



Isidoro KZ (IsidoroKZ)

## SENSITIVITY I - DEFINIZIONI E APPLICAZIONI

28 November 2010

### Introduzione

In questo articolo sarà introdotto il concetto di **sensitivity** (sensibilità) usato in elettronica per valutare l'influenza del cambiamento di un parametro, componente, grandezza su una funzione del sistema. Ad esempio i cambiamenti possono essere dovuti alle **tolleranze** dei componenti rispetto al loro valore nominale, invecchiamento, variazioni della temperatura, cambiamenti della tensione di alimentazione... mentre le funzioni sulle quali vogliamo valutare l'effetto possono essere ad esempio la corrente attraverso un led, la tensione di collettore di un transistor, la frequenza e il Q di un filtro, la variazione di guadagno di un amplificatore...

La conoscenza delle sensitivity permette di sapere in fase di progetto quali saranno i **componenti critici** per il risultato finale, permette di calcolare quale sarà l'errore atteso sul risultato, o quanto possiamo variare un parametro prima che le sensitivities diventino troppo deleterie. Sapendo quali sono i componenti critici in fase di **progetto**, si può modificare il progetto in modo da ottenere un circuito più robusto ad esempio alle tolleranze e alle derive.

Questi articoli saranno orientati all'elettronica circuitale: saranno prima definite le funzioni di sensibilità, per poi passare ad esempi concreti su circuiti che mostrano che cosa ci si può aspettare come effetto delle tolleranze e derive dei componenti.

La teoria sviluppata sarà lineare, e quindi i risultati quantitativi saranno applicabili solo per "piccole" tolleranze e derive.

La sensitivity analysis è un strumento non usato solo in elettronica, ma anche in svariati altri campi scientifici, economici [1]. La trattazione di questo articolo sarà lineare, ma esistono trattazioni non lineari come ad esempio descritte in [2]. Una introduzione generale alla sensitivity analysis è in [3].

## Motivazione

Quando si monta un circuito del quale abbiamo lo schema, si spera sempre che alla fine funzioni correttamente. Tipicamente se il progetto è buono e non si commettono errori durante il montaggio, il circuito funziona! In qualche caso però, anche avendo fatto un buon montaggio, il risultato non è quello che ci si aspettava. La cosa curiosa è che montando più esemplari dello stesso circuito, qualche esemplare funziona correttamente, in altri casi invece non va.

Una delle cause di questo comportamento inaspettato è la tolleranza dei componenti che si utilizzano: un resistore da  $1\text{ k}\Omega$  non ha una resistenza esattamente pari al suo valore nominale, ma è soggetto a una tolleranza. È possibile che un circuito mal progettato, con un insieme sfortunato di tolleranze dei componenti, si comporti decisamente fuori dalle prestazioni attese.

In fase di progettazione è necessario prevedere le criticità ed eventualmente ridurle per aumentare la robustezza del circuito. La valutazione di quanto è robusto il circuito al variare dei parametri può essere fatta, sia calcolando le sensitivity del circuito, in forma numerica oppure analitica, sia facendo analisi di worst case e analisi Montecarlo. Queste due analisi non saranno trattate in questi articoli.

## Sensitivity o Sensibilità

Supponiamo di avere una funzione di più variabili, ad esempio  $I = f(R_1, R_2, V_{BE}, V_{AL})$  potrebbe essere una corrente che dipende dal valore di resistenze, dalla tensione  $V_{BE}$  di un transistor o dalla tensione di alimentazione. Vogliamo trovare di quanto varia  $I$  al variare di ciascuna di quelle grandezze. Vogliamo trovare ad esempio un legame fra la variazione di  $I$  e la variazione di una resistenza  $R$ . Per le tensioni il discorso è identico.

I legami fra variazioni di un parametro e variazioni di una grandezza dipendente si chiamano sensitivities (non si fa il plurale dei nomi inglesi in italiano, ma ogni tanto mi scappa) indicati ad esempio  $S_{R_1}^I$  che significa la sensibilità di  $I$  alle variazioni di  $R_1$ .

## Variazioni assolute e relative

Le variazioni di  $R$  e  $I$  possono essere variazioni assolute, ad esempio da  $10\text{ k}\Omega$  la resistenza aumenta di  $200\ \Omega$ , oppure variazioni relative, ad esempio la variazione della resistenza è del  $2\%$ . Analogamente possiamo essere interessati alla variazione della corrente  $I$  in termini assoluti, e variata di  $3\text{ mA}$ , oppure in termini relativi, e variata del  $7\%$ .

Il valore effettivo di  $R_1$  può essere ad esempio scritto come  $R_1 = R_{1n} + \Delta R_1$ , dove  $R_{1n}$  è il

valore nominale di  $R_1$  e  $\Delta R_1$  e' la variazione assoluta di  $R_1$  che ovviamente si misura in ohm. Pero' possiamo anche scrivere  $R_1 = R_{1n}(1 + \delta_{R_1})$  in questo caso  $\delta_{R_1}$  e' la variazione relativa (anche detta percentuale) di  $R_1$  e la si misura in "niente", e' adimensionata. Se la tolleranza di  $R_1$  e' del 2%, avremo  $\delta_{R_1} = 0.02$ .

La variazione assoluta e percentuale sono legate fra di loro da questa relazione:  $\delta_{R_1} = \frac{\Delta R_1}{R_{1n}}$ .

Nel seguito usero' la notazione con  $\Delta$  per indicare le variazioni assolute, tipicamente quindi con dimensioni associate, mentre usero'  $\delta$  per le variazioni relative, sempre adimensionate.

La stessa cosa vale per tutte le altre grandezze, in particolare anche  $I$  potremo scriverlo come  $I = I_n + \Delta I = I_n(1 + \delta_I)$  dove  $I_n$  e' il valore nominale di  $I$ .

Entrambi i modi di scrivere questi errori sono corretti ed esprimono lo stesso fenomeno, in qualche caso e' piu' conveniente usarne uno in qualche altro meglio usare l'altro.

Ad esempio e' naturale con le resistenze usare l'errore relativo, dato che la loro tolleranza e' normalmente data in percentuale, e anche i guadagni spesso vengono trattati con le variazioni relative. Un guadagno che vari di 3 unita', varia di molto o di poco? Se e' un guadagno di 2 volte che diventa 5 volte, e' una grande variazione, se invece un guadagno passa da 1000 a 1003 probabilmente nessuno se ne accorge. Dare la tolleranza dei guadagni in forma relativa e' equivalente ad indicare l'errore in decibel.

Altre grandezze invece vengono trattate con le variazioni assolute: ad esempio la variazione della tensione  $V_{BE}$  di un transistor bipolare vengono date di solito in valore assoluto: ad esempio  $\Delta V_{BE} = -12 \text{ mV}$ . Le variazioni di temperatura sono sempre date in valore assoluto.

Variazioni di una tensione di riferimento o di alimentazione possono essere date in percentuale o in valore assoluto. Variazioni della frequenza di taglio di un filtro, della corrente di polarizzazione di uno stadio di solito sono indicate come errore relativo.

Abbiamo quindi 4 possibili combinazioni di variazioni assolute o relative: variazione assoluta o relativa della grandezza che ci interessa, ad esempio  $I$ , verso una variazione assoluta o relativa del parametro che stiamo considerando, ad esempio  $R_1$ .

### **Absolute Sensitivity**

Cerchiamo ad esempio la variazione assoluta della funzione  $I$  al variare assoluto ad esempio di  $R_1$ . Supponiamo di poter scrivere questo legame in forma lineare, diciamo cioe' che la variazione di corrente e' uguale alla variazione di resistenza moltiplicata per una costante che e' appunto

la sensitivity. Avremo cioè  $\Delta I = S_{R_1}^I \Delta R_1$ . Il valore della sensitivity è dato dal rapporto fra variazione della corrente e variazione della resistenza:  $S_{R_1}^I = \frac{\Delta I}{\Delta R_1}$

In generale non si ha un coefficiente  $S_{R_1}^I$  fisso perché essa dipende in modo non più o meno complicato dal valore degli altri componenti, dal punto di funzionamento...

Pero, se consideriamo delle *piccole variazioni* dei parametri, anzi, meglio delle piccolissime variazioni, sempre più piccole, ecco che  $S_{R_1}^I$  diventa una costante che dipende solo dai valori nominali dei componenti. In pratica dobbiamo calcolare  $S_{R_1}^I = \lim_{\Delta R_1 \rightarrow 0} \frac{\Delta I}{\Delta R_1} = \left. \frac{\partial I}{\partial R_1} \right|_{\text{nom}}$ .

La derivata che rappresenta la sensibilità assoluta deve essere valutata con tutti i valori e parametri nominali.

La sensitivity appena calcolata si chiama absolute sensitivity, perché lega le due variazioni assolute, e non è nient'altro che la derivata della funzione che ci interessa, qui  $I$  rispetto al parametro che stiamo considerando ( $R_1$ ). La derivata deve essere calcolata con i valori nominali dei parametri.

Le unità di misura della sensibilità assoluta sono quelle della derivata. Ad esempio  $\frac{\partial I}{\partial R_1}$  ha le dimensioni di una corrente diviso per una resistenza, e la sensitivity  $S_{R_1}^I$  si misura quindi un milliampere diviso ohm. Se calcolassimo la variazione assoluta della corrente  $I$  in funzione di una variazione assoluta della tensione di alimentazione  $V_{AL}$  la sensitivity  $S_{V_{AL}}^I$  avrebbe le dimensioni di una conduttanza e sarebbe misurata in ampere diviso volt, cioè in siemens.

### Relative Sensitivity

Come detto prima, le variazioni assolute non sempre sono utili, più spesso si usano e sono più significative le variazioni relative. Se una resistenza cambia di  $1 \Omega$  è tanto o è poco? Non si può dire. Se la resistenza era da  $2.2 \Omega$ , è una variazione enorme, se era da  $1 M\Omega$  nessuno si accorge di quella variazione.

Per trovare la sensibilità relativa basta fare il rapporto fra le variazioni relative delle due grandezze:

$$\bar{S}_{R_1}^I = \frac{\delta I}{\delta R_1} = \frac{\Delta I}{I_n} \bigg/ \frac{\Delta R_1}{R_{1n}} = \frac{\Delta I}{\Delta R_1} \frac{R_{1n}}{I_n}$$

Non c'è, che io sappia, una convenzione per indicare le sensitivity assolute e relative. Qui uso la barra per quelle relative (e la tilde per le semirelative).

Anche in questo caso il sistema potrebbe essere non lineare, e per non avere problemi dalle non linearita` e ottenere una sensitivity sotto forma di numero, si prende il limite per le variazioni che tendono a zero valutando il valore della derivata nelle condizioni nominali:

$$\bar{S}_{R_1}^I = \lim_{\Delta R_1 \rightarrow 0} \frac{\Delta I}{\Delta R_1} \frac{R_{1n}}{I_n} = \left. \frac{\partial I}{\partial R_1} \right|_{\text{nom}} \frac{R_{1n}}{I_n}$$

Anche in questo caso la derivata e` calcolata con i valori nominali dei parametri, come mostrato dal pedice **nom** della derivata. Una sensibilita` relativa e` sempre adimensionata, essendo il rapporto fra due variazioni percentuali.

per i matematici incalliti, la sensibilita` relativa puo` anche scriversi in questo modo:

$$\bar{S}_{R_1}^I = \left. \frac{\partial \ln(I)}{\partial \ln(R_1)} \right|_{\text{nom}}$$

dove si mette in evidenza il fatto che quando si passa ai logaritmi, cioe` a grandezze tipo decibel, si passa automaticamente a parlare di variazioni relative.

In pratica la sensibilita` relativa puo` essere calcolata applicando l'espressione di sopra, oppure specie se si va per via numerica, partendo dalla sensibilita` assoluta e moltiplicandola e dividendola per i valori nominali delle grandezze in esame:

$$\bar{S}_{R_1}^I = S_{R_1}^I \frac{R_{1n}}{I_n}$$

Per trovare le variazioni, una volta che si sa il valore di  $\bar{S}_{R_1}^I$  e` facile:

$$\frac{\Delta I}{I_n} = \bar{S}_{R_1}^I \frac{\Delta R_1}{R_{1n}} \text{ oppure in modo piu` compatto } \delta_I = \bar{S}_{R_1}^I \delta_{R_1}$$

### Sensibilita` semirelative

Ci sono poi ancora le sensibilita` semirelative, si ricavano in modo analogo, considerando una variazione assoluta e una relativa. Non c'e` un simbolo univoco per le sensibilita` semirelative. In questo contesto le indico con una tilde, ma spesso non ci sono distinzioni grafiche fra sensibilita` assolute, relative e semirelative.

Ad esempio la variazione relativa della corrente in funzione della variazione assoluta della tensione di alimentazione  $V_{AL}$  ha questa espressione:

$$\tilde{S}_{V_{AL}}^I = \left. \frac{\partial I}{\partial V_{AL}} \right|_{\text{nom}} \frac{1}{I_n} = \left. \frac{\partial \ln(I)}{\partial V_{AL}} \right|_{\text{nom}}$$

Oppure c'è anche l'altra sensibilità semirelativa, data dalla variazione assoluta della grandezza che ci interessa (in questo caso la corrente) in funzione della variazione relativa di uno dei parametri da cui dipende, ad esempio una resistenza:  $\tilde{S}_{R_1}^I = \left. \frac{\partial I}{\partial R_1} \right|_{\text{nom}} R_{1n} = \left. \frac{\partial I}{\partial \ln(R_1)} \right|_{\text{nom}}$

La prima è la sensibilità semirelativa che fornisce le variazioni relative (percentuali) di  $I$  rispetto alle variazioni assolute di  $V_{AL}$ , mentre la seconda è la sensibilità semirelativa (stesso nome :) che dà le variazioni assolute di  $I$  rispetto alle variazioni relative (percentuali) di  $R_1$ .

La sensitivity  $\frac{\partial I}{\partial V_{AL}} \frac{1}{I_n}$  è misurata in reciproco di volt, mentre  $\frac{\partial I}{\partial R_1} R_{1n}$  ha le unità di misura di  $I$  e quindi ampere.

Tutti questi conti e derivazioni dovrebbero essere fatti con gli sviluppi in serie di Taylor a più dimensioni, ma probabilmente non ne vale la pena (avevo cominciato così, poi mi è parso più opportuno semplificare. **SI** questa è la versione semplificata :) per una trattazione di questo caso vedere [2].

Le variazioni dei componenti che si trovano in elettronica sono fortunatamente piccole, e quindi non servono le higher order sensitivities. Gli interessati e i masochisti (i due insieme praticamente coincidono) vengono mandati a [2] e [3]. Il testo [4] è abbastanza tosto!

## Esempio

Consideriamo come primo esempio di voler valutare la stabilità della corrente attraverso una stringa di led collegata a una tensione di alimentazione variabile e con una resistenza di limitazione, come mostrato in questa figura.



Supponiamo che la tensione nominale di alimentazione sia  $V_{AL} = 14 \text{ V}$ , quella su ciascun diodo  $V_{AL} = 2.2 \text{ V}$  e che la resistenza, calcolata con la formula  $R_1 = \frac{V_{AL} - nV_{\text{led}}}{I_{\text{led}}}$  sia di  $150 \Omega$  per ottenere una corrente nominale  $I_n = 20 \text{ mA}$ .

Il valore della corrente è  $I = \frac{V_{AL} - nV_{\text{led}}}{R_1}$  ed è evidente che la corrente di alimentazione dipende dalla resistenza, dalla tensione di alimentazione e da quella dei led. Calcolando le sensitivities è possibile determinare di quanto varia questa corrente, quali sono i fattori che generano le variazioni più grandi e come si possano eventualmente ridurre alcune di queste sensitivity.

Nell'ambito di questa presentazione si fara` variare solo sempre un parametro per volta. E` possibile anche calcolare l'effetto di due variazioni contemporanee, ma per questa tecnica, piu` complicata, si rimanda alla bibliografia.

### Calcolo sensitivity assolute

Cominciamo a calcolare le sensibilita` assolute della corrente  $I_{\text{led}}$  rispetto a  $V_{AL}$ ,  $V_{\text{led}}$  e  $R_1$ . In pratica si tratta di calcolare tre derivate di  $I_{\text{led}}$  in funzione delle tre variabili.

$$S_{V_{AL}}^I = \frac{\partial I_{\text{led}}}{\partial V_{AL}} = \frac{\partial}{\partial V_{AL}} \left( \frac{V_{AL} - nV_{\text{led}}}{R_1} \right) = \frac{1}{R_1} = \frac{1}{150 \Omega}$$

$$S_{V_{\text{led}}}^I = \frac{\partial I_{\text{led}}}{\partial V_{\text{led}}} = \frac{\partial}{\partial V_{\text{led}}} \left( \frac{V_{AL} - nV_{\text{led}}}{R_1} \right) = -\frac{n}{R_1} = -\frac{n}{150 \Omega}$$

$$S_{R_1}^I = \frac{\partial I_{\text{led}}}{\partial R_1} = \frac{\partial}{\partial R_1} \left( \frac{V_{AL} - nV_{\text{led}}}{R_1} \right) =$$

$$= -\frac{V_{AL} - nV_{\text{led}}}{R_1^2} = -0.133 \text{ mA}/\Omega$$

Da ricordare che le sensitivity sono delle costanti, vanno calcolate con i parametri nominali del circuito.

Una verifica rapida sul segno delle sensitivity e` facile da farsi. Si immagina di aumentare il valore del componente o del parametro e di solito si vede immediatamente se la grandezza che si sta analizzando aumenta o diminuisce, da cui il segno della sensitivity e` rispettivamente positivo o negativo. Se non e` immediato vedere l'effetto del cambiamento del componente o parametro, si puo` sempre immaginare di farlo tendere a infinito o zero.

Se ad esempio  $V_{AL}$  cresce, si vede dal circuito che anche la corrente aumenta, e quindi  $S_{V_{AL}}^I$  ha segno positivo. Se invece e`  $R_1$  ad aumentare (eventualmente andando a infinito), la corrente che circola diminuisce (eventualmente andando a zero), e quindi  $S_{R_1}^I$  ha segno negativo.

Il significato della prima sensitivity  $S_{V_{AL}}^I = \frac{1}{150 \Omega}$  e` immediato: se la tensione di alimentazione aumenta ad esempio di  $\Delta V = 1 \text{ V}$ , la corrente nei led aumenta di  $\Delta I = S_{V_{AL}}^I \Delta V_{AL} = \frac{1 \text{ V}}{150 \Omega} = 6.7 \text{ mA}$ . E` questa una variazione accettabile? Solo questo valore non e` significativo, bisogna confrontarlo con la corrente nominale del led. Una variazione di  $6.7 \text{ mA}$  su un corrente di  $350 \text{ mA}$  e` quasi sicuramente accettabile, mentre la stessa variazione di  $6.7 \text{ mA}$  riferita a una corrente di  $20 \text{ mA}$  e` quasi sicuramente inaccettabile.

Si vede che in questo caso e' piu' opportuno passare alla variazione semirelativa della corrente, in quanto e' piu' significativa. Prima di proseguire, proviamo a scrivere in modo diverso questa sensitivity. Sapendo l'espressione che ci ha permesso di calcolare  $R_1$ , possiamo scrivere

$$S_{V_{AL}}^I = \frac{1}{R_1} = \frac{I_{\text{led}}}{V_{AL} - nV_{\text{led}}}$$

Il solo grado di liberta' che abbiamo in questa espressione e'  $n$ , il numero di led collegati in serie, le altre grandezze essendo imposte dalle specifiche del progetto. Se si vuole ridurre la variazione di corrente al variare della tensione di alimentazione, bisogna mettere pochi led in serie. Questo risultato era gia' stato empiricamente trovato in [5], qui e' anche dimostrato.

La seconda sensitivity  $S_{V_{\text{led}}}^I = -\frac{n}{150\Omega}$  ha un fattore  $n$  a numeratore perche' si puo' verificare il caso di una variazione uguale della tensione di led per tutti i led, ad esempio un cambiamento di temperatura e in questo caso si pone  $n = 5$ , oppure la stessa espressione potrebbe essere usata per calcolare la variazione in seguito alle tolleranze del singolo componente. In quest'ultimo caso si pone  $n = 1$ .

Ad esempio supponendo che i led utilizzati abbiano un coefficiente termico di  $-3 \text{ mV/K}$  e che ci sia una variazione di temperatura ambiente di  $30 \text{ K}$ , ogni led deriva in tensione di  $-90 \text{ mV}$ . La variazione di corrente che si verifica vale:  $\Delta I = -\frac{5}{150\Omega}(-90 \text{ mV}) = 3 \text{ mA}$ . Al solito una variazione "da sola" ha poco significato, va riferita alla grandezza nominale.

Vediamo infine l'ultima sensibilita' assoluta, che da' la variazione assoluta di corrente al variare della resistenza  $R_1$ . Supponendo di avere una variazione  $R_1$  pari a  $\Delta R_1 = 10 \Omega$  possiamo calcolare la variazione di corrente  $\Delta I = S_{R_1}^I \Delta R_1 = -0.133 \text{ mA}/\Omega \cdot 10 \Omega = -1.33 \text{ mA}$

Anche in questo caso il valore da solo ha poco significato, va confrontato con in parametri nominali. Se si prende l'espressione di questa sensitivity  $S_{R_1}^I = -\frac{V_{AL} - nV_{\text{led}}}{R_1^2}$  e si sostituisce al posto di  $R_1$  la sua espressione che si ha nella formula di progetto, si ottiene:

$$S_{R_1}^I = -\frac{I_{\text{led}}^2}{V_{AL} - nV_{\text{led}}}$$

In questa formula tutti i parametri sono vincolati dalle specifiche, tranne il numero  $n$  di led che si mettono in serie. Se si vuole ridurre in modulo questa sensibilita', bisogna ridurre  $n$ , a detrimento dell'efficienza.

### Calcolo delle Sensibilita' semirelative e relative

Si e' visto nella sezione precedente che le variazioni assolute della corrente non sono significative per stabilire la bonta' della stabilizzazione, e' necessario valutare la variazione relativa della



corrente dei led. La variazione della tensione di alimentazione puo` essere specificata sia come variazione assoluta o relativa, entrambe le versioni sono utilizzate. Per le variazioni della tensione di led invece di solito si va su variazioni assolute.

Si deve quindi calcolare la sensitivity semirelativa della corrente di led rispetto alle variazioni assolute di di  $V_{AL}$  e di  $V_{led}$  e le variazioni relative di  $I_{led}$  rispetto alle variazioni relative di  $V_{AL}$  e di  $R_1$ .

Le derivate sono gia` state calcolate nella sezione precedente, qui aggiungero` solo i fattori necessari per passare da assoluto a (semi)relativo. Cominciamo con la variazione relativa della corrente rispetto alla variazione assoluta della tensione di alimentazione:

$$\begin{aligned}\tilde{S}_{V_{AL}}^I &= \frac{\partial I_{led}}{\partial V_{AL}} \frac{1}{I_{led}} = \frac{1}{R_1} \frac{R_1}{V_{AL} - nV_{led}} = \frac{1}{V_{AL} - nV_{led}} = \\ &= \frac{1}{14\text{ V} - 5 \cdot 2.2\text{ V}} = \frac{1}{3\text{ V}} = 0.33\text{ V}^{-1} = 33\%/V\end{aligned}$$

Un volt di variazione di tensione di alimentazione fa cambiare la corrente di led del **33%**! una enormita`, a meno che la tensione di alimentazione non sia stabilizzata, questa non e` una buona soluzione. Il colpevole di questa cattiva prestazione e`  $n$  che ancora una volta si dimostra troppo grande.

Questa sensitivity poteva anche essere calcolata direttamente per via numerica, sapendo che la corrente nominale e`  $I_{led} = 20\text{ mA}$  si ha:

$$\tilde{S}_{V_{AL}}^I = \frac{\partial I_{led}}{\partial V_{AL}} \frac{1}{I_{led}} = \frac{1}{150\ \Omega} \frac{1}{20\text{ mA}} = \frac{1}{3\text{ V}}$$

Questo modo di procedere e` piu` rapido, ma non mostra quali sono i vincoli che portano a quel risultato ne' i gradi di liberta`, in questo caso il numero di led in serie, che ha il progettista per mitigare il problema.

Con passaggi analoghi si trova la sensibilita` semirelativa della corrente rispetto alla tensione di led. Anche in questo caso il fattore  $n$  sara` pari a 1 se si tratta della tolleranza di ogni singolo led, e pari a 5 se si analizza una causa di variazione comune a tutti i led, come ad esempio la temperatura.

$$\tilde{S}_{V_{led}}^I = \frac{\partial I_{led}}{\partial V_{led}} \frac{1}{I_{led}} = \frac{n}{14\text{ V} - n \cdot 2.2\text{ V}} = -(0.085 \div 1.67)\text{ V}^{-1}$$

Nel caso considerato prima di una variazione di  $-90\text{ mV}$  su tutti i led, si ottiene  $\frac{\Delta I}{I} = \tilde{S}_{V_{led}}^I \cdot \Delta V_{led} = -1.67\text{ V}^{-1} \cdot 90\text{ mV} = 0.15 = 15\%$

Le sensibilita` relative si calcolano in modo analogo, applicando la definizione e sostituendo le espressioni, oppure sostituendo direttamente i valori numerici delle grandezze nominali nel

risultato della derivata e degli altri fattori. Al solito il primo modo di procedere puo` dare piu` informazioni sui fattori limitanti. Calcoliamo dapprima la sensibilita` relativa della corrente rispetto alla tensione di alimentazione, usando il risultato della derivata gia` calcolato in precedenza.

$$\begin{aligned}\bar{S}_{V_{AL}}^I &= \frac{\partial I_{\text{led}}}{\partial V_{AL}} \frac{V_{AL}}{I_{\text{led}}} = \frac{1}{R_1} \frac{V_{AL} R_1}{V_{AL} - nV_{\text{led}}} = \frac{V_{AL}}{V_{AL} - nV_{\text{led}}} = \\ &= \frac{14\text{V}}{14\text{V} - 5 \cdot 2.2\text{V}} = \frac{14\text{V}}{3\text{V}} = 4.67\end{aligned}$$

**OUCH!** Questo risultato ci dice che se la tensione di alimentazione cambia del 5%, la corrente nei led cambia del  $5\% \cdot 4.67 = 23.3\%$ . Al solito il colpevole e` il piccolo valore del denominatore, in particolare la scelta di mettere 5 led in serie non e` una buona scelta. O si riduce il numero di led, o si passa a una regolazione elettronica.

L'ultima sensibilita` relativa da calcolare e` la variazione relativa della corrente dovuta alla tolleranza della resistenza  $R_1$ , tolleranza data ovviamente in percentuale. Procedendo in modo analogo a prima si ha:

$$\bar{S}_{R_1}^I = \frac{\partial I_{\text{led}}}{\partial R_1} \frac{R_1}{I_{\text{led}}} = -\frac{V_{AL} - nV_{\text{led}}}{R_1^2} R_1 \frac{R_1}{V_{AL} - nV_{\text{led}}} = -1$$

Questo risultato e` facile da interpretare: se la resistenza  $R_1$  ha un errore dovuto alla tolleranza di  $+\delta\%$ , la corrente avra` un errore di  $-\delta\%$ .

### Mettiamo insieme i pezzi

Dopo aver trovato le varie sensibilita`, possiamo calcolare l'errore complessivo del sistema linearizzato. Supponiamo che la resistenza di limitazione abbia una tolleranza  $\delta_{R_1} = \pm 0.05 = \pm 5\%$ , la tensione di alimentazione sia precisa entro il 3%, cioe`  $\delta_{V_{AL}} = \pm 0.03 = \pm 3\%$  e che ciascuno dei 5 led abbia una possibile variazione di tensione di  $\Delta V_{\text{led}} = \pm 50\text{ mV}$ . Con questi dati calcoliamo l'errore relativo della corrente di led, corrente che nominalmente dovrebbe essere di 20 mA

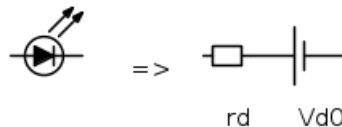
$$\begin{aligned}\frac{\Delta I}{I} = \delta_I &= \bar{S}_{R_1}^I \delta_{R_1} + \bar{S}_{V_{AL}}^I \delta_{V_{AL}} + \tilde{S}_{V_{\text{led}}}^I \Delta V_{\text{led}} = \\ &= -1(\pm 0.05) + 4.67(\pm 0.03) - 1.67\text{V}^{-1}(\pm)50\text{ mV} = \\ &= \pm 0.05 \pm 0.14 \pm 0.084 = \pm 0.273 = \pm 27.3\%\end{aligned}$$

L'errore totale ha come contributo piu` importante la tolleranza della tensione di alimentazione, seguito dalla tolleranza della tensione dei led, e infine il fattore meno importante e` la tolleranza della resistenza di limitazione di corrente.

### Led a tensione variabile

Fino a questo punto abbiamo considerato i led a tensione fissa (tranne per tolleranze e derive), mentre in realta` i led hanno una tensione variabile con la corrente. Il legame  $V_{\text{led}} = V(I_{\text{led}})$  e` un legame non lineare abbastanza difficile da modellare con una equazione analitica. E` possibile tuttavia usare, analogamente ai diodi, un modello lineare a tratti, che rispecchia il comportamento reale un po' piu` fedelmente di un semplice modello a tensione costante.

Dalle caratteristiche del led che danno  $1.9\text{V} @ 7\text{mA}$  e  $2.2\text{V} @ 20\text{mA}$ , e` possibile ricavare un modello lineare formato da una batteria con una resistenza in serie:



I valori dei parametri sono dati da  $r_d = \frac{2.2\text{V} - 1.9\text{V}}{20\text{mA} - 7\text{mA}} = 23.1\ \Omega$  e il valore della batteria e` dato da:  $V_{d0} = 1.9\text{V} - r_d \cdot 7\text{mA} = 1.74\text{V}$

A questo punto si puo` scrivere l'equazione che fornisce la corrente dei led in questo modo:

$$I_{\text{led}} = \frac{V_{AL} - 5 \cdot V_{d0}}{R_1 + 5 r_d}$$

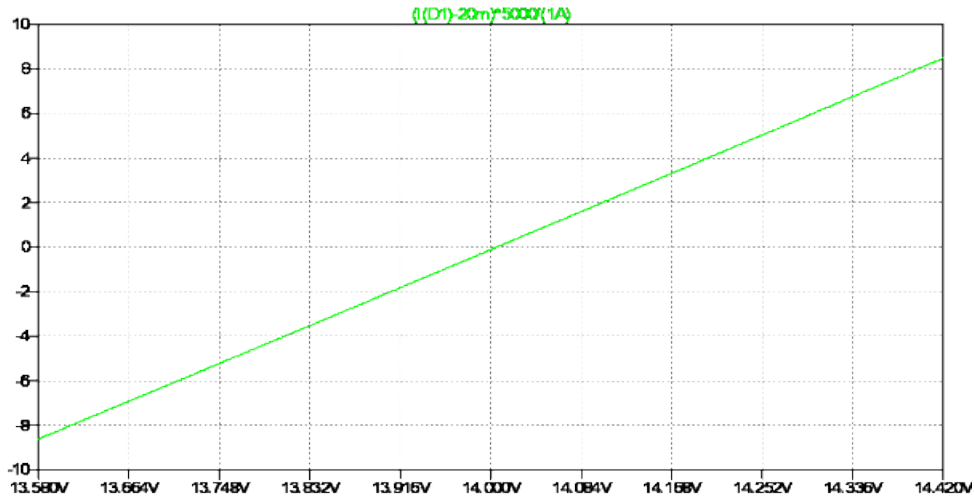
I conti sono analoghi ai precedenti, con alcune differenze numeriche. Ad esempio la sensibilita` relativa della corrente rispetto alla tensione di alimentazione diventa

$$\begin{aligned} \bar{S}_{V_{AL}}^I &= \frac{\partial I_{\text{led}}}{\partial V_{AL}} \frac{V_{AL}}{I_{\text{led}}} = \frac{1}{R_1 + 5 r_d} \frac{V_{AL}(R_1 + 5 r_d)}{V_{AL} - 5 V_{d0}} = \frac{V_{AL}}{V_{AL} - 5 V_{d0}} = \\ &= \frac{14\text{V}}{14\text{V} - 5 \cdot 1.74\text{V}} = \frac{14\text{V}}{5.3\text{V}} = 2.64 \end{aligned}$$

Come si vede, usando anche solo un modello abbastanza crudo del led, si ottengono risultati piu` ragionevoli e e` vicini alla realta`. La variazione relativa della corrente, con una variazione del 3% della tensione di alimentazione vale adesso  $\delta_I = \bar{S}_{V_{AL}}^I \delta_{V_{AL}} = 2.64 \cdot 0.03 = 7.9\%$ , meta` circa del 14% ottenuto supponendo fissa la tensione del led.

Morale: un modello anche approssimato, crudo, puo` essere migliore di un circuito troppo idealizzato.

Questa e` una simulazione della situazione calcolata: sono stati usati 5 led con le caratteristiche indicate prima, ed e` stata variata la tensione di  $\pm 3\%$ .



*Sensitivity.png*

Sull'asse delle ordinate e` direttamente indicata la variazione percentuale, che risulta pari a circa  $\pm 8.5\%$ , close enough rispetto alla stima di  $\pm 7.9\%$ ! Close enough!

## Conclusioni

Il calcolo delle sensibilita` permette di prevedere le criticita` di un componente o parametro rispetto a una funzione della rete, e di capire anche quali sono le cause della criticita`.

Nel prossimo articolo saranno analizzati con questa tecnica alcuni circuiti normalmente usati in elettronica.

## Riferimenti

[1] Wikipedia - [Sensitivity Analysis](#)

[2] Terry Bahill - [Sensitivity Analysis: a Validation and Verification Tool](#) Power Point Slides (originariamente in <http://sie.arizona.edu/sysengr/slides/sensit.ppt>)

[3] Saltelli et al. - Sensitivity Analysis in Practice - [Wiley](#) (2004)

[4] Cacuci - Sensitivity and Uncertainty Analysis Vol.01 Theory - [CRC](#) (2003)

[5] IsidoroKZ - [Stringhe di led I - Alimentazione a resistenza](#), Electroyou 2010

Estratto da "<http://www.electroyou.it/mediawiki/index.php?title=UsersPages:Isidorokz:sensitivity-queste-sconosciute-i-definizioni>"