di polarizzazione di un transistor bipolare, per studiare come i cambiamenti dei parametri e componenti facciano variare la corrente di collettore. La stessa metodologia funziona con qualsiasi altro dispositivo, come mosfet, jfet, tubo...

Il circuito di autopolarizzazione [2] è presentato in figura A,

[Sorgente FidoCadJ](#) | [Ingrandisci](#) | [Cos'è FidoCad](#)

In figura B si è provveduto ad eseguire una trasformazione Helmholtz-Thévenin per semplificare la scrittura delle equazioni. I parametri equivalenti sono

$$V_{\text{eq}} = V_{\text{AL}} \frac{R_2}{R_1 + R_2},$$

$$R_{\text{eq}} = R_1 \parallel R_2 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

. Anche se per comodità si useranno le grandezze equivalenti, bisogna ricordare che queste contengono dei parametri che possono cambiare.

Il circuito di autopolarizzazione, con alcuni semplici limiti, può rappresentare anche altri circuiti di polarizzazione. Ad esempio facendo tendere $R_2 \rightarrow \infty$ oppure $R_E \rightarrow 0$ o contemporaneamente $R_2 \rightarrow \infty$, $R_E \rightarrow 0$ si ottengono i tre circuiti seguenti:

[Sorgente FidoCadJ](#) | [Ingrandisci](#) | [Cos'è FidoCad](#)

Questi circuiti, specie D ed E, sono meno utilizzati in quanto hanno prestazioni peggiori per quanto riguarda la stabilizzazione della corrente di collettore a riposo, cosa che si vede dal calcolo delle sensibilità.

La corrente di collettore del circuito di autopolarizzazione è calcolata scrivendo una equazione alla maglia V_{eq} , R_{eq} , V_{BE} . L'incognita della maglia è la corrente di base I_{B} oppure quella di emettitore $I_{\text{E}} = (\beta_F + 1)I_{\text{B}}$ dove β_F è il guadagno di corrente statico del transistor (*).

L'equazione alla maglia di base e`

$$V_{eq} - R_{eq} I_B - V_{BE} -$$

$$R_E (\beta_F + 1) I_B = 0$$

da cui si ricava la corrente di base

$$I_B = \frac{V_{eq} - V_{BE}}{R_{eq} + (\beta_F + 1) R_E}$$

$$I_C = \beta_F I_B = \beta_F \frac{V_{eq} - V_{BE}}{R_{eq} + (\beta_F + 1) R_E}$$

La corrente di collettore, che e` poi quella che ci interessa, e trascurando l'effetto Early, e` data da

$$I_C = \beta_F I_B = \beta_F \frac{V_{eq} - V_{BE}}{R_{eq} + (\beta_F + 1) R_E}$$

$$I_C = \beta_F I_B = \beta_F \frac{V_{eq} - V_{BE}}{R_{eq} + (\beta_F + 1) R_E}$$

In questa espressione sono presenti in modo esplicito la resistenza di emettitore

R_E , il guadagno di corrente statico β_F , la tensione base emettitore

V_{BE} . Ma dentro ai parametri equivalenti V_{eq} , R_{eq} sono

nascosti i valori di V_{AL} , R_1 , R_2 , da non dimenticarsi quando si fanno le derivate rispetto a questi parametri.

Calcolo delle sensibilita`

La variazione significativa della corrente di collettore e` quella relativa, quindi si lavorera` con sensibilita` (semi)relativa. Le resistenze vengono date con un errore relativo, il guadagno di corrente e` fortemente variabile, anche di questo sono importanti le variazioni relative. La tensione di alimentazione puo` essere specificata con una variazione relativa oppure assoluta, mentre le variazioni della tensione base emettitore sono piu` facilmente trattate come variazioni assolute.

Guadagno statico di corrente

Cominciamo il calcolo delle sensitivity relative della corrente di collettore rispetto

β_F , alla resistenza R_E e quella semirelativa rispetto a

V_{BE} che sono le tre grandezze esplicite presenti nell'espressione della corrente di collettore.

$$\begin{aligned} \bar{S}^{I_C}_{\beta_F} &= \frac{\partial I_C}{\partial \beta_F} = \frac{(V_{BE})(R_E + R_{eq})}{(R_{eq} + (\beta_F + 1)R_E)^2} \cdot \frac{\beta_F}{V_{BE} + (R_{eq} + (\beta_F + 1)R_E)} \\ &= \frac{R_{eq} + R_E}{R_{eq} + (\beta_F + 1)R_E} \end{aligned}$$

Da questa espressione si può subito osservare che

$$\lim_{R_E \rightarrow 0} \bar{S}^{I_C}_{\beta_F} = \lim_{R_E \rightarrow 0} \frac{R_{eq}}{R_{eq} + (\beta_F + 1)R_E} = 1$$

cioè se non c'è la resistenza di emettitore, come nei circuiti D ed E, la corrente di collettore non è stabilizzata contro le variazioni di β_F

Per avere una buona stabilizzazione è necessario che

$$R_{eq} \gg (\beta_F + 1)R_E$$

Resistenza di emettitore

La sensitivity della corrente di collettore I_C rispetto alla resistenza di emettitore R_E viene calcolata nello stesso modo di prima. Con qualche badilata di noiose derivate si ottiene:

$$\begin{aligned} \bar{S}^{I_C}_{R_E} &= \frac{\partial I_C}{\partial R_E} = -\frac{\beta_F}{(\beta_F + 1)(V_{BE} + (R_{eq} + (\beta_F + 1)R_E)^2)} \cdot \frac{\beta_F}{V_{BE} + (R_{eq} + (\beta_F + 1)R_E)} \\ &= -\frac{\beta_F}{(\beta_F + 1)R_E} \end{aligned}$$

Il segno negativo di questa sensitivity indica che se la resistenza di emettitore aumenta, la corrente di collettore diminuisce, come è ovvio dal circuito. Osservando l'espressione si potrebbe concludere che per avere un buon progetto si dovrebbe porre $R_{eq} \gg (\beta_F + 1)R_E$ che è giusto l'opposto di quanto trovato nel paragrafo precedente. Sembra che Murphy, il miglior amico dei progettisti, abbia colpito ancora :).

In realta' in questo caso non si deve soddisfare la relazione appena scritta sopra. La ragione e' che comunque al massimo questa sensibilita' puo' arrivare a $\bar{S}^{I_{\text{C}}}_{R_{\text{E}}} = -1$ che non e' tanto male in quanto e' una dipendenza dal valore di un resistore, la cui stabilita' e precisione, se necessario, possono essere molto elevate. Invece nel paragrafo precedente si stava cercando di ridurre l'effetto della variazione di β_{F} che e' una grandezza assolutamente fuori controllo e *molto* variabile!

Tensione base emettitore

Procedendo come prima, si puo' trovare la sensitivity **semirelativa** rispetto alle variazioni assolute di V_{BE} . Derivando I_{C} rispetto a V_{BE} e dividendo per I_{C} , come da definizione di sensibilita' semirelativa, si ha:

$$\begin{aligned} \tilde{S}^{I_{\text{C}}}_{V_{\text{BE}}} &= \frac{\partial I_{\text{C}}}{\partial V_{\text{BE}}} \frac{1}{I_{\text{C}}} = - \\ &= \frac{\beta_{\text{F}} \{R_{\text{E}} + (\beta_{\text{F}} + 1)R_{\text{E}}\}}{\{R_{\text{E}} + (\beta_{\text{F}} + 1)R_{\text{E}}\}} = - \frac{1}{V_{\text{E}} - V_{\text{BE}}} \end{aligned}$$

Per ridurre l'effetto delle variazioni di V_{BE} dovute per esempio alle variazioni di temperatura, si deve progettare il circuito in modo che $V_{\text{E}} \gg V_{\text{BE}}$. D'altra parte non si puo' salire troppo con la V_{E} perche' si aumenta la tensione sull'emettitore riducendo la dinamica di uscita dell'amplificatore.

Tensione di alimentazione

La tensione di alimentazione V_{AL} e' nascosta nella tensione equivalente della maglia di base: $V_{\text{E}} = V_{\text{AL}} \frac{R_2}{R_1 + R_2}$. Per calcolare le sensitivities rispetto a questa tensione, bisogna scrivere esplicitamente l'espressione della tensione equivalente e poi derivare rispetto alla tensione di alimentazione. Poiche' non c'e' nulla di divertente e di eccitante nel fare derivate semplici (**), viene fornito direttamente il risultato sia per la semirelativa che per la relativa.

$$\tilde{S}^{I_{\text{C}}}_{V_{\text{AL}}} = \frac{1}{V_{\text{AL}} - V_{\text{BE}}} \left(1 + \frac{R_1}{R_2} \right)$$

$$\bar{S}^{I_C}_{V_{AL}} = \frac{V_{AL}}{V_{BE}} \left(1 + \frac{R_1}{R_2} \right) = \frac{V_{eq}}{V_{BE}} - \frac{V_{BE}}{V_{eq}}$$

L'ultima espressione dice che poiche' la tensione V_{eq} deve essere abbastanza maggiore di V_{BE} , la sensibilita' relativa della corrente di collettore rispetto alle variazioni di tensione di alimentazione e' poco piu' di uno. Comunque con questo circuito non si puo' scendere piu' di tanto. Questo pero' non e' un grosso inconveniente, perche' se aumentando la tensione di alimentazione aumenta in modo praticamente uguale la corrente di collettore, la caduta di tensione sulla resistenza di collettore rimane una frazione fissa della tensione di alimentazione, mantenendo ottimizzata la dinamica.

Resistenze R1 e R2

In questo caso servono le sensibilita' relative. Purtroppo le espressioni che risultano per le sensibilita' relative sono pesanti da maneggiare, e non forniscono suggerimenti per un progetto. Si puo' pero' fare una semplificazione osservando che R_1 e R_2 compaiono in due punti nell'espressione di I_C sia in V_{eq} che in R_{eq}

$$I_C = \frac{V_{eq}}{R_{eq}} = \frac{V_{eq}}{R_1 + R_2 + (\beta_F + 1)R_E}$$

Poiche' in un buon progetto si ha $R_{eq} \ll (\beta_F + 1)R_E$ si puo' pensare di trascurare l'effetto della variazione delle resistenze su R_{eq} ma di conservarlo soltanto nel termine di V_{eq} . In questo modo la funzione che da' la corrente di collettore diventa:

$$I_C = \frac{V_{AL}}{R_1 + R_2} \frac{R_2}{R_1 + R_2 + (\beta_F + 1)R_E} - \frac{V_{BE}}{R_1 + R_2 + (\beta_F + 1)R_E}$$

Con questa approssimazione le sensitivity relative risultano:

$$\bar{S}^{I_C}_{R_1} \approx - \frac{R_1}{R_1 + R_2} \frac{V_{eq} - V_{BE}}{V_{eq}}$$

$$\bar{S}^{I_C}_{R_2} \approx + \frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{V_{eq} - V_{BE}}{V_{eq}}$$

Esempio su un circuito

Proviamo a fare i conti su questo circuito, progettato "a buon senso" in modo che abbia una corrente di collettore di circa 2mA

[Sorgente FidoCadJ](#) | [Ingrandisci](#) | [Cos'è FidoCad](#)

Le resistenze sono al $\pm 5\%$, il guadagno statico di corrente del transistor è compreso fra $120 < \beta_F < 300$ (questa non è una piccola variazione): si considera come valore nominale la media aritmetica dell'intervallo $\beta_F = 210$, con un intervallo di variazione relativo pari a $\Delta \beta_F = \pm 43\%$. La tensione di alimentazione può variare di $\Delta V_{AL} = \pm 15\%$ intorno al valore nominale $V_{ALn} = 12\text{V}$, la tensione $V_{BE} = (0.67 \pm 0.05)\text{V}$

Il progetto a buon senso prevede che si abbia sull'emettitore circa un $10 \div 20\%$ della tensione totale, che la tensione rimanente sia più o meno ugualmente suddivisa fra la resistenza di collettore e la tensione V_{CE} , e infine che la corrente nel partitore di base sia molto maggiore della corrente di base stessa. La corrente nominale trovata in simulazione è di 2.037mA . Da notare che in simulazione sono presenti molti più effetti secondari e non lineari non inclusi in questa analisi lineare.

Valutazione quantitativa

Valutiamo ora le sensitivities le cui espressioni sono state trovate in precedenza. I valori dell'equivalente Helmholtz-Thévenin sono

$$V_{eq} = 12\text{V} \frac{10\text{k}\Omega}{33\text{k}\Omega + 10\text{k}\Omega} = 2.79\text{V}$$

$$R_{eq} = 10\text{k}\Omega \parallel 33\text{k}\Omega = 7.67\text{k}\Omega$$

Le sensitivities ai vari parametri valgono:

$\bar{S}^I$

$$\bar{S}_{\beta_F}^I = \frac{R_{eq} + R_E}{R_{eq} + (\beta_F + 1)R_E} = \frac{7.67\text{k}\Omega + 1\text{k}\Omega}{7.67\text{k}\Omega + (210 + 1)1\text{k}\Omega} = 0.04$$

$$\bar{S}^{I_{\text{C}}}_{R_{\text{E}}} = -\frac{(\beta_{\text{F}}+1)R_{\text{E}}}{(210+1)1\text{k}\Omega} \frac{R_{\text{eq}}+(\beta_{\text{F}}+1)R_{\text{E}}}{7.67\text{k}\Omega+(210+1)1\text{k}\Omega} = -0.965$$

$$\tilde{S}^{I_{\text{C}}}_{V_{\text{BE}}} = -\frac{1}{2.79\text{V}-0.67\text{V}} \frac{V_{\text{eq}}-V_{\text{BE}}}{2.12\text{V}} = -0.472\text{V}^{-1}$$

$$\bar{S}^{I_{\text{C}}}_{V_{\text{AL}}} = \frac{V_{\text{eq}}}{V_{\text{BE}}} \frac{V_{\text{eq}}-V_{\text{BE}}}{2.79\text{V}-0.67\text{V}} = 1.32$$

$$\bar{S}^{I_{\text{C}}}_{R_1} = -\frac{R_1}{R_1+R_2} \frac{V_{\text{eq}}}{33\text{k}\Omega} \frac{V_{\text{eq}}-V_{\text{BE}}}{10\text{k}\Omega+33\text{k}\Omega} \frac{2.79\text{V}}{2.79\text{V}-0.67\text{V}} = -0.0043\%$$

$$\bar{S}^{I_{\text{C}}}_{R_2} = +\frac{R_1}{R_1+R_2} \frac{V_{\text{eq}}}{33\text{k}\Omega} \frac{V_{\text{eq}}-V_{\text{BE}}}{10\text{k}\Omega+33\text{k}\Omega} \frac{2.79\text{V}}{2.79\text{V}-0.67\text{V}} = +0.0043\%$$

Le possibili buone notizie sono che la sensibilità della corrente di collettore al variare del β_{F} sembra decisamente bassa, il che compensa le ampie variazioni del parametro. La risposta alle variazioni di V_{BE} potrebbe essere importante, ma per ridurla bisognerebbe sacrificare dinamica di uscita. Le altre sensitività sono dalle parti di 1, e dipendono da resistenze (o tensioni di alimentazione). Potrebbe essere necessario usare delle resistenze di precisione o una stabilizzazione della tensione di alimentazione.

Calcoliamo ora gli errori dei singoli contributi:

$$\Delta I_{\text{C}} = \bar{S}^{I_{\text{C}}}_{\beta_{\text{F}}} \Delta \beta_{\text{F}} = 0.04 \cdot (\pm 43\%) = \pm 1.7\%$$

questa sensibilità è calcolata ben oltre al normale campo di validità dell'approssimazione lineare.

Il risultato della simulazione della variazione di β_{F} è mostrato in questa figura:

[Sens1.png](#)

Sens1.png

In ascissa c'è il β_F , che varia da 120 a 300, in ordinata la percentuale di errore della corrente di collettore. Si nota che, essendo usciti dal campo di linearità, la curva presenta un errore più limitato verso destra (1.4%), e maggiore verso sinistra (-2.5%).

Variazione con la resistenza R_E si calcola come in precedenza. In questo caso ci si attende una variazione relativa di corrente

$$\frac{\Delta I_C}{I_C} = \bar{S}^{I_C}_{R_E} \frac{\Delta R_E}{R_E} = -0.965 \cdot \pm 5\% = \pm 0.0483 = 4.83\%$$

[Sens3.PNG](#)

Sens3.PNG

La simulazione spice indica che vi è una leggera non linearità, e l'errore relativo si sviluppa fra +5% quando la resistenza è al valore minimo e -4.5% quando la resistenza è al valore massimo.

La variazione relativa di corrente di collettore rispetto alla variazione della tensione V_{BE} vale:

$$\frac{\Delta I_C}{I_C} = \tilde{S}^{I_C}_{V_{BE}} \frac{\Delta V_{BE}}{V_{BE}} = -0.472 \cdot \frac{\Delta V_{BE}}{V_{BE}} = \pm 0.0236 = 2.56\%$$

Il risultato della simulazione è in figura:

[Sens2.PNG](#)

Sens2.PNG

In ascissa la variazione della tensione base emettitore, in ordinata il corrispondente cambiamento percentuale della corrente di collettore, misurato in $\pm 2.53\%$, con ottima aderenza al calcolo. La variazione di tensione è stata ottenuta per mezzo di un generatore in serie alla base. Cambiare la V_{BE} cambiando la temperatura avrebbe cambiato anche il valore del β_F . In questo modo si tengono separate le cause di variazione.

La variazione della corrente di collettore al variare della tensione di alimentazione è data da:

$$\frac{\Delta I_C}{I_C} = \bar{S}^{I_C}_{V_{AL}} \frac{\Delta V_{AL}}{V_{AL}} = 1.32 \cdot \pm 15\% = \pm 19.8\%$$

La simulazione fornisce questo risultato:

[Sens4.PNG](#)

Sens4.PNG

In ascissa e' rappresentata la percentuale dell'errore della tensione di alimentazione, in ordinata l'errore percentuale della corrente di collettore: in questo caso in perfetto accordo con i conti.

Infine restano da verificare i conti per le due resistenze del partitore di base. Durante i calcoli si era fatta una approssimazione, trascurando le variazioni della resistenza R_1 . Il simulatore non teneva conto di questa approssimazione.

$$\frac{\Delta I_C}{I_C} = \bar{S}^{I_C}_{R_1}, \Delta R_1 = -1.01 \cdot (\pm 5\%) = \mp 5.1\%$$

$$\frac{\Delta I_C}{I_C} = \bar{S}^{I_C}_{R_1}, \Delta R_1 = 1.01 \cdot (\pm 5\%) = \pm 5.1\%$$

I risultati della simulazione sono in figura

[SENS5.PNG](#)

SENS5.PNG

In ascissa la variazione percentuale di R_1 ed R_2 e in ordinata la variazione percentuale delle correnti di collettore. La curva in salita si riferisce ad R_2 mentre quella in discesa si riferisce a R_1

Conclusioni

Anche se i conti sono un po' pesanti, l'informazione che se ne ricava e' importante, perche' non solo dice quali saranno le prestazioni del circuito, ma indica anche dove agire nel caso le prestazioni fossero insufficienti.

Nel caso della polarizzazione di uno stadio bipolare a discreti, questo metodo di calcolo e' piu' o meno solo una curiosita' (ma non sempre). Nei prossimi esempi vedremo l'analisi delle sensitivity applicata ai filtri attivi e agli amplificatori differenziali.

Riferimenti

[1] IsidoroKZ - [Sensitivity I - Definizioni e applicazioni](#) - ElectroYou

[2] Sedra - Smith - Microelectronic Circuits [Oxford, Chapt. 6.7](#)

NOTE

(*) La corrente di collettore in un transistor che lavora in zona attiva diretta, e' una funzione non lineare della corrente di base $I_C = I_C(I_B)$ e dipende anche da tante altre cause, temperatura, tensione V_{CE} , storia passata del transistor, cioe' maltrattamenti che ha subito, specie valanga della giunzione base-emettitore.

Inoltre fra un transistor e l'altro il guadagno di corrente e' enormemente variabile, dipende da "come e' venuto". La formula $I_C = \beta_F I_B$ e' una molto grossolana modellazione del comportamento del transistor.

Per queste ragioni un buon progetto non deve essere basato sul valore del beta: qualunque suo valore, ragionevole, deve far funzionare il circuito. E' molto piu' scientifico credere a Babbo Natale piuttosto che a $I_C = \beta_F I_B$ con un valore di guadagno costante e conosciuto.

(**) Confesso: per calcolare le derivate, semplificare le espressioni et similia, ho usato un programma di manipolazione algebrica, Derive.

Estratto da "<https://www.electroyou.it/mediawiki/index.php?title=UsersPages:Isidorokz:sensitivity-ii-esempi-di-calcolo>"