

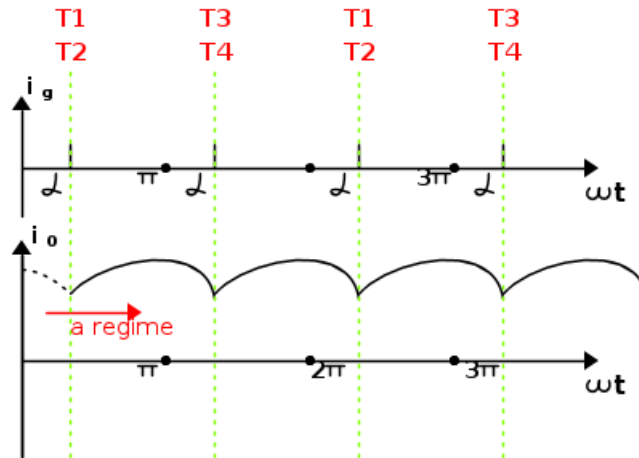
Roronoa Lillo (lillo)

RADDRIZZATORI, ATTO FINALE

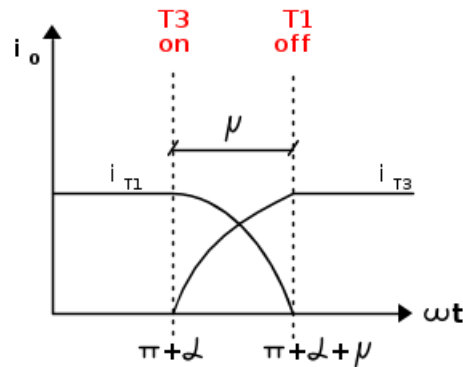
12 December 2011

Dall'ideale al reale

Abbiamo visto il ponte raddrizzatore nel [secondo atto](#), e abbiamo detto che c'è una fase in cui avviene una cosa terrificante, **la commutazione**. Per rispolverare riporto uno schema:



La commutazione ha una sua durata, cessa quindi l'ipotesi fatta finora di commutazione ideale. Indichiamo con μ la sua durata in radianti. Per chiarezza ecco l'andamento delle correnti durante una commutazione reale:



Particolare della fase di commutazione

Da quanto rappresentato possiamo quindi scrivere le seguenti considerazioni:

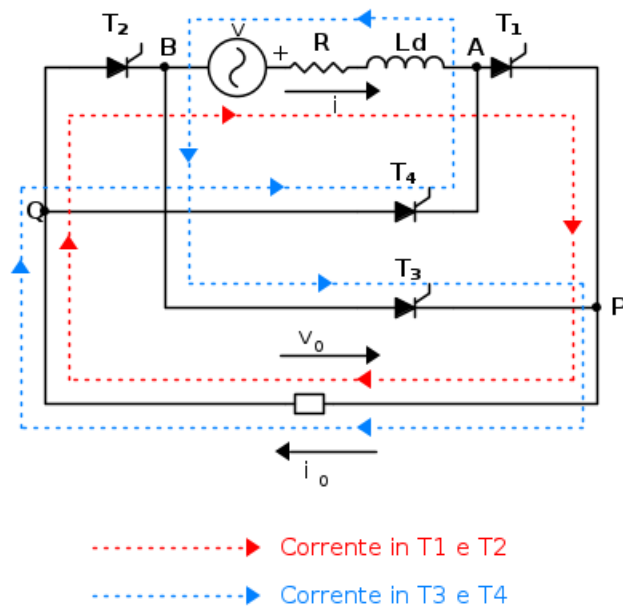
$$\omega t < \pi + \alpha \rightarrow T_1 \ T_2 \text{ on} \quad T_3 \ T_4 \text{ off}$$

$$\omega t = \pi + \alpha \rightarrow T_1 \ T_2 \text{ on} \quad T_3 \ T_4 \text{ on}$$

$$\omega t \geq \pi + \alpha + \mu \rightarrow T_1 \ T_2 \text{ off} \quad T_3 \ T_4 \text{ on}$$

La nostra analisi può cominciare osservando il circuito durante la contemporanea conduzione di tutti e quattro i tiristori, osservando il

Circuito di commutazione



Adesso dobbiamo scrivere le due **LKT** alle **maglie** interessate dalle due correnti:

$$\begin{cases} v_{AB} - Ri - L_d \frac{di}{dt} - v_0 = 0 \\ -v_{AB} + Ri + L_d \frac{di}{dt} - v_0 = 0 \end{cases}$$

che riscritte meglio ci restituiscono:

$$\begin{cases} v_{AB} = Ri + L_d \frac{di}{dt} + v_0 \\ -v_{AB} = v_{BA} = -Ri - L_d \frac{di}{dt} + v_0 \end{cases}$$

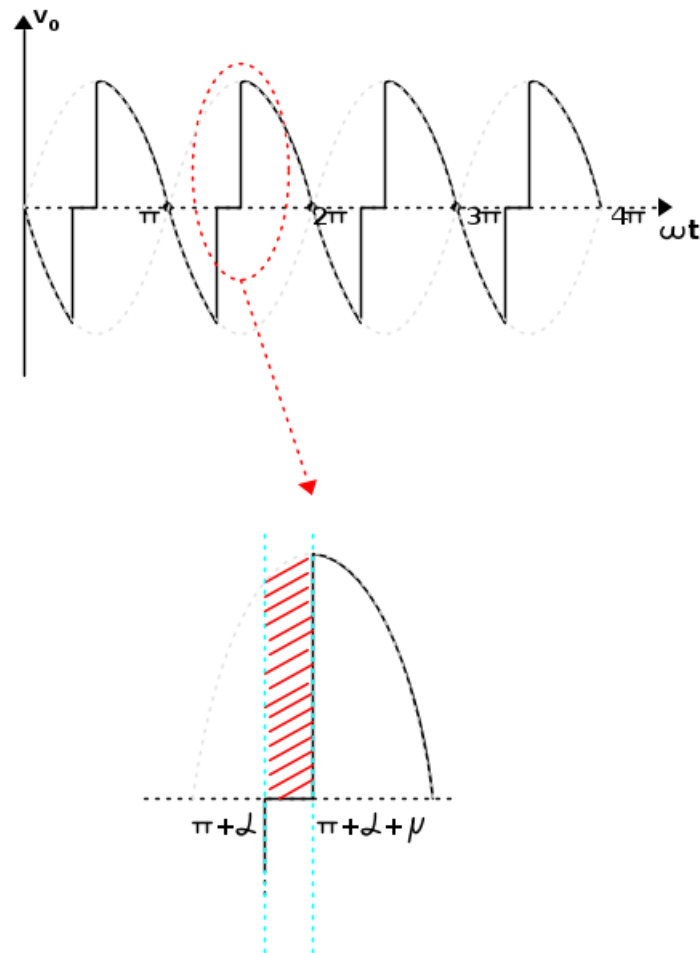
sommando membro a membro le due equazioni ricaviamo:

$$\begin{aligned}
 v_{AB} &= Ri + L_d \frac{di}{dt} + v_0 \\
 v_{BA} &= -Ri - L_d \frac{di}{dt} + v_0 \\
 \hline
 v_{AB} + v_{BA} &= 0 + 0 + 2v_0
 \end{aligned}$$

questa relazione ci mostra un interessantissima cosa; infatti esplicitando v_0 otteniamo:

$$v_0 = \frac{v_{AB} + v_{BA}}{2} = \frac{v_{AB} - v_{AB}}{2} = 0$$

Durante la fase di commutazione la tensione sul carico è nulla. Per questo motivo dobbiamo rappresentare nuovamente la forma d'onda di tensione sul carico, tenendo conto di quanto detto:



La commutazione reale quindi comporta la perdita di quota parte di tensione, che prende il nome di **tensione perduta** v_p . E' possibile calcolare questa tensione, ma per farlo dobbiamo prima conoscere gli andamenti delle correnti, e poi ricavare μ , angolo di commutazione, anche conosciuto come *overlap angle*. Con riferimento allo

schema in cui il quartetto di tiristori conduce, scriviamo gli equilibri delle correnti al nodo A e al nodo P:

$$\begin{cases} i_{T_1} = i + i_{T_4} \rightarrow \text{nodo } A \\ i_0 = i_{T_1} + i_{T_3} \rightarrow \text{nodo } P \end{cases} \quad (1)$$

ovviamente non dimentichiamo che:

$$\begin{aligned} i_{T_1} &= i_{T_2} \\ i_{T_3} &= i_{T_4} \end{aligned}$$

e riscriviamo la (1) tenendo conto di queste uguaglianze:

$$\begin{cases} i = i_{T_1} - i_{T_3} \\ i_{T_3} = i_0 - i_{T_1} \end{cases}$$

e risolvendo rispetto a i otteniamo:

$$i = i_{T_1} - (i_0 - i_{T_1}) = 2i_{T_1} - i_0$$

Riprendiamo adesso la prima delle due equazioni alle maglie:

$$v_{AB} = Ri + L_d \frac{di}{dt} + v_0$$

che trascurando la caduta di tensione sulla resistenza, e ricordando che in fase di commutazione la tensione sul carico è nulla, diventa:

$$v_{AB} \cong L_d \frac{di}{dt} = L_d \frac{d(2i_{T_1} - i_0)}{dt} = 2L_d \frac{di_{T_1}}{dt} - L_d \frac{di_0}{dt} \quad (2)$$

Il termine $L_d \frac{di_0}{dt}$ si annulla in quanto la breve durata del fenomeno ci permette di considerare la i_0 costante e pari al valore I_0 , e la derivata di una costante sappiamo essere nulla. La (2) quindi diventa:

$$v_{AB} \cong 2L_d \frac{di_{T_1}}{dt} \rightarrow i_{T_1} \cong \frac{1}{2L_d} \int v_{AB} dt$$

lo sviluppo dell'integrale ci fornirà l'andamento di i_{T_1} :

$$i_{T_1} = \frac{1}{2\omega L_d} \int \sqrt{2}V \sin \omega t d\omega t = \frac{\sqrt{2}V}{2\omega L_d} (-\cos \omega t + A)$$

Il valore della costante A va ricercato nelle condizioni iniziali, ovvero all'inizio della commutazione in $\omega t = \pi + \alpha$. Inoltre in quell'istante tutta la corrente del carico transita in T_1 , e con quanto supposto precedentemente tale corrente vale I_0 :

$$I_0 = \frac{\sqrt{2}V}{2\omega L_d} [-\cos(\pi + \alpha) + A] = \frac{\sqrt{2}V}{2\omega L_d} (\cos \alpha + A)$$

da cui ricaviamo A:

$$A = \frac{2\omega L_d I_0}{\sqrt{2}V} - \cos \alpha$$

e possiamo quindi scrivere la soluzione completa:

$$i_{T_1} = I_0 - \frac{\sqrt{2}V}{2\omega L_d} (\cos \omega t + \cos \alpha)$$

Senza troppi complimenti ricaviamo anche i_{T_3} scrivendo la LKC al nodo P:

$$i_{T_3} = I_0 - i_{T_1} = \frac{\sqrt{2}V}{2\omega L_d} (\cos \omega t + \cos \alpha)$$

Non dimentichiamo l'obiettivo: calcolare l'*overlap angle*, ovvero la durata in radianti della commutazione. Conoscendo l'andamento di i_{T_1} , e sapendo che in $\omega t = \pi + \alpha + \mu$ tale corrente è nulla, ricaviamo:

$$0 = I_0 - \frac{\sqrt{2}V}{2\omega L_d} [\cos(\pi + \alpha + \mu) + \cos \alpha]$$

$$0 = I_0 - \frac{\sqrt{2}V}{2\omega L_d} [-\cos(\pi + \mu) + \cos \alpha]$$

$$\frac{2\omega L_d I_0}{\sqrt{2}V} = -\cos(\pi + \mu) + \cos \alpha$$

$$\mu = -\alpha + \arccos[\cos \alpha - \frac{2\omega L_d I_0}{\sqrt{2}V}] \rightarrow \text{overlap angle}$$

Ovviamente quanto detto vale anche per l'altra coppia di tiristori.

La tensione media reale

La tensione media sul carico si sarà ovviamente accorta che la commutazione non è più ideale. Indicando con V_r la reale tensione sul carico, procediamo alla sua analisi:

$$V_r = \frac{1}{T_0} \int_{(T_0)} v dt = \frac{1}{\omega T_0} \int_{\alpha}^{\alpha+\pi} \sqrt{2}V \sin \omega t d\omega t$$

dove l'ultimo integrale può essere riscritto, considerando che da α a $\alpha + \mu$ la tensione è nulla, come:

$$V_r = \frac{1}{\omega T_0} \int_{\alpha+\mu}^{\alpha+\pi} \sqrt{2}V \sin \omega t \, d\omega t$$

Ora un piccolo artificio matematico: sommiamo e sottraiamo il seguente integrale:

$$\frac{1}{\omega T_0} \int_{\alpha}^{\alpha+\mu} \sqrt{2}V \sin \omega t \, d\omega t:$$

$$V_r = \frac{1}{\omega T_0} \int_{\alpha+\mu}^{\alpha+\pi} \sqrt{2}V \sin \omega t \, d\omega t + \frac{1}{\omega T_0} \int_{\alpha}^{\alpha+\mu} \sqrt{2}V \sin \omega t \, d\omega t -$$

$$+ \frac{1}{\omega T_0} \int_{\alpha}^{\alpha+\mu} \sqrt{2}V \sin \omega t \, d\omega t$$

La somma dei primi due è una quantità a noi nota: si tratta infatti di V_m , tensione media sul carico nell'ipotesi di commutazione ideale. Il termine detrattivo rappresenta la tensione perduta V_p . Possiamo quindi considerare la tensione media reale come:

$$V_r = V_m - V_p = V_m - \frac{1}{\omega T_0} \int_{\alpha}^{\alpha+\mu} \sqrt{2}V \sin \omega t \, d\omega t$$

Calcoliamo la tensione perduta risolvendo l'integrale:

$$V_p = \frac{1}{\omega T_0} \int_{\alpha}^{\alpha+\mu} \sqrt{2}V \sin \omega t \, d\omega t = \frac{\sqrt{2}V}{\omega T_0} [-\cos \omega t]_{\alpha}^{\alpha+\mu}$$

$$= -\frac{\sqrt{2}V}{\omega T_0} [\cos(\alpha + \mu) - \cos \alpha]$$

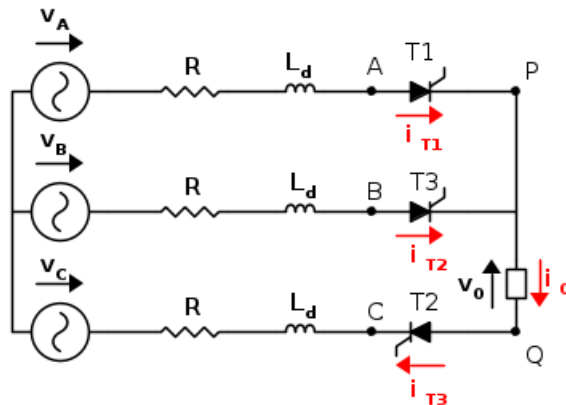
e ricordando che $\cos(\alpha + \mu) - \cos \alpha = -\frac{2\omega L_d I_0}{\sqrt{2}V}$ si ottiene:

$$V_p = \frac{\sqrt{2}V}{\omega T_0} \left(-\frac{2\omega L_d I_0}{\sqrt{2}V} \right) = \frac{2L_d I_0}{T_0} = 4f L_d I_0$$

dove l'ultima espressione è ricavata considerando che il ponte monofase interamente controllato è un raddrizzatore a due impulsi. Nella pratica la tensione perduta vale qualche % della tensione media ideale. La formula mette in evidenza (e spiega anche perché l'abbiamo considerata fin'ora) che l'unico parametro su cui poter far leva è l'induttanza di dispersione. Diminuendo quest'ultima diminuirebbe la tensione persa, ma questo non è certo cosa semplice, e inoltre aumenterebbe il costo del trasformatore. La riduzione dell'induttanza di dispersione comporterebbe inoltre transistori meno dolci, che può risultare un vantaggio per il tiristore in spegnimento, ma non di certo per quello in accensione, il quale potrebbe non tollerare il brusco aumento di corrente.

E nel ponte trifase?

In linea di massima si segue lo stesso procedimento: A chi interessa dare una rispolverata, soprattutto agli schemi riguardanti il caso di $\alpha = 30^\circ$, desse un'occhiata [qui](#). e questo sotto, è lo schema nel caso di commutazione **non ideale** tra T_1 e T_3 :



Non voglio ingozzarvi di integrali, e per questo cercherò di essere il più conciso possibile: L'analisi comincia scrivendo l'equazione alle due maglie contenenti v_A e v_B , e richiudendo entrambe attraverso il carico e il ramo contenente v_C . Si tiene presente l'equazione al nodo P, assieme alla considerazione che la corrente sul carico i_0 sia costante anche durante la commutazione e pari a un valore I_0 . Questa volta scopriremo che la tensione sul carico non è nulla durante la commutazione ma si assesta a un valore pari alla media delle tensioni agenti sul carico prima e dopo la commutazione:

$$v_0 = \frac{v_{AC} + v_{BC}}{2}$$

quindi non nulla come nel caso monofase. Quindi si riprendono le equazioni alle maglie e si cerca di ricavare le correnti nei due tiristori in funzione di una concatenata nota per permetterci l'integrazione. Nel caso trifase le correnti in T_1 e T_3 valgono:

$$i_{T1} = I_0 - \frac{\sqrt{6}V}{2\omega L_d} [\cos(\omega t + \frac{\pi}{6}) + \cos \alpha]$$

$$i_{T3} = \frac{\sqrt{6}V}{2\omega L_d} [\cos(\omega t + \frac{\pi}{6}) + \cos \alpha]$$

Trovate le correnti è possibile risalire all'overlap angle:

$$\mu = -\alpha + \arccos\left[\cos\alpha - \frac{2\omega L_d I_0}{\sqrt{6}V}\right] \rightarrow \text{overlap angle}$$

noto il quale possiamo finalmente ricavare la tensione perduta:

$$V_p = 6fL_d I_0$$

Cambiano solo le tensioni di alimentazione, e gli estremi di integrazione.

Studio delle forme d'onda

Il lato rete viene fortemente influenzato dal lato carico, abbiamo visto [qui](#) ad esempio, le correnti richiamate ai primari dei trasformatori. Non sembrano affatto forme d'onda perfettamente sinusoidali, come d'altronde sul lato carico non abbiamo assolutamente correnti perfettamente continue continue. Le grandezze lato carico che lato rete contengono nelle loro forme d'onda un certo quantitativo armonico. Lo studio delle grandezze deformate viene affrontato attraverso lo [sviluppo in serie di Fourier](#). Distinguiamo quindi due differenti analisi:

Analisi lato carico

In precedenza ci eravamo occupati del calcolo del valor medio di corrente ai capi del carico, ad esempio:

- [qui](#) per il ponte monofase:
- [qui](#) per il ponte trifase

In realtà l'espressione completa di v_0 , ovvero quella che tiene conto anche del contenuto armonico risulta essere:

$$v_0 = V_m + \sum_{k=1}^{\infty} \hat{V}_{0n} \sin(n\omega_0 t + \vartheta_n)$$

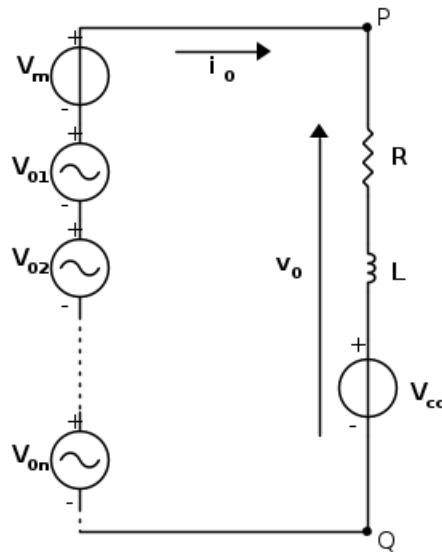
NB: $\omega_0 = 2\pi f_0$ è la pulsazione in uscita dal convertitore.

dove V_m è il valor medio di tensione, diverso in funzione del tipo di raddrizzatore come visto; mentre, ampiezza e fase della n-esima armonica di tensione sono così individuabili:

$$\hat{V}_{0n} = \sqrt{\hat{V}_{0cn}^2 + \hat{V}_{0sn}^2} \xrightarrow{\text{con}} \begin{cases} \hat{V}_{0cn} = \frac{2}{T_0} \int_{(T_0)} v_0 \cos(n\omega_0 t) dt \\ \hat{V}_{0sn} = \frac{2}{T_0} \int_{(T_0)} v_0 \sin(n\omega_0 t) dt \end{cases}$$

$$\vartheta_n = \arctan\left(\frac{\hat{V}_{0cn}}{\hat{V}_{0sn}}\right)$$

Molto intuitivamente si può immaginare il carico alimentato da una serie di generatori di tensione, ognuno rappresentante dell' n-esima armonica:



Applicando la sovrapposizione degli effetti la corrente totale sarà la somma di tutti i contributi dei singoli generatori:

$$i_o = I_m + I_{01} + I_{02} + \dots + I_{0n}$$

Le ampiezze di queste correnti diminuiscono al crescere dell'ordine di armonica, questo perché aumenta la frequenza, e assieme a questa la reattanza:

$$Z_n = \sqrt{R^2 + (n\omega_0 L)^2} \cong n\omega_0 L$$

dove l'approssimazione è possibile trascurando la resistenza rispetto alla reattanza, considerazione che per un avvolgimento di macchina è possibile dato il suo forte carattere induttivo. Quanto detto ci porta a considerare i nostri circuiti dei *passa-basso*: l'aumento della frequenza di armonica aumenta il valore della relativa impedenza Z_n , e questo rende le ampiezze delle armoniche di corrente di ordine superiore ininfluenti. Rimane il problema delle prime armoniche. Abbiamo accenato in passato al **numero di impulsi**, come il rapporto tra il periodo delle grandezze in ingresso e quelle in uscita:

$$n_p \frac{T}{T_0} \rightarrow T_0 = \frac{T}{n_p} \rightarrow f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{n_p}{T}$$

la frequenza della n-esima armonica è legata alla frequenza delle grandezze in uscita del trasformatore da:

$$f_n = n \cdot f_0 = \frac{n}{T_0} = \frac{n \cdot n_p}{T} = n \cdot n_p \cdot f$$

con f , frequenza di rete e quindi pari a 50 Hz. Nella tabella sono riportate le frequenze delle prime tre armoniche:

$$n_p = 2 \quad n_p = 3 \quad n_p = 6$$

$$n = 1 \quad f_1 = 100 \text{ Hz} \quad f_1 = 150 \text{ Hz} \quad f_1 = 300 \text{ Hz}$$

$$n = 2 \quad f_2 = 200 \text{ Hz} \quad f_2 = 300 \text{ Hz} \quad f_2 = 600 \text{ Hz}$$

$$n = 3 \quad f_3 = 300 \text{ Hz} \quad f_3 = 450 \text{ Hz} \quad f_3 = 900 \text{ Hz}$$

Maggiore è il numero di impulsi e più spostiamo verso frequenze maggiori le armoniche, e dato il carattere di passa-basso del circuito, vi è una diminuzione dell'ampiezza della rispettiva armonica di corrente. L'impossibilità di usare condensatori di livellamento che modificherebbero la costante di tempo, ci porta ad agire sul numero di impulsi.

Analisi lato rete

Le forme d'onda richiamate ai primari nei raddrizzatori di maggior interesse pratico, risultano approssimabili a **onde quadre** o a **simmetria a quarto d'onda** (o **quasi quadra**), che abbiamo graficamente introdotto negli atti precedenti:

- [ponte monofase interamente controllato](#)
- [ponte trifase interamente controllato](#)

L'analisi vien fatta considerando che l'onda quadra è un caso particolare di onda quasi quadra. Analiticamente si considera quindi quest'ultima. Vi è una lunga dimostrazione dietro il risultato che sto per scrivere, che sarò ben lieto di mostrare a chi ne fosse interessato. Qui mi limito a scriverne l'espressione:

$$i(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4I}{k\pi} \cos(k\vartheta) \sin(k\omega t) \quad \forall k \in \mathbb{N} \text{ dispari}$$

in caso di onda quadra basta imporre $\vartheta = 0$ per ottenere:

$$i(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4I}{k\pi} \sin(k\omega t) \quad \forall k \in \mathbb{N} \text{ dispari}$$

Ponte monofase interamente controllato

Cliccando i collegamenti sopra, si riscontra un ultimo piccolo problema: una volta approssimata a onda quadra, si evince che non è *antisimmetrica* rispetto all'origine. Colpa dell'angolo α . Risolviamo il tutto cambiando il sistema di riferimento, ovvero traslando l'onda di una quantità pari ad α in ritardo; in parole povere il nuovo sistema di riferimento sarà legato al primo da:

$$\omega t' = \omega t - \alpha$$

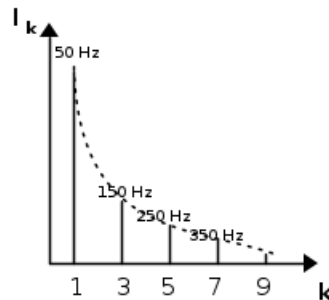
da cui lo sviluppo di Fourier nel nuovo riferimento:

$$i(t)' = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4I}{k\pi} \sin(k\omega t') \quad \forall k \in \mathbb{N} \text{ dispari}$$

e ricordando la relazione tra i due sistemi di riferimento:

$$i(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4I}{k\pi} \sin(k\omega t - k\alpha) \quad \forall k \in \mathbb{N} \text{ dispari}$$

Possiamo disegnare lo spettro armonico della corrente in funzione dell'ordine di armonica k :



Dove abbiamo evidenziato l'ampiezza delle prime armoniche, e la loro frequenza.

Ponte trifase interamente controllato

Analogamente a quanto fatto prima, passiamo nel nuovo sistema di riferimento, ma ricordiamoci che questa volta stiamo analizzando un **onda quasi quadra**. L'espressione della $i(t)'$ risulterà:

$$i(t)' = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4I}{k\pi} \cos(k\vartheta) \sin(k\omega t') \quad \forall k \in \mathbb{N} \text{ dispari}$$

che nel sistema di riferimento ωt diventa:

$$i(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4I}{k\pi} \cos(k\vartheta) \sin(k\omega t - k\alpha) \quad \forall k \in \mathbb{N} \text{ dispari}$$

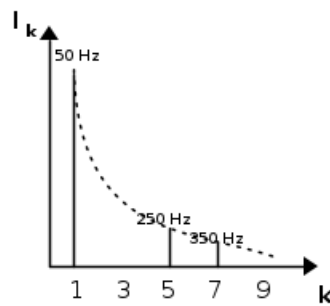
Vi è una differenza rispetto a prima, infatti l'ampiezza della k-esima armonica risulta:

$$I_k = \frac{4I}{k\pi} \cos(k\vartheta)$$

se $\vartheta = 30^\circ$ (il che corrisponde al caso $\alpha = 30^\circ$), le ampiezze delle armoniche risulterebbero:

$$I_k = \frac{4I}{k\pi} \cos\left(k\frac{\pi}{6}\right)$$

valore evidentemente nullo per valori di k (dispari) multipli di 3. Lo spettro ci mostrerà meglio la situazione:



La prima armonica significativa è la quinta a 250 Hz, questo si traduce in un minor contenuto armonico rispetto al collega monofase.

Approfondimenti

Link a una interessante discussione nel forum...

<http://www.electroyou.it/phpBB2/viewtopic.php?f=18&t=31869>

Conclusioni

Si conclude qui questa panoramica sui raddrizzatori di potenza. Sono contento di essere stato in qualche modo apprezzato dagli utenti, e chiedo venia per ogni qualsiasi omissione. Ma d'altronde quello che avete letto è l'interpretazione di un pirata analfabeta, che durante i suoi lunghi viaggi per mare, deve ingannare il tempo in qualche modo :)

Bibliografia

- Appunti di elettronica di potenza.

Estratto da "<http://www.electroyou.it/mediawiki/index.php?title=UsersPages:Lillo:raddrizzatori-atto-finale>"