



Claudio Di Girolamo (jordan20)

SISTEMI DI CONTROLLO: CONDIZIONI DI REGIME PERMANENTE (PARTE I)

11 December 2011

Abstract

Questo articolo si propone di analizzare il comportamento di un classico **sistema a retroazione** in regime permanente, ossia a transitorio esaurito, sottoposto ad un opportuno segnale di ingresso. Al fine di rendere l'esposizione non troppo pesante, ho deciso di dividere l'articolo in due parti: nella prima saranno trattati gli effetti dei **disturbi additivi** sul sistema di controllo assieme a qualche esempio pratico; nella seconda, l'attenzione sarà rivolta alla classificazione dei sistemi di controllo in base agli errori di regolazione a regime (anche qui supportata da qualche esempio applicativo) e si farà un breve cenno per quel che riguarda la sensitività di un sistema. Le uniche conoscenze preliminari richieste sono la teoria della trasformata di Laplace e le regole basilari di trasformazione degli **schemi a blocchi**.

Regolazione automatica: schema di principio

In un qualsiasi sistema fisico, quando viene applicato un segnale all'ingresso di uno dei suoi elementi, si ingenera una "reazione" temporanea nota come **risposta transitoria**: le modalità con le quali si esplica questo fenomeno (durata temporale, ampiezza massima raggiunta in uscita, ecc.) sono dipendenti dalle caratteristiche intrinseche del sistema stesso. Una volta esaurito il transitorio, il sistema **permane** in una condizione di **regime**: si sono instaurate dunque delle **condizioni statiche**, anch'esse legate alle peculiarità del sistema e al tipo di sollecitazione applicata in ingresso e che permettono, soprattutto, di valutarne le prestazioni in termini di **precisione, stabilità e robustezza**.

Lo schema di principio di un sistema di regolazione automatica è riportato in Fig.1:

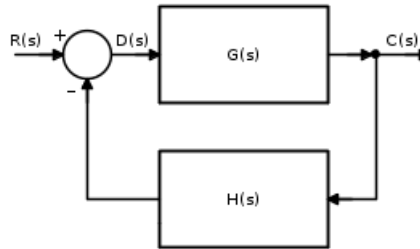


Fig.1 - Schema di principio di un sistema di regolazione

in cui le varie grandezze hanno il seguente significato:

- **$R(s)$** è la t.d.L. (trasformata di Laplace) del segnale di **ingresso** o di **riferimento** (nel caso dei **regolatori**);
- **$C(s)$** è la t.d.L. della grandezza controllata o di **uscita**;
- **$D(s)$** è la t.d.L. del segnale **differenza**: **$D(s) = R(s) - C(s)H(s)$** ;
- **$G(s)$** è la **funzione di trasferimento (f.d.t.)** della linea di azione **diretta**;
- **$H(s)$** è la f.d.t. di **retroazione** (trasduttore del segnale di retroazione).

Per completezza, ricordiamo inoltre quanto segue:

- **$G(s)H(s)$** è la **f.d.t. ad anello aperto** o guadagno di anello;
- $G'(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$ è la **f.d.t. ad anello chiuso**.

Un importante strumento per la stima di tali grandezze in condizioni statiche è il **teorema del valore finale**, il quale enuncia che se $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ allora:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

ove il limite a primo membro **esiste** qualora la funzione **$F(s)$ non presenti poli a parte reale positiva**, mentre l'esistenza del limite a secondo membro non implica necessariamente quella del primo.

Nel caso di **sistemi di regolazione**, il segnale di riferimento **R** è **costante** ed il suo valore dipende da quello che deve assumere la grandezza regolata e dal coefficiente di reazione **H** ; supponendo infatti che **$G(s)$** ed **$H(s)$** non abbiano poli nulli, in condizioni di regime le f.d.t. delle linee di andata e retroazione si riducono a delle costanti **K** ed **H** (avendo applicato il teorema del valore finale). Lo schema di Fig.1 può essere quindi così ridisegnato:

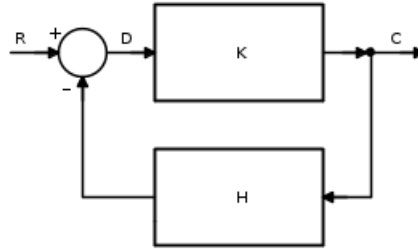


Fig.2 - Schema a blocchi equivalente a quello di Fig.1 in condizioni statiche

La grandezza controllata assume quindi l'espressione seguente:

$$C = R \frac{K}{1 + KH} \quad [1]$$

e, nel caso in cui $KH \gg 1$:

$$C_0 = \frac{R}{H} \quad [2]$$

Il termine KH prende adesso il nome di **guadagno statico di anello** (è da notare che la condizione $KH \rightarrow \infty$ dovrebbe essere raggiunta con $K \rightarrow \infty$ ed H costante, altrimenti C tenderebbe a 0, oppure per avere un certo valore di C il segnale di riferimento R dovrebbe assumere un valore infinitamente grande).

E' chiaro però che, nelle applicazioni reali, il valore di K non è infinitamente grande a parità di valore di R , per cui la grandezza controllata C assume un valore un po' inferiore (dato dalla [1]): si dice in tal caso che la grandezza regolata è **affetta da un certo errore E**. Analiticamente esso rappresenta lo **scostamento** di C dal valore ideale dato dalla [2]:

$$E = C_0 - C \quad [3]$$

Sostituendo la [1] e la [2] nella [3], otteniamo:

$$E = \frac{R}{H} - R \frac{K}{1 + KH} = \frac{R}{H} \frac{1}{1 + KH} = \frac{C_0}{1 + KH} \quad [4]$$

da cui si vede che l'errore di regolazione a regime è tanto minore quanto più è elevato il guadagno statico di anello KH . Il segnale differenza dato da:

$$D = R - HC \quad [5]$$

in base alla [1] diventa:

$$D = R - HR \frac{K}{1 + KH} = \frac{R}{1 + KH} \quad [6]$$

Tale segnale fornisce una indicazione sulla **precisione della regolazione** e molte volte, impropriamente, viene indicato come segnale errore. Confrontando la [4] e la [6] ci rendiamo conto invece che essi coincidono solo nel caso in cui **H** sia unitario.

1. Effetto dei disturbi in un sistema di regolazione

L'errore di regolazione, per come lo abbiamo definito, riveste nella pratica un'importanza relativamente modesta; se infatti applichiamo in ingresso un segnale del tipo:

$$R' = \frac{R}{H} \frac{1 + KH}{K} \quad [7]$$

la grandezza controllata assume il valore:

$$C = R' \frac{K}{1 + KH} = \frac{R}{H} = C_0 \quad [8]$$

avendo di fatto compensato l'errore. Nei sistemi reali agiscono però altri segnali indesiderati o variazioni dei parametri intrinseci (dovuti all'inevitabile degrado nel tempo dei componenti, ma non solo) che causano comunque uno scostamento della grandezza controllata dal suo valore ideale; nella fattispecie, distinguiamo:

- **disturbi additivi:** nel caso si tratti di segnali esterni non desiderati che entrano in qualche elemento del sistema;
- **disturbi parametrici:** nel caso si tratti di variazioni non desiderate di un parametro di qualche elemento del sistema (ad esempio il fattore di amplificazione di un transistor per effetto di variazioni termiche).

La seconda categoria di disturbi, in prima istanza, è riconducibile alla prima perché spesso la variazione di un parametro avviene per una causa esterna al sistema; ad esempio, la variazione di amplificazione per effetto di variazioni termiche può essere ricondotta all'effetto di un segnale di temperatura entrante nell'amplificatore. Nella nostra trattazione pertanto consideriamo soltanto disturbi additivi; questi segnali possono entrare in qualsiasi punto dell'anello di regolazione: all'ingresso assieme al segnale di riferimento, in un punto generico della linea di azione diretta, all'uscita, oppure in un punto della linea di retroazione.

1.1 Disturbo agente in uscita

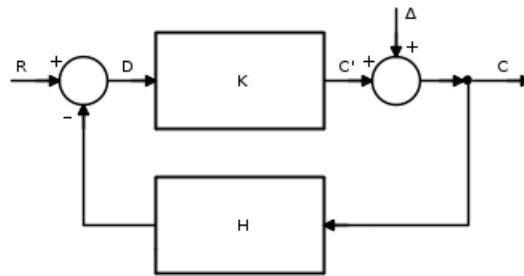


Fig.3 - Rappresentazione di un disturbo agente all'uscita del sistema

La situazione di Fig.3 è in pratica piuttosto frequente (un esempio può essere fornito dalla caduta di tensione ai morsetti di un motore elettrico, per effetto della variazione di carico, in un sistema di regolazione di tensione); esso viene supposto costante (il che è lecito visto che siamo in condizioni statiche). Data per scontata l'ipotesi di linearità del nostro sistema, è possibile applicare il principio di sovrapposizione degli effetti: consideriamo pertanto soltanto l'effetto del disturbo in uscita e semplifichiamo lo schema di Fig.3 come segue:

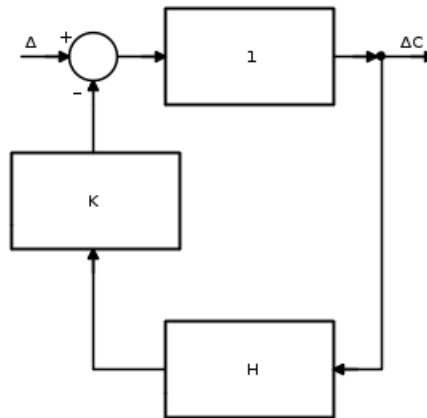


Fig.4 - Rappresentazione del sistema di Fig.3 in presenza del solo disturbo Δ

dove è stato inserito un blocco con f.d.t. unitaria equivalente ad un collegamento diretto. Il valore di **C** per effetto del disturbo vale:

$$\Delta C = \Delta \frac{1}{1 + KH} \quad [9]$$

Come vediamo, il disturbo Δ ha un'influenza sulla grandezza controllata tanto minore quanto più elevato è il guadagno statico di anello (al limite, il suo effetto è nullo per KH che diverge all'infinito).

Da un punto di vista fisico, l'effetto della regolazione sulla riduzione del disturbo può

essere spiegata considerando che la variazione ΔC per effetto del disturbo provoca una variazione del segnale di retroazione di una entità pari a:

$$H\Delta C = H \frac{\Delta}{1 + KH} \quad [10]$$

A sua volta, la variazione del segnale di retroazione provoca una variazione di segno opposto del segnale differenza:

$$\Delta D = -H \frac{\Delta}{1 + KH} \quad [11]$$

che, amplificata del fattore K , provoca una variazione del segnale C' di Fig.3:

$$\Delta C' = -KH \frac{\Delta}{1 + KH} \quad [12]$$

Per finire, sommando il disturbo, avremo una variazione complessiva della grandezza controllata pari a:

$$\Delta C = \Delta C' + \Delta = -KH \frac{\Delta}{1 + KH} + \Delta = \frac{\Delta}{1 + KH} \quad [13]$$

1.2 Disturbo agente in ingresso

L'effetto di riduzione del disturbo è tanto più efficace quanto più esso entra in prossimità dell'uscita del sistema; supponiamo adesso che il disturbo agisca all'ingresso della linea di azione diretta:

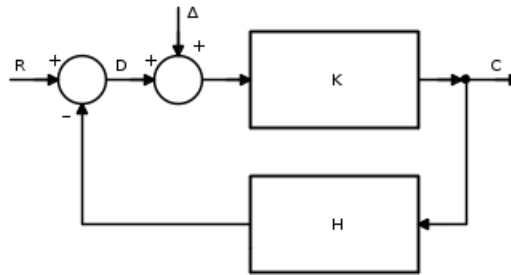


Fig.5 - Sistema di controllo in condizioni statiche con disturbo Δ all'ingresso

Esso equivarrebbe ad un disturbo sull'uscita di valore $K\Delta$, per cui la variazione della grandezza controllata risulterebbe pari a:

$$\Delta C = K \frac{\Delta}{1 + KH} \quad [14]$$

e per K divergente tenderebbe al valore finito $\frac{\Delta}{H}$ anziché al valore nullo.

Nel dimensionamento di un sistema di regolazione, occorre quindi che i primi elementi della catena (complesso di regolazione) siano il più possibile esenti da disturbi, in quanto il sistema di regolazione è in grado di correggere in prevalenza quelli che si originano verso l'uscita del sistema (complesso regolato). Analoghe considerazioni valgono per i disturbi che si originano nei trasduttori della linea di retroazione, dal momento che essi si presentano, tramite il nodo sommatore, all'ingresso della linea di azione diretta.

2. Esempi applicativi

Qualche esempio applicativo chiarirà ulteriormente quanto sopra esposto.

Esempio 1

Si determini l'influenza del disturbo $D(s)$ sulla risposta, in condizioni di regime permanente del sistema di Fig.6, assimilando $D(s)$ ad un gradino di ampiezza Δ che agisce in uscita sulla linea di azione diretta:

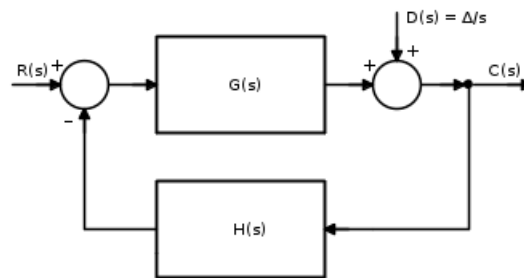


Fig.6

Per valutare l'effetto del disturbo sulla risposta del sistema, applichiamo il principio di sovrapposizione degli effetti: consideriamo l'uscita come somma dell'uscita $C_R(s)$, dovuta al segnale $R(s)$, e $C_D(s)$, dovuta al disturbo. Per $D(s)=0$ si ha:

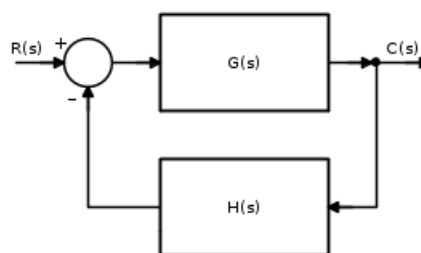


Fig.7

con:

$$C_R(s) = R(s) \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad [15]$$

Per $\mathbf{R(s)=0}$, applicando le regole degli schemi a blocchi:

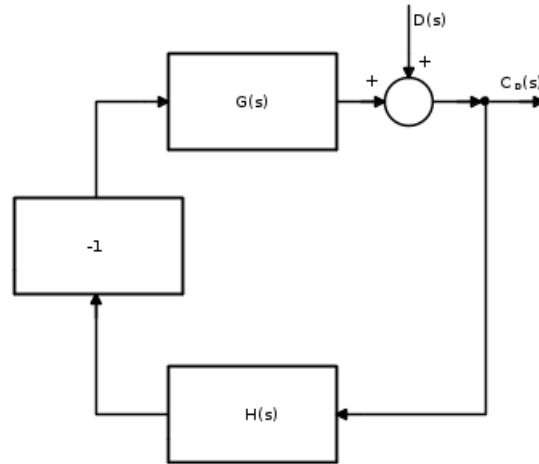


Fig.8

ed ulteriormente semplificabile come segue:

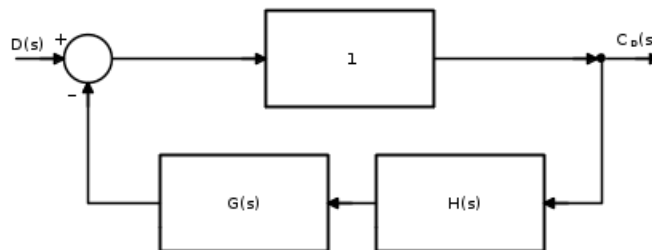


Fig.9

In questo caso l'uscita vale:

$$C_D(s) = D(s) \frac{1}{1 + G(s)H(s)} \quad [16]$$

Si ha quindi:

$$C_{RD}(s) = C_R(s) + C_D(s) = R(s) \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} + D(s) \frac{1}{1 + G(s)H(s)} \quad [17]$$

L'effetto che vogliamo valutare, ovvero la variazione dell'uscita in presenza del segnale di disturbo, è dato dalla differenza tra l'uscita affetta da disturbo $C_{RD}(s)$ e quella da esso immune $C_R(s)$, per cui la variazione $\Delta C(s)$ rilevata in uscita è:

$$\Delta C(s) = C_{RD}(s) - C_R(s) = R(s) \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} + D(s) \frac{1}{1 + G(s)H(s)} - R(s) \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad [18]$$

ovvero:

$$\Delta C(s) = D(s) \frac{1}{1 + G(s)H(s)} \quad [19]$$

pertanto, la variazione di uscita è dovuta al solo disturbo (come è giusto che sia essendo il sistema lineare).

Per determinare l'effetto in condizioni di regime permanente, applichiamo il teorema del valore finale; indicando con $\Delta C_{\Delta}(\infty)$ la variazione dell'uscita dovuta al disturbo in condizioni statiche, si ha:

$$\Delta C_{\Delta}(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{\Delta}{s} \frac{1}{1 + G(s)H(s)} = \frac{\Delta}{1 + G(s)H(s)} \quad [20]$$

Per quanto supposto in precedenza (ossia assenza di poli nell'origine per la funzione di anello aperto), la [20] si riduce al termine $\frac{\Delta}{1 + KH}$, che rappresenta proprio l'influenza del disturbo Δ sulla risposta statica. In altri termini, il disturbo risulta **attenuato** di una quantità $\frac{1}{1 + KH}$ e, passando al limite, se KH tende ad infinito (H costante e K tendente all' infinito) il disturbo **non** avrebbe alcun effetto sull'uscita, diventando nullo il termine $\frac{\Delta}{1 + KH}$.

Esempio 2

Si determini l'azione del disturbo $D(s)$ che agisce all'ingresso della linea di azione diretta, sulla risposta del sistema di Fig.10:

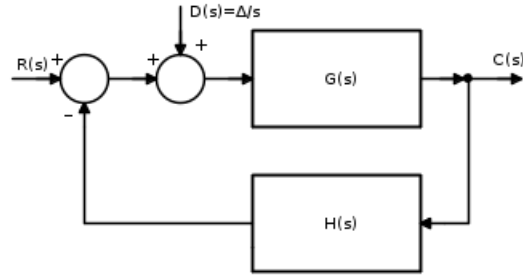


Fig.10

Analogamente a quanto fatto nel primo esempio, applichiamo il principio di sovrapposizione degli effetti: per $\mathbf{R(s)=0}$ si ha:

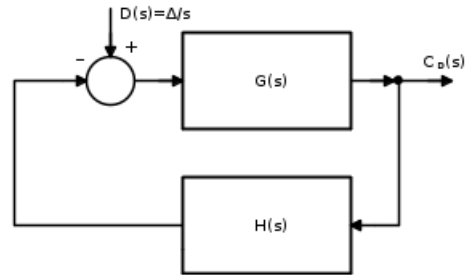


Fig.11

che ridisegniamo come segue:

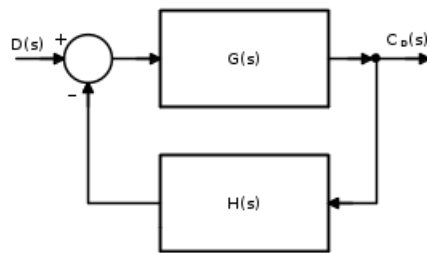


Fig.12

quindi:

$$C_D(s) = D(s) \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad [21]$$

ed in condizioni di regime permanente:

$$\Delta C_{\Delta}(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{\Delta}{s} \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} = \frac{\Delta G(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad [22]$$

Per le solite ipotesi in cui $\mathbf{G(s)=K}$ e $\mathbf{H(s)=H}$ si ha:

$$\Delta C_{\Delta}(\infty) = \frac{\Delta K}{1 + KH} \quad [23]$$

ed in tal caso il disturbo non sarebbe annullato neanche se $K \rightarrow \infty$ avendosi $\frac{\Delta}{H}$.

E' evidente quindi, come sia di notevole importanza avere i primi stadi del sistema di regolazione privi di disturbi. Fisicamente si nota che sia $\mathbf{R(s)}$ che $\mathbf{D(s)}$ incontrano lo stesso blocco $\mathbf{G(s)}$ prima dell'uscita e quindi vengono entrambi amplificati; per ridurre l'effetto del disturbo non rimane allora che **aumentare il livello** del segnale $\mathbf{R(s)}$ a valori molto maggiori di quelli del disturbo (cosa peraltro non sempre fattibile nelle applicazioni reali).

Esempio 3

Si studi il caso in cui il disturbo a gradino di ampiezza Δ entri in un punto intermedio della linea di azione diretta:

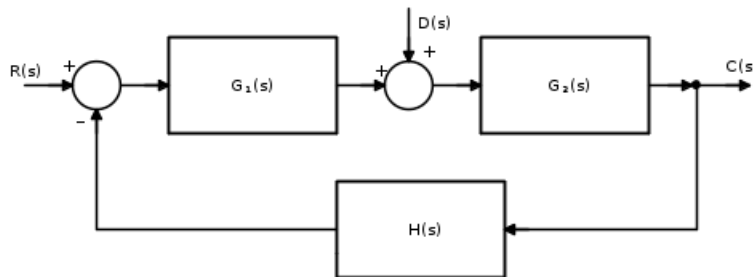


Fig.13

Procedendo come nei casi precedenti, per $\mathbf{R(s)=0}$ ed applicando opportunamente le regole di semplificazione dei blocchi, si perviene al seguente schema:

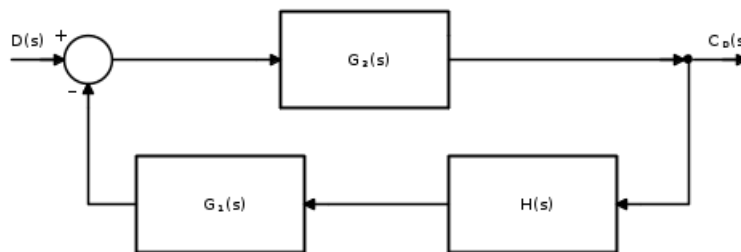


Fig.14

L'uscita per il sistema di Fig.14 risulta pertanto:

$$C_D(s) = D(s) \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} \quad [24]$$

In condizioni statiche, avendosi $K_1 = \lim_{s \rightarrow 0} G_1(s)$, $K_2 = \lim_{s \rightarrow 0} G_2(s)$ e $\mathbf{H(s)=H}$, otteniamo:

$$\Delta C_\Delta(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{\Delta}{s} \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} = \frac{\Delta K_2}{1 + K_1 K_2 H} \quad [25]$$

che mostra come l'effetto del disturbo risulti attenuato se si eleva K_1 e si riduce K_2 . Quindi, in generale, per avere un sistema con un buon comportamento nei riguardi dei disturbi, occorre che i primi stadi della catena abbiano un guadagno **elevato** ma, per quanto visto nel secondo esempio, questi stadi devono essere **privi di disturbi**.

Esempio 4

Si valuti l'effetto di un disturbo $D(s) = \frac{\Delta}{s}$ agente sulla linea di retroazione in ingresso al blocco trasduttore $\mathbf{H(s)}$ nello schema di Fig.15:

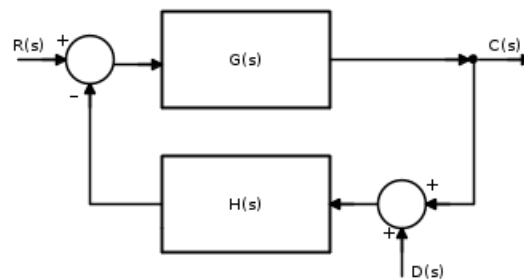


Fig.15

Sulla stessa linea risolutiva dei precedenti esempi, per $\mathbf{R(s)=0}$ lo schema di Fig.15 è equivalente al seguente:

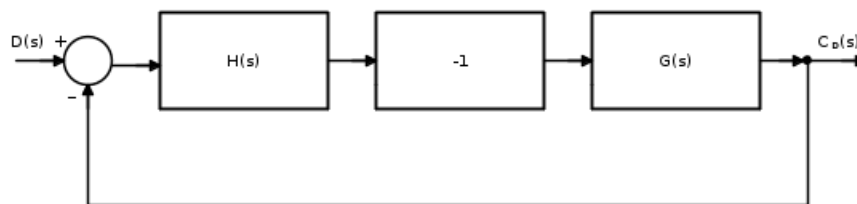


Fig.16

L'uscita vale quindi:

$$C_D(s) = \frac{-G(s)H(s)D(s)}{1 - [-G(s)H(s)]} = \frac{-G(s)H(s)D(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad [26]$$

Applicando il teorema del valore finale e supponendo f.d.t. esenti da poli semplici nell'origine, perveniamo alla relazione seguente:

$$\Delta C_\Delta(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{\Delta}{s} \frac{-G(s)H(s)}{1 + G(s)H(s)} = -\frac{\Delta KH}{1 + KH} \quad [27]$$

da cui deduciamo che, nei casi pratici in cui **$KH \gg 1$** , risulta $\Delta C_\Delta(\infty) = -\Delta$, vale a dire che il disturbo resta pressoché **invariato**. E' allora estremamente importante avere la linea di reazione totalmente **esente da disturbi**, perché essi non vengono sensibilmente attenuati.

Esempio 5

Vediamo infine un esempio numerico; dato il sistema rappresentato in Fig.17:

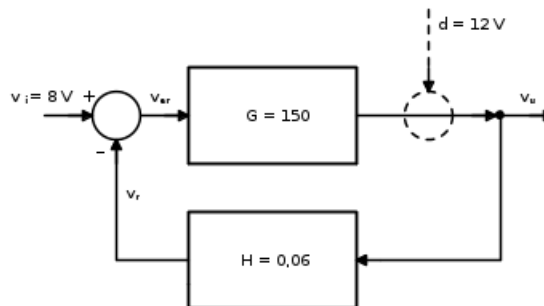


Fig.17

si determini:

- a)** la tensione di uscita v_u , la tensione della linea di retroazione v_r , l'errore v_{er} ;
 - b)** l'effetto della retroazione negativa, quando è presente in uscita un disturbo **$d = 12 \text{ V}$** ;
 - c)** si confrontino i risultati ottenuti al punto b) con i risultati che si hanno in assenza della linea di retroazione.
- a)** Per calcolare i valori di v_u , v_r e v_{er} , occorre determinare la f.d.t. ad anello chiuso:

$$G' = \frac{G}{1 + GH} = \frac{150}{1 + 150 \cdot 0,06} = 15$$

Le grandezze richieste valgono pertanto:

$$\begin{aligned}
 v_u &= G' \cdot v_i = 15 \cdot 8 = 120 \text{ V} \\
 v_r &= H \cdot v_u = 0,06 \cdot 120 = 7,2 \text{ V} \\
 v_{er} &= v_i - v_r = 8 - 7,2 = 0,8 \text{ V}
 \end{aligned}$$

b) Per valutare l'effetto del disturbo in uscita consideriamo il seguente schema:

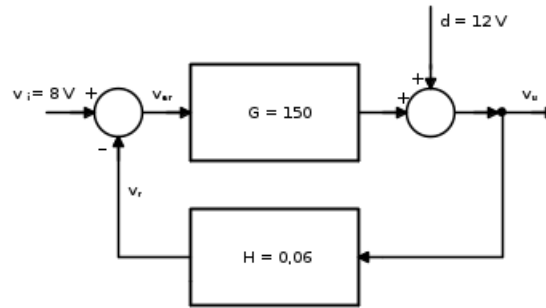


Fig.18

Annullando l'ingresso, si ha:

$$G' = \frac{1}{1 + 150 \cdot 0,06} = 0,1$$

La tensione di uscita v_{ud} è:

$$v_{ud} = G' \cdot d = 0,1 \cdot 12 = 1,2 \text{ V}$$

da cui derivano tutte le altre grandezze della catena:

$$\begin{aligned}
 H \cdot v_{ud} &= 0,06 \cdot 1,2 = 0,072 \text{ V} \\
 v_r &= G \cdot 0,072 = 150 \cdot 0,072 = 10,8 \text{ V} \\
 v_{er} &= d - v_r = 12 - 10,8 = 1,2 \text{ V}
 \end{aligned}$$

Schematicamente:

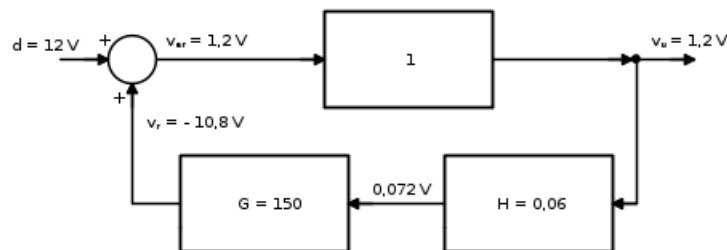


Fig.19

Per valutare l'effetto benefico della retroazione, si compongono le situazioni illustrate in Fig.16 e Fig.18, ottenendo così la tensione di uscita totale v_{uT} data da:

$$v_{uT} = v_u + v_{ud} = 120 + 1,2 = 121,2 \text{ V}$$

Si ha inoltre:

$$v_r = v_{uT} \cdot H = 121,2 \cdot 0,06 = 7,27 \text{ V}$$

e l'errore vale:

$$v_{er} = v_i - v_r = 8 - 7,27 = 0,73 \text{ V}$$

In uscita dal blocco **G** la tensione vale:

$$0,73 \cdot 150 = 109,2 \text{ V}$$

che sommata al disturbo fornisce un segnale pari a:

$$v_{ut} = 109,2 + 12 = 121,2 \text{ V}$$

Schematicamente:

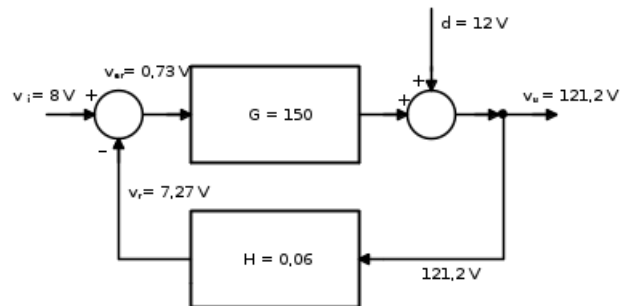


Fig.20

c) Se il sistema di Fig.17 fosse a catena aperta, il segnale di disturbo si sarebbe propagato interamente in uscita:

$$v_{uT} = 120 + 12 = 132 \text{ V}$$

con variazione della grandezza pari a 12 V.

In presenza della retroazione invece, lo stesso disturbo **d = 12 V** viene ridotto e l'uscita, essendo $v_{uT} = 121,2 \text{ V}$ **varia di 1,2 V anziché di 12 V**.

Bibliografia

[1] Appunti e dispense del corso di Controlli Automatici tenuto presso la facoltà di Ingegneria Elettronica dell'Università degli Studi di Palermo; [2] Giuseppe Sabatini - Esercizi e applicazioni di Elettronica Industriale con note teoriche, Edizioni Cupido

Estratto da "<http://www.electroyou.it/mediawiki/index.php?title=UsersPages:Jordan20:sistemi-di-controllo-condizioni-di-regime-permanente>"