



Max2433BO

LOGICBIGNAMI (II)

25 October 2019

In questa seconda parte daremo uno sguardo alle principali funzioni booleane e alle loro proprietà, che sono il fondamento per la comprensione e sviluppo di qualsiasi circuito digitale.

Algebra di Boole (o booleana)

E' quel particolare ramo dell'algebra che studia, tra l'altro, la logica di tipo binario, ossia dove le variabili possono assumere due soli significati che si escludono reciprocamente.

Esempi di variabili binarie potrebbero essere: la posizione di un interruttore o di una serratura (aperto o chiuso), lo stato di una lampadina (accesa o spenta), lo stato di moto di una ruota (gira o è ferma) in tutti un significato esclude, automaticamente, l'altro.

Intendendo questi articoli come riassunto di un corso di elettronica digitale, verrà trattata esclusivamente l'algebra booleana a due valori.

Nota: Nel proseguio, salvo diversamente specificato, si considererà l'associazione delle affermazioni "VERO" e "FALSO" rispettivamente ai simboli 1 e 0.

Funzione booleana

Dati:

L'insieme universo U (definizione di un insieme il cui complemento è un insieme vuoto: $\overline{U} = \emptyset$)
un suo sottoinsieme A ($A \subset U$)
ed una variabile $x \in U$,

si definisce **funzione booleana** sull'insieme A la funzione f_A tale per cui:

se $x \in A$ allora $f_A(x) = 1$, quindi è VERA

se $x \notin A$ allora $f_A(x) = 0$, quindi è FALSA

Esempio pratico:

Consideriamo un contenitore (il nostro insieme universo U) con all'interno oggetti di due soli colori (le variabili binarie), verdi e blu. Mettiamo poi un'altra scatola all'interno del contenitore e in questa raggruppiamo tutti gli oggetti verdi (il nostro sottoinsieme A) e consideriamo l'affermazione "è verde" (la nostra f_A).

A questo punto si possono verificare due situazioni:

se peschiamo un oggetto (la nostra variabile binaria x) dentro la scatola, quindi un oggetto verde, allora saremo nella situazione $x \in A$ e $f_A(x) = 1$

se, invece, peschiamo un oggetto fuori dalla scatola, quindi un oggetto blu, allora saremo nella situazione $x \notin A$ e $f_A(x) = 0$

Operatori logici fondamentali

Negazione (o complemento): funzione logica NOT - simbolo : $\bar{}$

Dati:

L'insieme universo U

un suo sottoinsieme A ($A \subset U$)

e due variabili x e $y \in U$,

con $x \in A$ e $y \notin A$

possiamo scrivere le due funzioni booleane $f_A(x) = 1$ e $f_A(y) = 0$.

Dalla definizione di complemento che abbiamo visto precedentemente, possiamo anche scrivere che $y \in \bar{A}$ e che $x \notin \bar{A}$, dove $\bar{A}$ è l'insieme complemento di A .

Da ciò otteniamo $f_{\bar{A}}(x) = 0$ e $f_{\bar{A}}(y) = 1$, che ci porta alla definizione della **funzione logica NOT** o **Negazione**:

$$f_{\bar{A}}(x) = \overline{f_A(x)}$$

Assegnando a $f_A(x)$ i due possibili valori booleani 1 e 0, otteniamo, allora, la seguente tabella (detta **Tabella della verità**):

$$f_A(x) \quad f_{\bar{A}}(x)$$

0 1

1 0

In pratica la funzione logica NOT altro non fa che invertire il valore assunto dalla funzione (o variabile) booleana alla quale viene applicata.: se è VERO la funzione logica NOT restituirà FALSO e viceversa.

Il simbolo grafico associato a questa funzione è il seguente:



dove x può rappresentare una funzione o, direttamente, una variabile booleana.

Proprietà della funzione NOT:

Una funzione (o variabile) booleana a cui venga applicata due volte la funzione logica NOT equivale alla funzione (o variabile) iniziale:

$$\overline{\overline{f_A(x)}} = f_A(x)$$

Congiunzione: funzione logica AND - simbolo .

Dati:

L'insieme universo U

due sottoinsiemi A ($A \subset U$) e B ($B \subset U$) tali che $A \cap B \neq \emptyset$

quattro variabili w, x, y e $z \in U$ tali che

$$w \notin A \text{ e } w \notin B$$

$$x \in A \text{ e } x \notin B$$

$$y \in (A \cap B)$$

$$z \notin A \text{ e } z \in B$$

Consideriamo le funzioni booleane per l'insieme A , B e $(A \cap B)$ relative a queste quattro variabili otteniamo la seguente tabella della verità:

$$f_A(x) = 1 \quad f_B(x) = 0 \quad f_{A \cap B}(x) = 0$$

$$f_A(z) = 0 \quad f_B(z) = 1 \quad f_{A \cap B}(z) = 0$$

$$f_A(y) = 1 \quad f_B(y) = 1 \quad f_{A \cap B}(y) = 1$$

$$f_A(w) = 0 \quad f_B(w) = 0 \quad f_{A \cap B}(w) = 0$$

Da questa si deduce che la funzione booleana relativa all'operazione intersezione è VERA se, sul medesimo elemento, sono VERE, contemporaneamente, anche le funzioni booleane dei singoli insiemi, interessati dall'operazione, altrimenti è sempre FALSA.

L'operazione di intersezione viene definita **congiunzione** o **funzione logica AND**, convenzionalmente indicata anche come **prodotto logico**:

$$f_A(n) \cdot f_B(n) = f_{A \cap B}(n)$$

In pratica la funzione logica AND tra due o più funzioni (o variabili) booleane è VERA solo se tutte le funzioni (o variabili) booleane coinvolte sono VERE.

Il simbolo grafico associato alla funzione è il seguente:



dove x e y possono rappresentare funzioni o, direttamente, variabili booleane.

Proprietà della funzione AND

Elemento assorbente per il prodotto logico: Il prodotto logico tra una funzione (o variabile) booleana e una condizione di FALSO, restituisce sempre una condizione di FALSO:

$$f_A(x) \cdot 0 = 0$$

Di fatto, il prodotto logico con una condizione di FALSO, *blocca* l'operazione sulla medesima condizione.

Elemento neutro per il prodotto logico: Il prodotto logico tra una funzione (o variabile) booleana e una condizione di VERO, restituisce la funzione (o variabile) booleana stessa:

$$f_A(x) \cdot 1 = f_A(x)$$

Proprietà di idempotenza: Il prodotto logico tra una funzione (o variabile) booleana per se stessa, restituisce la funzione (o variabile) booleana stessa:

$$f_A(x) \cdot f_A(x) = f_A(x)$$

Complementarietà: Il prodotto logico di una funzione (o variabile) booleana per la sua negazione, restituisce sempre una condizione di FALSO:

$$f_A(x) \cdot \overline{f_A(x)} = 0$$

Proprietà commutativa: Il prodotto logico tra due funzioni (o variabili) booleane non cambia invertendo l'ordine dei fattori:

$$f_A(x) \cdot f_B(x) = f_B(x) \cdot f_A(x)$$

Disgiunzione: Funzione logica OR - Simbolo: +

Prendiamo in esame le stesse condizioni utilizzate per la funzione logica AND, quindi siano dati:

L'insieme universo U

due sottoinsiemi A ($A \subset U$) e B ($B \subset U$) tali che $A \cap B \neq \emptyset$

quattro variabili w, x, y e $z \in U$ tali che

$$w \notin A \text{ e } w \notin B$$

$$x \in A \text{ e } x \notin B$$

$$y \in (A \cap B)$$

$$z \notin A \text{ e } z \in B$$

Consideriamo, quindi, le funzioni booleane per l'insieme A , B e $(A \cup B)$ relative a queste quattro variabili, ottenendo la seguente tabella della verità:

$$\begin{aligned} f_A(x) = 1 \quad f_B(x) = 0 \quad f_{A \cup B}(x) &= 1 \\ f_A(z) = 0 \quad f_B(z) = 1 \quad f_{A \cup B}(z) &= 1 \\ f_A(y) = 1 \quad f_B(y) = 1 \quad f_{A \cup B}(y) &= 1 \\ f_A(w) = 0 \quad f_B(w) = 0 \quad f_{A \cup B}(w) &= 0 \end{aligned}$$

In questo caso la funzione booleana relativa all'operazione di unione è VERA quando, sul medesimo elemento, almeno una delle funzioni booleane dei singoli insiemi, interessati dall'operazione, è VERA, altrimenti è FALSA.

L'operazione di unione viene definita **disgiunzione** o **funzione logica OR**, convenzionalmente indicata anche come **somma logica**:

$$f_A(n) + f_B(n) = f_{A \cup B}(n)$$

In pratica la funzione logica OR tra due o più funzioni (o variabili) booleane è VERA quando almeno una delle funzioni (o variabili) booleane coinvolte è VERA.

Il simbolo grafico associato alla funzione è il seguente:



dove x e y possono rappresentare funzioni o, direttamente, variabili booleane.

Proprietà della funzione OR

Elemento neutro per la somma logica: La somma logica tra una funzione (o variabile) booleana e una condizione di FALSO, restituisce la funzione (o variabile) booleana stessa:

$$f_A(x) + 0 = f_A(x)$$

Elemento assorbente assorbente per la somma logica: La somma logica tra una funzione (o variabile) booleana e una condizione di VERO, restituisce sempre una condizione di VERO:

$$f_A(x) + 1 = 1$$

Di fatto, la somma logica con una condizione di VERO, *blocca* l'operazione sulla medesima condizione.

Proprietà di idempotenza: La somma logica tra una funzione (o variabile) booleana per se stessa, restituisce la funzione (o variabile) booleana stessa:

$$f_A(x) + f_A(x) = f_A(x)$$

Complementarietà: La somma logica tra una funzione (o variabile) booleana per la sua negazione, restituisce sempre una condizione di VERO:

$$f_A(x) + \overline{f_A(x)} = 1$$

Proprietà cummutativa: La somma logica tra due funzioni (o variabili) booleane non cambia invertendo l'ordine dei fattori:

$$f_A(x) + f_B(x) = f_B(x) + f_A(x)$$

Avendo visto sia la funzione logica AND che la funzione logica OR, adesso possiamo analizzare la Legge di assorbimento, la Proprietà distributiva e i Teoremi di De Morgan accennati nella Teoria degli insiemi.

Legge di assorbimento - Proprietà distributiva - Teoremi di De Morgan

Legge di assorbimento: Il prodotto logico tra una funzione (o variabile) booleana e la somma logica tra la medesima funzione (o variabile) booleana e una seconda funzione (o variabile) booleana equivale alla prima funzione (o variabile) booleana:

$$f_A(x) \cdot (f_A(x) + f_B(x)) = f_A(x)$$

Si nota, infatti, che la condizione logica di $f_B(x)$ è influente sull'operazione: se $f_A(x)$ è VERA la somma logica è il prodotto logico sono entrambi VERI, viceversa, se $f_A(x)$ è FALSA, automaticamente il prodotto logico è FALSO qualunque sia la condizione logica della somma logica.

La stessa Legge si applica alla somma di prodotto: La somma logica tra una funzione (o variabile) booleana e il prodotto logico tra la medesima funzione (o variabile) booleana e una seconda funzione (o variabile) booleana equivale alla prima funzione (o variabile) booleana:

$$f_A(x) + (f_A(x) \cdot f_B(x)) = f_A(x)$$

Anche in questo caso la condizione logica di $f_B(x)$ è influente sull'operazione: se $f_A(x)$ è VERA, la somma logica è VERA a prescindere dalla condizione logica assunta dal prodotto logico, viceversa, se $f_A(x)$ è FALSA lo sono sia la somma che il relativo prodotto logico.

Proprietà distributiva:

1) La somma logica tra una funzione (o variabile) booleana e il prodotto logico di due funzioni (o variabili) booleane equivale al prodotto logico tra la somma logica tra la prima funzione (o variabile) booleana e la seconda funzione (o variabile) booleana e la somma logica tra la prima funzione (o variabile) booleana e la terza funzione (o variabile) booleana:

$$f_A(x) + (f_B(x) \cdot f_C(x)) = (f_A(x) + f_B(x)) \cdot (f_A(x) + f_C(x))$$

Analizziamo i diversi casi:

$f_A(x) = 1$ In questo caso, qualunque siano le condizioni logiche di $f_B(x)$ e di $f_C(x)$, sia l'operazione a destra che quella a sinistra dell'equivalenza sono VERE.

$f_A(x) = 0$ In questo caso possiamo vedere che, per le proprietà della somma logica, le due operazioni di riducono, entrambe, al prodotto logico $f_B(x) \cdot f_C(x)$.

2) Il prodotto logico tra una funzione (o variabile) booleana e la somma logica di due funzioni (o variabili) booleane equivale alla somma logica tra il prodotto logico tra la prima funzione (o variabile) booleana e la seconda funzione (o variabile) booleana e il prodotto logico tra la prima funzione (o variabile) booleana e la terza funzione (o variabile) booleana):

$$f_A(x) \cdot (f_B(x) + f_C(x)) = (f_A(x) \cdot f_B(x)) + (f_A(x) \cdot f_C(x))$$

L'analisi è simile alla precedente, solo che si invertono le condizioni logiche di $f_A(x)$:

$f_A(x) = 0$ In questo caso, qualunque siano le condizioni logiche di $f_B(x)$ e di $f_C(x)$, sia l'operazione a destra che quella a sinistra dell'equivalenza sono FALSE.

$f_A(x) = 1$ In questo caso possiamo vedere che, per le proprietà del prodotto logico, le due operazioni si riducono, entrambe, alla somma logica $f_B(x) + f_C(x)$.

Teoremi di De Morgan:

1) La negazione del prodotto logico tra due, o più, funzioni (o variabili) booleane equivale alla somma logica delle singole funzioni (o variabili) negate:

$$\overline{f_A(x) \cdot f_B(x)} = \overline{f_A(x)} + \overline{f_B(x)}$$

Analizziamo l'equivalenza scrivendo la tabella della verità per le due operazioni in base alle proprietà del prodotto logico, della somma logica e della negazione:

$f_A(x)$	$f_B(x)$	$\overline{f_A(x) \cdot f_B(x)}$	$\overline{f_A(x)} + \overline{f_B(x)}$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	0	0

L'equivalenza è soddisfatta.

2) La negazione della somma logica tra due, o più, funzioni (o variabili) booleane equivale al prodotto logico delle singole funzioni (o variabili) negate:

$$\overline{f_A(x) + f_B(x)} = \overline{f_A(x)} \cdot \overline{f_B(x)}$$

Anche in questo caso eseguiamo l'analisi dell'equivalenza tramite la tabella della verità:

$f_A(x)$	$f_B(x)$	$\overline{f_A(x) + f_B(x)}$	$\overline{f_A(x)} \cdot \overline{f_B(x)}$
0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	0	0

anche in questo caso l'equivalenza è soddisfatta.

Somma disgiuntiva: Funzione logica EX-OR - Simbolo: $\oplus$

Questa funzione logica rappresenta un'estensione della funzione logica OR.

In pratica la **funzione logica EX-OR**, a differenza della funzione logica OR, è VERA solo se le funzioni (o variabili) booleane che partecipano all'operazione assumono condizioni logiche differenti, altrimenti è FALSA.

Quindi, considerando le due funzioni booleane $f_A(x)$ e $f_B(x)$, la funzione logica EX-OR $f_A(x) \oplus f_B(x)$ risponde alla seguente tabella della verità:

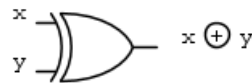
$f_A(x)f_B(x)f_A(x) \oplus f_B(x)$

0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Quando tratteremo le porte logiche elementari e i circuiti combinatori, vedremo che la funzione logica EX_OR equivale a:

$$f_A(x) \oplus f_B(x) = (f_A(x) \cdot \overline{f_B(x)}) + (\overline{f_A(x)} \cdot f_B(x))$$

Il simbolo grafico associato alla funzione è il seguente:



dove x e y possono rappresentare funzioni o, direttamente, variabili booleane.

Proprietà della funzione EX_OR

Elemento neutro per la somma disgiuntiva: La somma logica disgiuntiva tra una funzione (o variabile) booleana e una condizione di FALSO, restituisce la funzione (o variabile) booleana stessa:

$$f_A(x) \oplus 0 = f_A(x)$$

La somma logica disgiuntiva tra una funzione (o variabile) booleana e una condizione di VERO, equivale a complementare la funzione (o variabile) booleana stessa:

$$f_A(x) \oplus 1 = \overline{f_A(x)}$$

La somma logica disgiuntiva tra una funzione (o variabile) booleana per se stessa, restituisce sempre una condizione di FALSO:

$$f_A(x) \oplus f_A(x) = 0$$

Complementarietà: La somma logica tra una funzione (o variabile) booleana per la sua negazione, restituisce sempre una condizione di VERO:

$$f_A(x) \oplus \overline{f_A(x)} = 1$$

Proprietà cummutativa: La somma logica disgiuntiva tra due funzioni (o variabili) booleane non cambia invertendo l'ordine dei fattori:

$$f_A(x) \oplus f_B(x) = f_B(x) \oplus f_A(x)$$

Con questo abbiamo concluso anche questa lunga chiacchierata sull'algebra booleana e le sue funzioni fondamentali per l'elaborazione dei circuiti digitali.

Prossimamente inizieremo ad analizzare le porte logiche fondamentali e i circuiti combinatori.

[LogicBignami - Indice articoli correlati](#)

Estratto da "<https://www.electroyou.it/mediawiki/index.php?title=UsersPages:Max2433bo:logicbignami-ii>"