



Emanuele Lorina (Lele_u_biddrazzu)

LE EQUAZIONI DI MAXWELL: DALLA FORMA DIFFERENZIALE A QUELLA INTEGRALE (I)

29 February 2020

Dopo un bel po' di tempo, ho deciso di scrivere un paio di articoli su un argomento che mi ha sempre affascinato ed incuriosito: il passaggio dalla formulazione differenziale a quella integrale, e viceversa, delle equazioni di Maxwell. Motivo di questo interesse è legato alla possibilità di poter considerare, grazie alle suddette formulazioni, i medesimi fenomeni elettromagnetici da prospettive diverse sebbene affini: una sarebbe la prospettiva macroscopica, dove si considerano grandezze scalari quali tensione e corrente elettrica, mentre l'altra, essendo "puntuale", coinvolge grandezze vettoriali come il campo elettrico e quello magnetico. Sono due i teoremi matematici che permettono di passare da una delle due formulazioni all'altra: il "teorema della divergenza" e quello di "Stockes"; teoremi piuttosto ostici ma che celano delle interessanti proprietà dei campi vettoriali. In questo primo articolo focalizzerò l'attenzione sul primo dei due teoremi menzionati, facendone prima un breve cenno per poi applicarlo alle equazioni di Maxwell.

Il teorema della divergenza, un cenno...

La divergenza è un'operazione che permette di associare ad un generico campo vettoriale \mathbf{F} , funzione del punto P , un campo scalare così definito in coordinate cartesiane x, y e z :

$$\nabla \cdot \mathbf{F}(P) = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \quad (1)$$

Considerando variazioni finite sufficientemente piccole sebbene non infinitesime delle grandezze in gioco, la **(1)** può essere approssimata come segue:

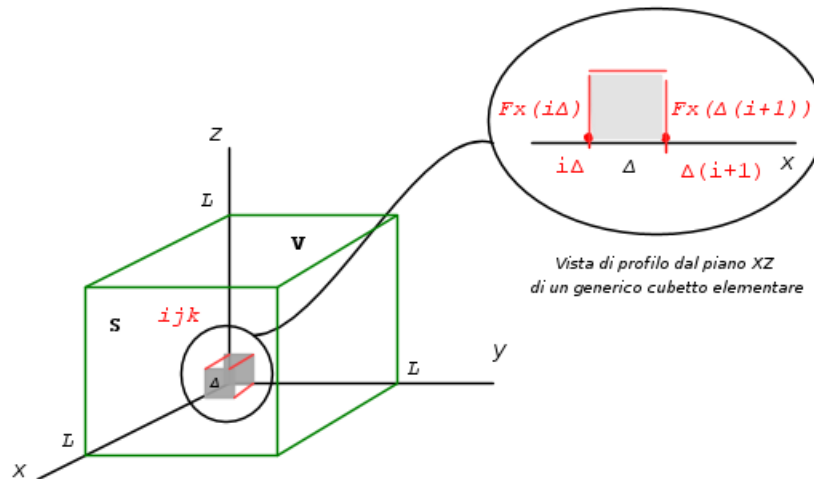
$$\nabla \cdot \mathbf{F}(P) \approx \frac{\Delta F_x}{\Delta x} + \frac{\Delta F_y}{\Delta y} + \frac{\Delta F_z}{\Delta z} \quad (2)$$

La **(1)**, così come la **(2)**, indicano che la divergenza di \mathbf{F} in un dato punto P è pari alla somma delle variazioni relative delle sue componenti rispetto ai corrispondenti assi coordinati; quanto detto implica che laddove la suddetta somma dovesse essere diversa da zero, le variazioni delle componenti di campo lungo gli assi coordinati non si compenserebbero tra loro permettendo così di identificare P come una *sorgente* od un *pozzo* delle linee di forza del campo vettoriale \mathbf{F} in base al segno della divergenza ivi calcolata:

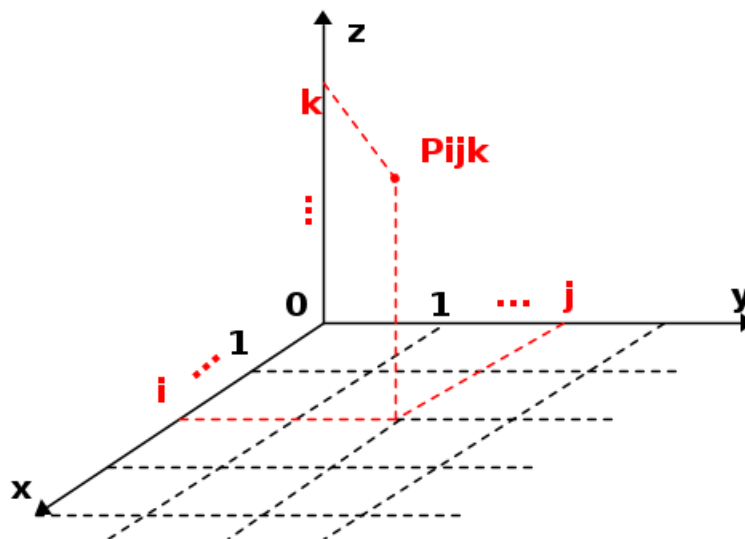
- se $\nabla \cdot \mathbf{F}(P) > 0$, P viene denominato *sorgente* per il campo \mathbf{F} ;

- se $\nabla \cdot \mathbf{F}(P) < 0$, P viene denominato *pozzo* per il campo \mathbf{F} .

Si faccia adesso riferimento al cubo mostrato nella figura sottostante, avente volume V ed immerso nel campo vettoriale $\mathbf{F}(\mathbf{P})$, e lo si scomponga in tanti cubi *elementari* di volume $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z = \Delta^3$ molto piccolo sebbene non infinitesimo.



In seguito a questo processo di *discretizzazione*, i vertici dei cubi elementari appena definiti costituiscono un insieme di punti equidistanti $P_{ijk}(i\Delta, j\Delta, k\Delta)$ che potranno essere facilmente individuati dalla terna di indici numerici \mathbf{i}, \mathbf{j} e \mathbf{k} come indicato nella figura sottostante.



Applicando la (2) ad ognuno dei punti \mathbf{P}_{ijk} e moltiplicando ambo i membri per Δ^3 , si ottiene:

$$\nabla \cdot \mathbf{F}(P_{ijk}) \Delta^3 \approx \underbrace{\Delta F_x(P_{ijk}) \Delta^2}_{A_{ijk}} + \underbrace{\Delta F_y(P_{ijk}) \Delta^2}_{B_{ijk}} + \underbrace{\Delta F_z(P_{ijk}) \Delta^2}_{C_{ijk}} \quad (3)$$

essendo:

$$A_{ijk} = (F_x(P_{i+1,j,k}) - F_x(P_{ijk})) \Delta^2 \quad (4)$$

$$B_{ijk} = (F_y(P_{i,j+1,k}) - F_y(P_{ijk})) \Delta^2 \quad (5)$$

$$C_{ijk} = (F_z(P_{i,j,k+1}) - F_z(P_{ijk})) \Delta^2 \quad (6)$$

Si applichi la **(3)** a tutti i N^3 punti che compongono il cubo di partenza e poi si sommino tra loro i singoli contributi ottenendo quanto segue.

$$\sum_{k=0}^N \sum_{j=0}^N \sum_{i=0}^N \nabla \cdot \mathbf{F}(P_{ijk}) \Delta^3 \approx \sum_{k=0}^N \sum_{j=0}^N \sum_{i=0}^N (A_{ijk} + B_{ijk} + C_{ijk}) \quad (7)$$

Dal momento che valgono le seguenti relazioni:

$$A_{i+1,j,k} + A_{ijk} = F_x(P_{i+2,j,k}) \Delta^2 - F_x(P_{ijk}) \Delta^2 \quad (8)$$

$$B_{i,j+1,k} + B_{ijk} = F_y(P_{i,j+2,k}) \Delta^2 - F_y(P_{ijk}) \Delta^2 \quad (9)$$

$$C_{i,j,k+1} + C_{ijk} = F_z(P_{i,j,k+2}) \Delta^2 - F_z(P_{ijk}) \Delta^2 \quad (10)$$

la **(7)** può essere così esplicitata

$$\sum_{k=0}^N \sum_{j=0}^N \sum_{i=0}^N \nabla \cdot \mathbf{F}(P_{ijk}) \Delta^3 \approx \Phi_x + \Phi_y + \Phi_z \quad (11)$$

essendo

$$\Phi_x = \sum_{k=0}^N \sum_{j=0}^N F_x(P_{Njk}) \Delta^2 - \sum_{k=0}^N \sum_{j=0}^N F_x(P_{0jk}) \Delta^2 \quad (12)$$

$$\Phi_y = \sum_{k=0}^N \sum_{i=0}^N F_y(P_{iNk}) \Delta^2 - \sum_{k=0}^N \sum_{i=0}^N F_y(P_{i0k}) \Delta^2 \quad (13)$$

$$\Phi_z = \sum_{j=0}^N \sum_{i=0}^N F_z(P_{ijN}) \Delta^2 - \sum_{j=0}^N \sum_{i=0}^N F_z(P_{ij0}) \Delta^2 \quad (14)$$

Da notare che il secondo membro della **(11)** rappresenta un'approssimazione del flusso uscente del campo $\mathbf{F}(\mathbf{P})$ attraverso la superficie S che delimita il volume V .

Supponendo $\Delta \rightarrow 0$, ovvero un numero di punti tendente ad infinito, la **(11)** diventa:

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{F}(P) dV = \oint_S \mathbf{F}(P) \cdot \mathbf{n} dS \quad (15)$$

essendo \mathbf{n} il versore uscente alla superficie S che delimita il volume V .

La **(15)** rappresenta quindi il *ponte di collegamento* tra l'integrale di volume, esteso a V , della divergenza di un campo vettoriale ed il flusso uscente di quest'ultimo attraverso la superficie chiusa S che delimita V : quanto appena detto costituisce, in buona sostanza, l'enunciato del cosiddetto *teorema della divergenza*.

Il teorema di Gauss del campo elettrico

Considerando come mezzo fisico il vuoto, risulta valida la seguente equazione di Maxwell che coinvolge la divergenza del campo elettrico \mathbf{E} :

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (16)$$

essendo ρ e ε_0 rispettivamente la densità volumetrica di carica elettrica e la costante dielettrica nel vuoto.

Data una generica distribuzione di carica elettrica all'interno del volume V , delimitato dalla superficie chiusa S , ed ivi integrando ambo i membri della **(16)**, si ottiene la seguente relazione:

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{E} dV = \frac{\iiint_V \rho dV}{\varepsilon_0} \quad (17)$$

dove, si noti, il termine $\iiint_V \rho dV$ non è altro che la carica complessiva Q contenuta all'interno del volume V .

Applicando adesso il *teorema della divergenza* al primo membro della **(17)**, si ottiene il passaggio dall'integrale di volume a quello di superficie (flusso):

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{E} dV = \oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS \quad (18)$$

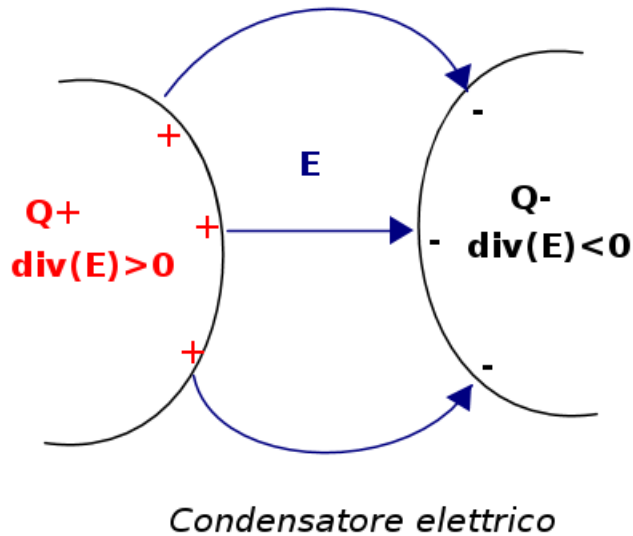
pertanto la **(17)** assumerà la seguente formulazione:

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad (19)$$

nota come la formulazione "integrale" del *teorema di Gauss* del campo elettrico.

Sia la **(16)** che la **(19)** comunicano che il campo elettrico ha origine/fine in presenza di cariche positive/negative, tuttavia questa informazione viene resa da due punti di vista diversi. In particolare la **(16)** esprime tale concetto da un punto di vista "puntuale", coinvolgendo grandezze quali la densità volumetrica di carica e la divergenza del campo elettrico; la **(19)** invece coinvolge

grandezze come la carica elettrica netta totale ed il flusso del campo elettrico attraverso una superficie chiusa, tralasciando pertanto l'aspetto "puntuale" a favore di quello "globale" o "macroscopico". Nella figura sottostante una rappresentazione schematica di un condensatore elettrico, dove le linee di forza del campo elettrico hanno *divergono* in corrispondenza dell'armatura con accumulo di cariche positive e *convergono* nell'altra con accumulo di cariche negative.



La solenoidali  di **B**...

L'ultima equazione di Maxwell che verr  considerata riguarda la divergenza del campo induzione magnetica **B**:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (20)$$

che indica la cosiddetta *solenoidalit * di **B**.

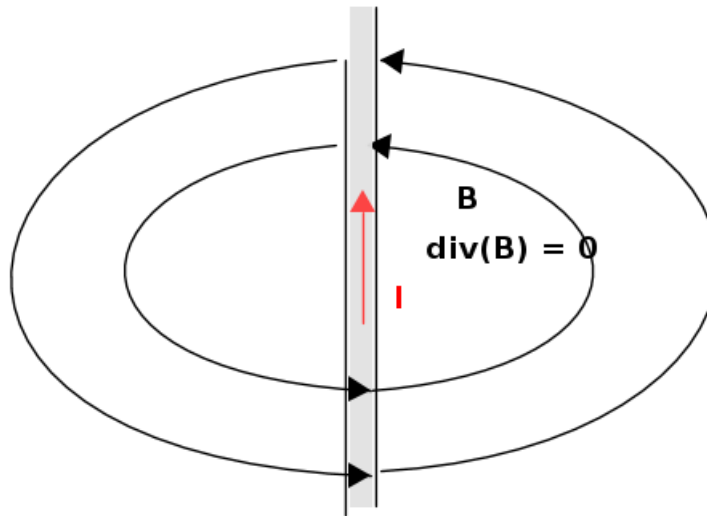
Per comprendere meglio il significato di questa affermazione, si applichi alla (20) il medesimo procedimento descritto nel paragrafo precedente per ottenerne la corrispondente formulazione "globale":

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = 0 \quad (21)$$

la quale permette di affermare che **B**   solenoidale poich  il suo flusso attraverso una qualsiasi superficie chiusa *S*   sempre uguale a zero.

Le relazioni (20) e (21) esprimono in modo coinciso un'evidenza sperimentale: il mancato riscontro della presenza di monopoli magnetici in natura; in base a quanto detto, il campo dell'induzione magnetica, non avendo n  sorgenti e n  pozzi, sar  graficamente descritto la linee

di forza che dovranno sempre e comunque richiudersi su se stesse, così come indicato nella figura sottostante.



Conduttore percorso dalla corrente elettrica I

Conclusioni

A questo punto, per concludere, vorrei suggerire qualche testo per chi volesse approfondire queste tematiche:

- Introduction to Electrodynamics - David J. Griffiths ([link](#))
- Classical Electrodynamics - John David Jackson ([link](#))

Estratto da "https://www.electroyou.it/mediawiki/index.php?title=UsersPages:Lele_u_biddrazzu:euquazioni-di-maxwell-dalla-forma-differenziale-a-quella-integrale"