



Claudio Di Girolamo (jordan20)

IL PROBLEMA DELLA STABILITÀ NEI SISTEMI DI CONTROLLO

19 December 2011

Sommario

Questo articolo si propone di analizzare a 360° (**anche a 270°** sarebbe già un traguardo) il problema della **stabilità** per quel che riguarda i sistemi di **controllo automatico**. Come certamente sapranno i professionisti del settore presenti su EY e non solo, questa tematica ricopre un'importanza non indifferente in ambito ingegneristico sia in fase di **analisi** che di **sintesi**, così come in ambito squisitamente applicativo (**automazione industriale, processi**, ecc.). Inutile dire che la trattazione non ha alcuna pretesa di rigore o di correttezza assoluta, visto che il livello è quello di un **corso basilare di Controlli Automatici di ingegneria**, quindi ogni appunto, consiglio, correzione non può che essere ben accetto. Vi ringrazio in anticipo per l'attenzione.

1. Introduzione

Nel precedente articolo ([Parte I](#) e [Parte II](#)) abbiamo esaminato il comportamento di un sistema di controllo in *regime permanente* (o, similmente, in *condizioni statiche*) e si è fatto uso del *teorema del valore finale*, con l'avvertenza che esso sia valido qualora il sistema di controllo **ammetta un valore finale**. Ho evidenziato in grassetto questa frase volutamente, perché in essa risiede l'essenza della nostra trattazione: la tendenza che ha un sistema automatico di raggiungere la condizione di regime permanente, quindi ammettere proprio un valore finale finito, esatto, preciso, è intrinsecamente legata alla **proprietà di stabilità** del sistema stesso. Ci rendiamo conto quindi che uno studio completo ed accurato di un sistema di controllo non può soffermarsi unicamente al suo comportamento in condizioni statiche (che già di per sé fornisce delle informazioni molto importanti, come abbiamo avuto modo di constatare), ma deve necessariamente esaminare le caratteristiche dei *transitori* per accertare che le variabili in gioco mostrino effettivamente l'attitudine a portarsi sui valori individuati nell'analisi statica.

2. Equilibrio

Introdurre il concetto di **equilibrio** è basilare nella nostra trattazione perché, partendo dalla sua analisi formale, possiamo pervenire ad una definizione chiara ed

univoca del concetto di stabilità, anche se questo richiede inevitabilmente qualche richiamo alla *teoria dei sistemi* (con il necessario formalismo matematico richiesto dal contesto e che ho cercato comunque di alleggerire laddove possibile).

Consideriamo un sistema rappresentato dal seguente modello matematico:

$$\mathbf{x}(t) = \varphi(t, t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{u}_{[t_0, t)}) \quad [1]$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \quad [2]$$

Diamo la seguente:

Definizione 2.1 - Uno stato $\mathbf{x}_e \in X$ si definisce **di equilibrio** per il sistema [1]-[2] se, ammettendo che il sistema si trovi inizialmente nello stato $\mathbf{x}_e$ e che l'ingresso sia nullo o al più uguale ad un valore costante $\bar{\mathbf{u}}$, esso permarrà indefinitamente in $\mathbf{x}_e \forall t \geq t_0$:

$$\mathbf{x}_e = \varphi(t, t_0, \mathbf{x}_e, \mathbf{u}_{[t_0, t)}) \quad [3]$$

Pensiamo banalmente ad una biglia vincolata a muoversi su una curva concava contenuta in un piano verticale:

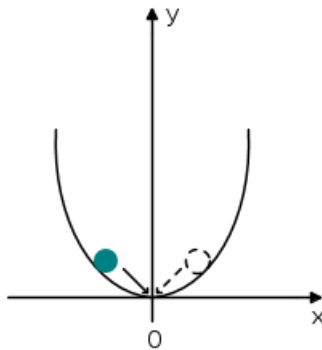


Fig.1 - La biglia tenderà sempre alla posizione di equilibrio (coincidente con l'origine degli assi)

Supponiamo che il suo movimento iniziale sia stato impresso da una causa esterna all'istante $t_0 = 2\text{ s}$; per effetto della forza d'attrito che si oppone al moto, la biglia si fermerà alla base della curva dopo un certo tempo e rimarrà indefinitamente in questo punto per $t \geq 2\text{ s}$ finché una nuova sollecitazione esterna (una forza ad esempio) non ne modifichi la condizione di quiete: l'origine degli assi rappresenta quindi una posizione di equilibrio per il sistema.

In termini di praticità, il calcolo degli stati di equilibrio mediante la [3] non è il

massimo poiché spesso il modello cui si perviene quando si desidera determinare una descrizione matematica di un sistema reale è del tipo:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \quad [4]$$

che, congiuntamente alla [2] caratterizza il modello ingresso-stato-uscita in *forma implicita*. Considerando il caso particolare in cui la sollecitazione sia nulla $\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$ e tenendo conto della Definizione 2.1, possiamo dire che gli stati di equilibrio sono le soluzioni costanti della seguente equazione vettoriale:

$$\mathbf{0} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_e, \mathbf{0}, t) \quad [5]$$

Per i sistemi lineari e stazionari (quelli non lineari e/o non stazionari necessiterebbero di una trattazione a parte), la [5] è particolarizzabile come segue:

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_e = \mathbf{0} \quad [6]$$

che ammette soluzione **unica** coincidente banalmente con quella nulla $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$ se $\det(\mathbf{A}) \neq 0$, oppure **infinite** soluzioni, ivi compresa quella nulla, che costituiscono un sottospazio lineare dello spazio di stato $\mathbf{X}$, se $\det(\mathbf{A}) = 0$. L'esempio che segue chiarirà meglio quanto appena esposto.

Esempio 1

Consideriamo un sistema meccanico costituito da un classico pendolo semplice formato da un'asta rigida lunga l e di massa trascurabile, terminato da un corpo puntiforme di massa m , il tutto incernierato in modo da potersi muovere esclusivamente su un piano verticale:

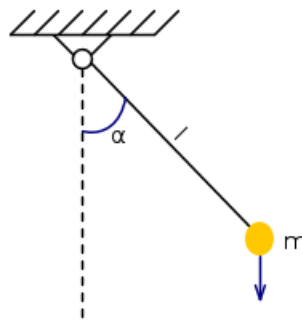


Fig.2 - Pendolo semplice

Il modello matematico con lo stato si ottiene dal modello ingresso uscita dato da:

$$ml^2\ddot{\alpha} + b\dot{\alpha} + mgl\sin(\alpha) = fl$$

Ponendo:

$$x_1(t) = \alpha(t), x_2(t) = \dot{\alpha}(t), u(t) = f(t)$$

il modello presenta la seguente forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{1}{ml^2}[-mgl\sin(x_1) - bx_2 + lu] \end{bmatrix}$$

Per la [5] avremo $x_2 = \sin(x_1) = 0$, quindi nell'intervallo $x_1 \in [0, 2\pi)$ il pendolo possiede stati di equilibrio di due tipi diversi:

$$\mathbf{x}_{e1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_{e2} = \begin{bmatrix} \pi i \\ 0 \end{bmatrix}, \forall i \in \mathbb{Z}$$

per cui il pendolo è comunque fermo, ma per valori pari di i è orientato verso il basso, mentre per valori dispari di i è orientato verso l'alto.

3. Movimento

Un concetto strettamente legato a quello di equilibrio è il **movimento**; di seguito diamo due definizioni basilari che, integrate alla Definizione 2.1, ci consentiranno di analizzare la proprietà di stabilità in modo completo.

Definizione 3.1 - Si dice **traiettoria nominale** corrispondente allo stato iniziale $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0^*$ e all'ingresso $\mathbf{u}(\cdot) = \mathbf{u}^*(\cdot)$, l'insieme degli stati ottenuti dalla [1]:

$$\{\mathbf{x} \in \mathbf{X} : \mathbf{x}(t) = \varphi(t, t_0, \mathbf{x}_0^*, \mathbf{u}_{[t_0, t]}^*)\} \quad [7]$$

Definizione 3.2 - Si dice **movimento nominale** corrispondente allo stato iniziale $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0^*$ e all'ingresso $\mathbf{u}(\cdot) = \mathbf{u}^*(\cdot)$, l'insieme delle coppie ordinate $(t, \mathbf{x}(t))$ ottenute dalla [1] così composto:

$$\{(t, \mathbf{x}) \in \mathbf{T} \times \mathbf{X} : \mathbf{x}(t) = \varphi(t, t_0, \mathbf{x}_0^*, \mathbf{u}_{[t_0, t]}^*)\} \quad [8]$$

4. Stabilità secondo Lyapunov

Una trattazione rigorosa della nozione di *stabilità* fu proposta alla fine del XIX secolo dal matematico russo A.M. Lyapunov; in buona sostanza essa richiede che a **piccole** perturbazioni dello stato iniziale in cui si trova un sistema corrispondano **piccole** perturbazioni del movimento dello stato, eventualmente destinate ad annullarsi su tempi lunghi.

Riprendendo l'esempio della biglia, supponiamo che lo stato iniziale sia di quiete (biglia ferma nell'origine) e la perturbazione di questo stato sia una piccola

spinta impressa con il dito indice ad esempio: l'effetto è il movimento della biglia che inizierà ad oscillare attorno alla posizione di equilibrio fino a fermarsi a causa della forza d'attrito che avrà annullato, dopo un certo intervallo temporale, la perturbazione del movimento. Che succede però ad una biglia posta su un piano convesso come in Fig.3, sottoposta alla stessa perturbazione dello stato iniziale?

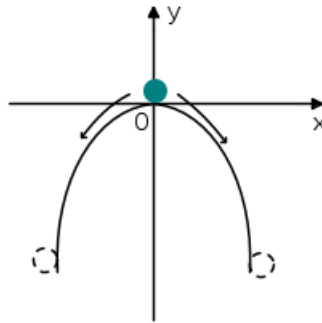


Fig.3 - La biglia non ritornerà nella posizione di equilibrio dopo l'applicazione della perturbazione

Certamente la biglia cadrà dall'una o dall'altra parte senza più tornare nella posizione di partenza a meno di un'azione manuale esterna che la riporti alla configurazione iniziale. Intuitivamente diremo quindi che il primo sistema è *stabile*, il secondo invece è *instabile* in quanto, a parità di perturbazione dello stato iniziale, nel primo caso viene raggiunta una *nuova condizione di equilibrio* (in questo esempio coincidente con quella iniziale), nel secondo non si raggiunge alcun equilibrio ma addirittura si assiste ad un'accelerazione della biglia, per effetto della forza peso non compensata dalla forza d'attrito del piano.

E' chiaro che stiamo analizzando un esempio banalissimo dal momento che nei sistemi reali complessi lo stato iniziale è il più delle volte o ignoto, o non misurabile, o entrambe le situazioni; ci fa però capire come la stabilità sia una proprietà **connessa imprescindibilmente alle caratteristiche intrinseche del sistema**.

Conferiamo adesso un pò più di rigore formale a quanto constatato intuitivamente.

4.1 Stabilità dell'equilibrio

Stiamo considerando al solito un sistema dinamico tempo invariante dove, per semplicità analitica, si suppone sottoposto ad un ingresso nullo. Diamo quindi la seguente

Definizione 4.1 - Uno stato di equilibrio si dice **stabile secondo Lyapunov** se per ogni $\varepsilon > 0$ reso piccolo arbitrariamente, esiste un $\delta > 0$, dipendente in generale sia da ε che dall'istante iniziale t_0 , tale che per tutti gli stati iniziali $\mathbf{x}_0$ soddisfacenti la relazione

risulti

$$\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_e\| \leq \delta(\varepsilon, t_0)$$

dove

$$\|\mathbf{x}_l(t) - \mathbf{x}_e\| \leq \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0$$

$$\mathbf{x}_l(t) = \varphi(t, t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{0}_{[t_0, t)})$$

La quantità $\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_e\|$ prende il nome di **perturbazione iniziale**, mentre la risposta libera nello stato $\mathbf{x}_l(t)$ è definita **evoluzione perturbata**. Commentiamo il significato di questa definizione: la stabilità dello stato di equilibrio nominale $\mathbf{x}_e$ richiede che il movimento perturbato rimanga "vicino" ad esso, cioè che tutte le infinite perturbazioni generabili nell'intorno di raggio δ sviluppino evoluzioni perturbate che restino **limitate** nell'intorno di raggio ε :

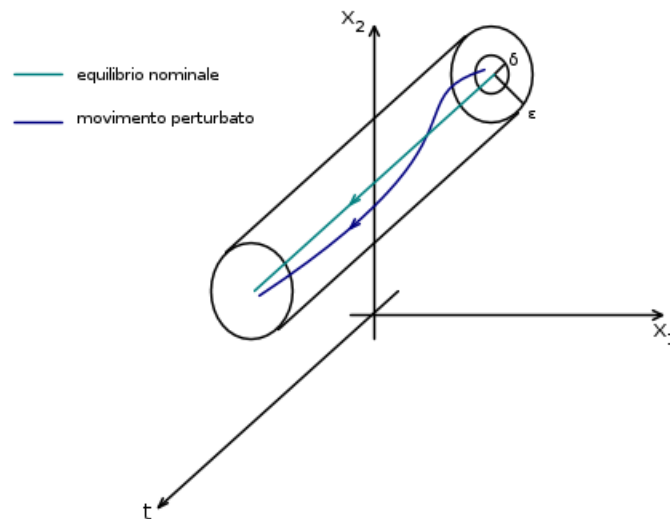


Fig. 4 - Equilibrio stabile

Va da sé che uno stato di equilibrio si dice **instabile** se non è stabile secondo la Definizione 4.1; quindi l'instabilità implica che esistono perturbazioni arbitrariamente piccole dello stato iniziale che provocano l'**allontanamento** dello stato del sistema dall'equilibrio stesso:

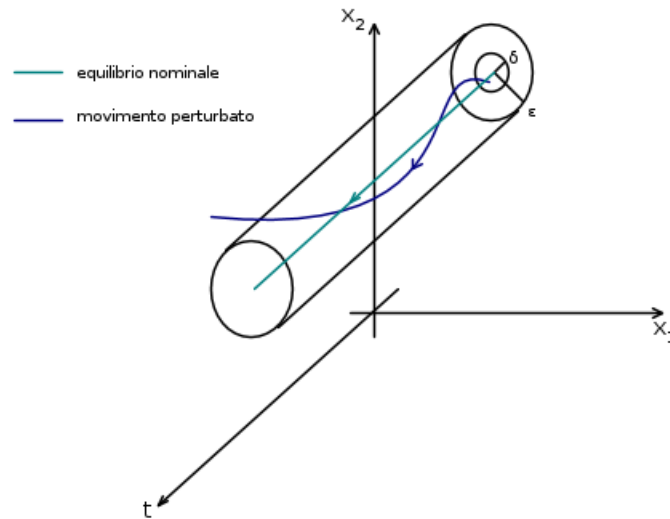


Fig.5 - Equilibrio instabile

La Definizione 4.1 è riformulabile imponendo una condizione più **forte**: ossia che il movimento perturbato **non solo** debba essere limitato per istanti di tempo molto grandi, ma che debba **anche tendere** all'equilibrio nominale per $t \rightarrow \infty$. Ciò è specificato dalla seguente:

Definizione 4.2 - Uno stato di equilibrio $\mathbf{x}_e$ si dice **asintoticamente stabile secondo Lyapunov** se esso è stabile secondo la Definizione 4.1 e se comunque scelto un istante t_0 , esiste un intorno di raggio $\delta_a(t_0)$ tale che tutte le infinite perturbazioni iniziali che appartengono a tale intorno, ingenerino evoluzioni perturbate limitate in un intorno di $\mathbf{x}_e$ e convergenti asintoticamente ad $\mathbf{x}_e$ per $t \rightarrow \infty$. In formule

$$\forall \varepsilon > 0, \forall t_0 \in T, \exists \delta_a(t_0) : \forall \mathbf{x}_0 : \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_e\| \leq \delta_a(t_0) \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}_t(t) - \mathbf{x}_e\| = 0$$

Per inciso, osserviamo che la convergenza asintotica della risposta nello stato $\mathbf{x}_t(t)$ all'equilibrio nominale $\mathbf{x}_e$ avviene nella **norma** $\|\cdot\|$, dal momento che le grandezze trattate sono dei vettori appartenenti allo spazio di stato $\mathbf{X}$ (che in questo contesto è uno *spazio vettoriale lineare* a tutti gli effetti e, in quanto tale, in esso è definito un prodotto scalare e quindi una norma). Graficamente si ha:

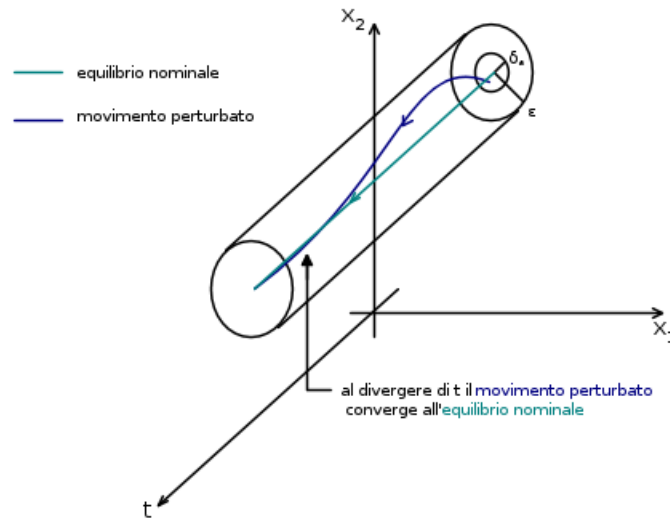


Fig.6 - Equilibrio asintoticamente stabile

Esempio 2

Si consideri la seguente rete elettrica a parametri concentrati rappresentata da una semplice connessione serie R-C:

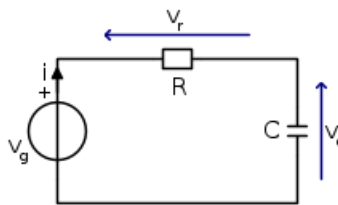


Fig.7

Applicando una LKT otteniamo la relazione:

$$v_r(t) = v_g(t) - v_c(t)$$

Le relazioni costitutive sono:

$$C \dot{v}_c = i(t); v_r(t) = Ri(t)$$

Se adesso poniamo $u = v_g$, $x = v_c$, $y = v_r$ (avendo scelto come risposta del sistema la tensione ai capi del resistore), sostituiamo nell'equazione di maglia e svolgiamo qualche semplice passaggio algebrico, perveniamo alla rappresentazione implicita della rete data:

$$\dot{x}(t) = \frac{1}{RC} [u(t) - x(t)]$$

$$y(t) = u(t) - x(t)$$

Se poniamo $u(t) = \mathbf{u} = U$, lo stato di equilibrio ottenuto annullando $\dot{x}$ è esattamente $\mathbf{x}_e = U$, cui corrisponde l'uscita di equilibrio $\mathbf{y} = 0$: L'interpretazione fisica di questo risultato è che, quando tutte le variabili in gioco del circuito sono costanti, il condensatore si comporta come un circuito aperto e pertanto la corrente nella maglia e la tensione ai capi del resistore sono nulle, mentre la tensione ai capi del condensatore coincide con quella presente ai morsetti del generatore. Dall'equazione di stato deduciamo che il movimento perturbato relativo allo stato iniziale $x(0) = x_0$ è:

$$x(t) = e^{-\frac{t}{RC}} x_0 + (1 - e^{-\frac{t}{RC}}) U$$

pertanto

$$x(t) - \mathbf{x}_e = e^{-\frac{t}{RC}} (x_0 - \mathbf{x}_e)$$

e quindi, in base alla Definizione 4.1, se si desidera che risulti:

$$|x(t) - \mathbf{x}_e| \leq \varepsilon$$

è sufficiente prendere $\delta = \varepsilon$ visto che per $t \geq 0$ avremo:

$$\left| e^{-\frac{t}{RC}} (x_0 - \mathbf{x}_e) \right| \leq |x_0 - \mathbf{x}_e|$$

Lo stato di equilibrio $\mathbf{x}_e$ è quindi stabile ed anche asintoticamente stabile dal momento che:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\frac{t}{RC}} = 0$$

come è noto. Questo risultato si ricollega con quanto constatato intuitivamente con l'esempio iniziale: il sistema è stabile perché la perturbazione dello stato iniziale si estingue per tempi lunghi (che interpretiamo come *esaurimento del transitorio*) raggiungendo una nuova situazione di equilibrio (che interpretiamo come *l'instaurarsi del regime permanente*, ovvero $x(\infty) = U$).

4.2 Osservazioni sull'equilibrio stabile

Nelle definizioni date sopra, abbiamo visto come, in generale, gli scalari δ e δ_a siano dipendenti dall'istante di tempo t_0 con la possibile conseguenza che per certi valori temporali essi assumano dei valori molto piccoli (riducendo quindi il margine entro il quale annullare l'effetto della perturbazione); in ambito ingegneristico è piuttosto richiesto che gli intorno di raggio δ e δ_a risultino **indipendenti** da t_0 : in questo caso

parleremo di stabilità e/o asintotica stabilità **uniforme** (proprietà sempre valida per i sistemi stazionari).

Sempre nel contesto ingegneristico applicativo, è altresì fondamentale la capacità che deve avere un sistema nel reagire alle perturbazioni sullo stato iniziale annullandone gli effetti in modo asintotico, **indipendentemente** dall'entità delle perturbazioni a cui è sottoposto. In tali condizioni il sistema si dice **globalmente asintoticamente stabile**; in altri termini, è richiesto che i movimenti perturbati generati da un **qualunque** stato iniziale, "vicino" o "lontano" allo stato di equilibrio nominale, **convercano tutti al medesimo equilibrio nominale**, rendendo di fatto **irrilevante** l'entità della perturbazione. Certamente ciò non costituisce il caso generale in quanto, in corrispondenza di un certo ingresso fissato, il sistema potrebbe essere dotato di più stati di equilibrio ciascuno con differente attitudine alla stabilità; però, per ognuno di quelli che sono nella fattispecie asintoticamente stabili, esisterà comunque un opportuno insieme di stati iniziali che generano movimenti perturbati asintoticamente convergenti allo stato di equilibrio stesso: tale insieme prende comunemente il nome di **regione di attrazione**.

4.3 Stabilità del movimento

Le considerazioni sulla stabilità dell'equilibrio nominale sono generalizzabili sostituendo ad esso un generico movimento nominale. Si può quindi dare la seguente:

Definizione 4.3 - Un movimento nominale $\mathbf{x}^(t)$ si dice **stabile** se, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste uno scalare $\delta > 0$ tale che per tutti gli stati iniziali $\mathbf{x}_0$ che soddisfano la relazione*

$$\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_0^*\| \leq \delta$$

risulti

$$\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0^*(t)\| \leq \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0$$

La proprietà di stabilità del movimento quindi ci dice che, scelta arbitrariamente piccola la **massima distanza accettabile** in un qualunque istante di tempo tra il movimento perturbato e quello nominale, quest'ultimo è stabile allorché la condizione su tale distanza è **rispettata**, pur di prendere lo stato iniziale del movimento perturbato sufficientemente prossimo a quello del movimento nominale. Viceversa, banalmente, diremo che il movimento nominale è **instabile**:

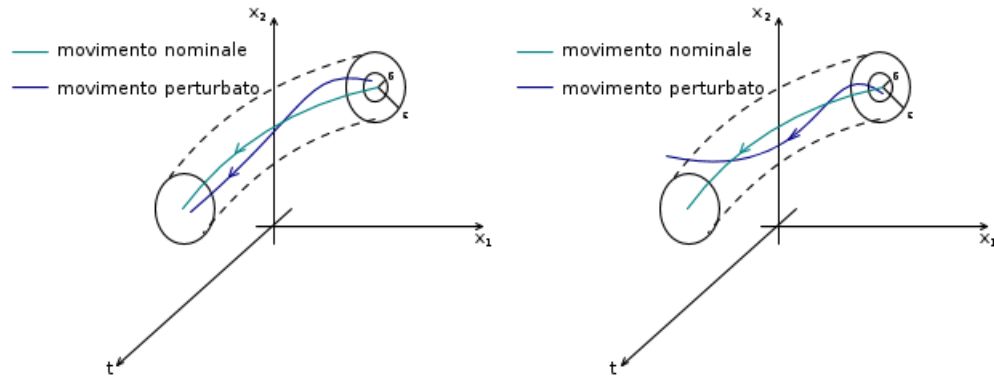


Fig.8 - Movimento stabile ed instabile

Per finire, analogamente a quanto è stato fatto per l'equilibrio nominale, anche per il movimento la proprietà di stabilità è rafforzabile richiedendo che il movimento perturbato tenda a quello nominale per $t \rightarrow \infty$ in base alla seguente:

Definizione 4.4 - Un movimento $\mathbf{x}^*(t)$ si dice **asintoticamente stabile** se, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un opportuno $\delta_a > 0$ tale che risulti stabile secondo la Definizione 4.3 ed inoltre

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*(t)\| = 0$$

Graficamente:

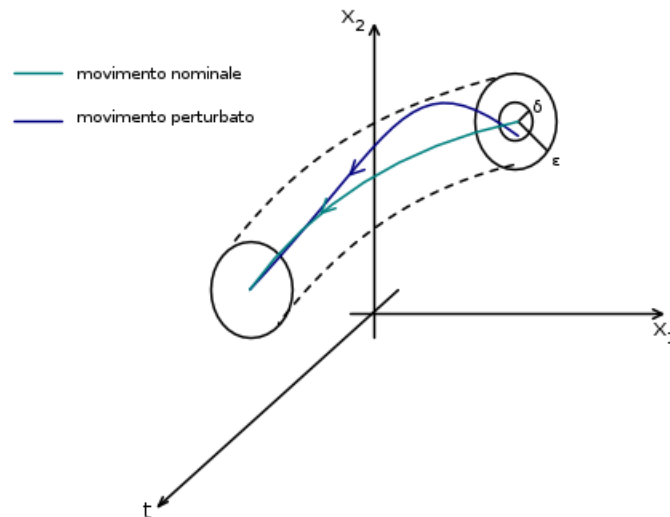


Fig.9 - Movimento asintoticamente stabile

Bibliografia

[1] Appunti e dispense del corso di Controlli Automatici tenuto presso la facoltà di Ingegneria Elettronica dell'Università degli Studi di Palermo;

[2] P.Bolzern, R.Scattolini, N.Schiavoni - Fondamenti di controlli automatici - 2008.

Estratto da "<http://www.electroyou.it/mediawiki/index.php?title=UsersPages:Jordan20:il-problema-della-stabilit-nei-sistemi-di-controllo-i>"