



Claudio Di Girolamo (jordan20)

DISTRIBUZIONI: QUALCHE CENNO TEORICO (PARTE II)

7 December 2011

Abstract

[Come anticipato](#), in questa seconda parte dell'articolo si tratterà la **derivata di una distribuzione**, accompagnata da qualche **esempio applicativo**. Seguirà una breve rassegna delle principali proprietà della distribuzione delta di Dirac e l'estensione della trasformata di Fourier alla teoria delle distribuzioni.

1. Derivata

1.1 Definizione

Prendiamo in considerazione la distribuzione $\mathcal{F}_{\varphi}(f)$ associata alla generica funzione $\varphi(x) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$:

$$\mathcal{F}_{\varphi}(f) := \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) f(x) dx$$

La funzione $f(x)$, dal momento che appartiene allo spazio delle funzioni quadrato-integrabili, può non necessariamente essere continua e tantomeno *derivabile*, dal momento che l'unica condizione richiesta su di essa è:

$$\|f\|_{(2)} := \sqrt{\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx} < \infty$$

Quello che ci chiediamo è se, anche per le distribuzioni (temperate o no che esse siano), è definibile un operatore di derivazione che agisca sulla $\varphi(x)$ in modo analogo a quanto accade per le funzioni standard.

In altri termini, ha senso scrivere $\frac{d}{dx}\varphi(x)$? La risposta è **si**: vediamo perché.

Prima considerazione: quando è stato definito lo spazio delle funzioni a decrescenza rapida, si è visto che la condizione necessaria per tali funzioni è l'appartenenza allo

spazio C^∞ , cioè l'insieme delle funzioni **derivabili infinite volte**: segue quindi che anche $f(x)$ è di questo tipo.

Seconda considerazione: per due funzioni derivabili $f(x)$ e $g(x)$, vale la formula di *integrazione per parti*:

$$\int_{\mathbb{R}} f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_{-\infty}^{\infty} - \int_{\mathbb{R}} f(x)g'(x)dx$$

ammesso che entrambi gli integrali esistano. Supponendo che anche la funzione $g(x)$ appartenga allo spazio $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, si ha necessariamente che $\lim_{x, \pm\infty} f(x)g(x) = 0$, quindi la precedente relazione si riduce a:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)g(x)dx = - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g'(x)dx$$

Da questa espressione partiamo per definire la **derivata di una distribuzione**: sia dunque φ una *distribuzione temperata* ed $f(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ una generica funzione a decrescenza rapida. Si definisce **derivata di φ** , $\frac{d\varphi}{dx}$, **la nuova distribuzione introdotta tramite la**:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{d\varphi(x)}{dx} f(x)dx := - \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \frac{df(x)}{dx} dx$$

Per quanto detto sullo spazio delle funzioni a decrescenza rapida, la precedente relazione è iterabile k -volte, pervenendo così alla seguente relazione di carattere generale:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{d^k \varphi(x)}{dx^k} f(x)dx := -(1)^k \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \frac{d^k f(x)}{dx^k} dx, \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots$$

E' facilmente verificabile (come fatto nella prima parte) che $\frac{d^k \varphi}{dx^k}$ è un funzionale *continuo* su $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\forall k \in \mathbb{N}$ quindi esso definisce ancora una distribuzione temperata; ciò dimostra come la definizione che abbiamo dato è ben posta, dal momento che φ è altresì una distribuzione temperata per ipotesi.

1.2 Qualche esempio applicativo

Esempio 1.2.1: si mostri che $\frac{d}{dx} \text{rmp}(x) = u(x)$.

La funzione *rampa lineare* è costruita a partire dalla *funzione di Heaviside* (ingegneristicamente nota come *segnale a gradino*), vale a dire $\text{rmp}(x) := u(x)x$, dove:

$$u(x) := \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

E' subito evidente che la funzione rampa lineare non appartiene né allo spazio $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, né allo spazio $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ (in entrambi i casi le norme non sono finite); tuttavia, il funzionale associato a tale funzione è ben definito in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ (basta, come al solito, verificarne la linearità e la continuità), quindi possiamo procedere correttamente ricordando che vale l'inclusione $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, $\forall p \geq 1$. Si ha:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \frac{d}{dx} \text{rmp}(x) f(x) dx &= - \int_{\mathbb{R}} \text{rmp}(x) \frac{df(x)}{dx} dx = - \int_0^{\infty} x \frac{df(x)}{dx} dx = \\ &= - \left\{ [xf(x)]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} f(x) \frac{dx}{dx} \right\} = \int_0^{\infty} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}} u(x) f(x) dx, \quad \forall f(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

dove abbiamo integrato per parti ed osservato, in forza della decrescenza rapida di $f(x)$, che $[xf(x)]_0^{\infty} = 0$. Evidenziando il primo e l'ultimo integrale, segue l'asserto.

Esempio 1.2.2: si mostri che $\frac{d}{dx} u(x) = \delta(x)$

Procedendo in maniera analoga a quanto fatto nel precedente esempio, si ha:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \frac{d}{dx} u(x) f(x) dx &= - \int_{\mathbb{R}} u(x) \frac{df(x)}{dx} dx = - \int_0^{\infty} \frac{d}{dx} f(x) dx = \\ &= - [f(x)]_0^{\infty} = - [f(\infty) - f(0)] = \int_{\mathbb{R}} \delta(x) f(x) dx \end{aligned}$$

da cui la tesi. E' importante ancora una volta evidenziare che l'appartenenza della $f(x)$ allo spazio $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, è essenziale affinché risulti $\lim_{x, \infty} f(x) = 0$.

Esempio 1.2.3: calcolare la derivata debole del segnale $\varphi(t) = u(t - 1/2)\sin(t)$

Abbiamo al solito, presa una $f(t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \frac{d\varphi(t)}{dt} f(t) dt &= - \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) f'(t) dt = - \int_{\mathbb{R}} u(t - 1/2) \sin(t) f'(t) dt = \\
&= - \int_{1/2}^{\infty} \sin(t) f'(t) dt = - [\sin(t) f(t)]_{1/2}^{\infty} + \int_{1/2}^{\infty} \cos(t) f(t) dt = \\
&= \sin(1/2) f(1/2) + \int_{1/2}^{\infty} \cos(t) f(t) dt = \\
&= \int_{\mathbb{R}} \delta(t - 1/2) \sin(t) f(t) dt + \int_{\mathbb{R}} u(t - 1/2) \cos(t) f(t) dt
\end{aligned}$$

Per cui, la derivata debole cercata è propriamente:

$$\varphi'(t) = \delta(t - 1/2) \sin(t) + u(t - 1/2) \cos(t)$$

2. Alcune proprietà della delta di Dirac

In questo paragrafo analizzeremo qualche proprietà utile (di quelle più semplici se ne darà dimostrazione) in ambito applicativo.

I) La delta di Dirac è una distribuzione **pari** $\delta(x) = \delta(-x)$.

Abbiamo visto nella prima parte dell'articolo, tra le operazioni effettuabili tra distribuzioni, che date due distribuzioni temperate, esse saranno *uguali* se *agiscono allo stesso modo* su una funzione dello spazio $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Si ha pertanto:

$$\int_{\mathbb{R}} \delta(x) f(x) dx = f(0)$$

e

$$\int_{\mathbb{R}} \delta(-x) f(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \delta(y) f(-y) dy = f(0)$$

dove è stata introdotta la nuova variabile di integrazione $y = -x$. Ne segue quindi la tesi. Va da sé che la derivata prima della delta di Dirac sarà una **distribuzione dispari**, ossia che $\delta'(-x) = -\delta'(x)$, ma questa è una naturale

estensione delle note proprietà delle funzioni standard con parità definita che conosciamo dall'Analisi Matematica di base. La dimostrazione è perfettamente analoga a quella appena vista.

II) Per ogni $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, risulta $\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)$.

Dimostriamo solo il caso con coefficiente positivo. Eseguendo la posizione $y = ax$, abbiamo:

$$\int_{\mathbb{R}} \delta(ax) f(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \delta(y) f\left(\frac{y}{a}\right) \frac{1}{a} dy = \frac{1}{a} f(0) = \frac{1}{a} \int_{\mathbb{R}} \delta(x) f(x) dx$$

per qualsiasi $f(x)$ a rapida decrescenza; ne segue quindi l'asserto.

III) Se $g(x)$ è continua nell'origine, allora vale l'uguaglianza $g(x)\delta(x) = g(0)\delta(x)$.

Infatti, per ogni $f(x)$ a rapida decrescenza, possiamo scrivere:

$$\int_{\mathbb{R}} (g(x)\delta(x)) f(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \delta(x) (g(x)f(x)) dx = g(0)f(0) = g(0) \int_{\mathbb{R}} \delta(x) f(x) dx$$

da cui la tesi. Una naturale estensione di quanto detto è il seguente fatto:

$$g(x)\delta(x - x_0) = g(x_0)\delta(x - x_0)$$

assodata la continuità della funzione $g(x)$ nel punto considerato.

IV) Per ogni $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, risulta $\delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{2|a|}(\delta(x - a) + \delta(x + a))$

V) Sia $g(x)$ una funzione con derivata continua dotata di zeri semplici in $x = x_j$, $\forall j = 1, 2, \dots, n$

Ne consegue che in un opportuno intorno di ciascun x_j la funzione $g(x)$ sia altresì invertibile. Dunque:

$$\delta(g(x)) = \sum_{j=1}^n \frac{\delta(x - x_j)}{|g'(x_j)|}$$

3. Estensione della trasformata di Fourier

Dalla teoria della trasformata di Fourier, sappiamo che la sua definizione in forma integrale, è ben posta se la funzione integranda appartiene a $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, a $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, o ancora a $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. In altri termini, indicando con $F.$ l'*operatore trasformata*, si dimostra che:

- se $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \Rightarrow F[f](p) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$;
- se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \Rightarrow F[f](p) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$;
- se $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \Rightarrow F[f](p) \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$, continua nel punto p e divergente quando p diverge assolutamente.

Estendere la trasformata di Fourier a quelle funzioni che non appartengono a nessuno degli spazi sopra elencati, significa quindi ammettere l'esistenza della trasformata non più nel senso classico, ma nel *senso delle distribuzioni*; per capire meglio, considerando la funzione $U(x)=1$ q.o., risulta (per le proprietà della delta di Dirac già discusse):

$$F[U](p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} U(x)e^{-ipx}dx = \sqrt{2\pi}\delta(-p) = \sqrt{2\pi}\delta(p)$$

E' evidente allora che la trasformata di Fourier di una funzione che è integrabile **localmente** ma non integrabile o a quadrato-integrabile certamente **esiste**: essa però non è più, con certezza, una funzione, ma è, più in generale, una *distribuzione* (temperata o no che sia). Se calcoliamo adesso la trasformata di Fourier di una distribuzione (la delta di Dirac ad esempio):

$$F[\delta](p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)e^{-ipx}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

osserviamo ancora una volta come la trasformata non sia una funzione di $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ o $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ ma, in questo caso, appartenente allo spazio $\mathcal{L}_{loc}^p(\mathbb{R})$ (delle funzioni localmente integrabili). Questi risultati sono formalizzabili estendendo la trasformata di Fourier

agli elementi di $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ (spazio delle distribuzioni temperate già discusso nella prima parte); per fare questo, è necessario introdurre il seguente:

Teorema 3.1: *Se $\varphi(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, la sua trasformata di Fourier $\hat{\varphi}(p)$ appartiene anch'essa a $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Inoltre, se $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = \varphi(x)$ nella topologia τ_S , allora anche $\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\varphi}_n(p) = \hat{\varphi}(p)$ converge nella stessa topologia.*

Prendiamo adesso in considerazione due funzioni f e g appartenenti allo spazio $\mathcal{S}(\mathbb{R})$; dalla teoria della trasformata di Fourier sappiamo che, per il noto *teorema di Plancherel*, si deve avere:

$$\langle f, g \rangle = \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle = \langle F[f], F[g] \rangle$$

Ponendo $\Psi := F[g]$ e ricordandoci della proprietà di *invertibilità* della trasformata (operazione del tutto lecita per la regolarità delle funzioni scelte), la relazione appena scritta può essere così riformulata:

$$\langle F[f], \Psi \rangle = \langle f, F^{-1}[\Psi] \rangle \quad \forall f, \Psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

Possiamo adesso dare la seguente:

Definizione 3.2: *Sia $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ e $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$; si definisce **trasformata di Fourier di una distribuzione temperata** T il funzionale $\hat{T} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$ siffatto $\langle \hat{T}, \varphi \rangle = \langle T, F^{-1}[\varphi] \rangle$.*

Per convincerci di questo, occorre dimostrare la linearità e la continuità del funzionale $\hat{T}$; la linearità è abbastanza immediata da mostrare (si vedano gli esempi in merito esposti nella prima parte). Poniamo l'attenzione sulla continuità: in forza del teorema 3.1, è evidente che nella topologia τ_S se $\varphi_j \rightarrow \varphi$ anche $F[\varphi_j] \rightarrow F[\varphi]$ e conseguentemente $F^{-1}[\varphi_j] \rightarrow F^{-1}[\varphi]$. Possiamo allora scrivere:

$$\langle \hat{T}, \varphi_j \rangle = \langle T, F^{-1}[\varphi_j] \rangle \rightarrow \langle T, F^{-1}[\varphi] \rangle = \langle \hat{T}, \varphi \rangle$$

proprio per la continuità del funzionale T e per quanto esposto nella Definizione 3.2. Segue quindi l'asserto: se $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ allora anche $\hat{T} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ che mostra proprio come la trasformata di Fourier sia proprio una distribuzione temperata (quindi anche una distribuzione, essendo $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ un sottoinsieme di $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$).

Estratto da ["http://www.electroyou.it/mediawiki/index.php?title=UsersPages:Jordan20:distribuzioni-qualche-cenno-teorico-parte-ii"](http://www.electroyou.it/mediawiki/index.php?title=UsersPages:Jordan20:distribuzioni-qualche-cenno-teorico-parte-ii)