



Max2433BO

LOGICBIGNAMI (IV)

21 November 2019

Da questo articolo inizieremo ad analizzare come realizzare dei circuiti utilizzando le porte logiche appena viste in [LogicBignami \(III\)](#) e, in particolare, inizieremo con i cosiddetti **circuiti combinatori**, cioè quei circuiti digitali in cui lo stato logico d'uscita O , ad ogni istante di tempo, è funzione soltanto dello stato logico assunto, nel medesimo istante di tempo, dalle variabili d'ingresso I .

Per far ciò dobbiamo approfondire alcuni aspetti delle tabelle della verità, e come, da queste, sia possibile ricavare la funzione booleana della variabile d'uscita in funzione, appunto, degli stati logici assunti dagli ingressi.

La tabella della verità

Abbiamo già visto, sia in [LogicBignami \(II\)](#) che in [logicBignami \(III\)](#), come sono costruite le tabelle della verità relative alle funzioni logiche fondamentali e delle relative porte logiche collegate.

Queste tabelle avevano, al massimo, solo due variabili booleane d'ingresso, per cui il numero delle possibili combinazioni uniche di due elementi binari era facilmente desumibile: tutte in condizione logica di FALSO (o logico), tutte in condizione logica di VERO (1 logico) e alternativamente una in condizione logica di FALSO e una in condizione logica di VERO, da cui deriva, appunto, la seguente tabella della verità:

 $I_0 I_1$

0 0

1 1

1 0

0 1

Adesso vedremo, invece, come compilare tutte le combinazioni di stati logici possibili per un numero di variabili maggiore.

Le combinazioni delle variabili booleane d'ingresso

Quando il numero delle variabili booleane d'ingresso da considerare sale (Esempio 3, 4, 5... variabili), sale, ovviamente, anche il numero delle possibili combinazioni che, come dimostreremo in successivi articoli, equivale a 2^n , dove n rappresenta il numero delle variabili booleane.

In questi casi la compilazione della tabella della verità può risultare difficoltosa: con più di 5 variabili può risultare lungo e tedioso scrivere tutte le combinazioni possibili.

Esiste, però, uno metodo che permette di compilare, in maniera "meccanica", tutte le combinazioni, ordinate, per un numero qualsiasi di variabili d'ingresso:

Date n variabili booleane I

- 1) Si calcola il numero delle combinazioni possibili, pari a 2^n
- 2) Si nominano le variabili da I_0 a I_{n-1}
- 3) Si inseriscono, nella colonna con indice minore (I_0) tante commutazioni, tra uno stato logico di 0 e uno stato logico di 1, quante sono le possibili combinazioni calcolate al punto [1], partendo da 0 e terminando con 1
- 4) Nelle successive colonne, relative alle I_x variabili booleane, si inseriscono tante coppie formate da sequenze di 2^x stati logici di 0 e di 2^x stati logici di 1 fino a riempire il numero di combinazioni possibili (ad esempio la colonna relativa alla variabile I_3 avrà coppie formate da 2^3 stati logici di 0 e 2^3 stati logici di 1: 0000000011111111)

Vediamo quindi come applicare queste regole per realizzare una tabella della verità a 5 variabili booleane.

Con 5 variabili booleane, che denomineremo I_0 , I_1 , I_2 , I_3 , e I_4 , ci troveremo ad avere $2^5 = 32$ diverse combinazioni uniche.

Quindi:

- 1) Nella colonna I_0 inseriremo una sequenza di 32 stati logici alternativamente a 0 e a 1, partendo da 0.
- 2) Nella colonna I_1 inseriremo una sequenza di 8 coppie formate da 2^1 stati logici a 0 e 2^1 stati logici a 1 (evidenziati, in figura sotto, rispettivamente in blu e rosso).
- 3) Nella colonna I_2 inseriremo una sequenza di 4 coppie formate da 2^2 stati logici a 0 e 2^2 stati logici a 1.
- 4) Nella colonna I_3 inseriremo una sequenza di 2 coppie formate da 2^3 stati logici a 0 e 2^3 stati logici a 1.
- 5) Nella colonna I_4 inseriremo un'unica coppia formata da 2^4 stati logici a 0 e 2^4 stati logici a 1.

Otteniamo, allora, la seguente tabella:

I_0	I_1	I_2	I_3	I_4
0	0	0	0	0
1	0	0	0	0
0	1	0	0	0
1	1	0	0	0
0	0	1	0	0
1	0	1	0	0
0	1	1	0	0
1	1	1	0	0
0	0	0	1	0
1	0	0	1	0
0	1	0	1	0
1	1	0	1	0
0	0	1	1	0
1	0	1	1	0
0	1	1	1	0
1	1	1	1	0
0	0	0	0	1
1	0	0	0	1
0	1	0	0	1
1	1	0	0	1
0	0	1	0	1
1	0	1	0	1
0	1	1	0	1
1	1	1	0	1
0	0	0	1	1
1	0	0	1	1
0	1	0	1	1
1	1	0	1	1
0	0	1	1	1
1	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	1	1	1	1

Disponendo la costruzione della tabella della verità con questo sistema, si avrà all'inizio tutte le variabili booleane in stato logico 0 e alla fine tutte le variabili in stato logico 1 e che una qualunque variabile booleana I_n , diversa da I_0 , commuta (da uno stato logico 0 ad uno stato logico 1 e viceversa) quando la variabile booleana I_{n-1} commuta dallo stato logico 1 allo stato logico 0, come evidenziato dalle linee verdi.

Considerando che, difficilmente, in questi articoli, analizzeremo tabelle della verità con più di 5 variabili booleane, di seguito riportiamo la struttura di quelle a 2, 3, 4 e 5 variabili:

1) Due variabili

$I_0 I_1$

0 0
1 0
0 1
1 1

2) Tre variabili

$I_0 I_1 I_2$

0 0 0
1 0 0
0 1 0
1 1 0
0 0 1
1 0 1
0 1 1
1 1 1

3) Quattro variabili

$I_0 I_1 I_2 I_3$

0 0 0 0
1 0 0 0
0 1 0 0
1 1 0 0
0 0 1 0
1 0 1 0
0 1 1 0
1 1 1 0
0 0 0 1
1 0 0 1
0 1 0 1
1 1 0 1
0 0 1 1
1 0 1 1
0 1 1 1
1 1 1 1

4) Cinque variabili

$I_0 I_1 I_2 I_3 I_4$

0 0 0 0 0
1 0 0 0 0
0 1 0 0 0

```

1 1 0 0 0
0 0 1 0 0
1 0 1 0 0
0 1 1 0 0
1 1 1 0 0
0 0 0 1 0
1 0 0 1 0
0 1 0 1 0
1 1 0 1 0
0 0 1 1 0
1 0 1 1 0
0 1 1 1 0
1 1 1 1 0
0 0 0 0 1
1 0 0 0 1
0 1 0 0 1
1 1 0 0 1
0 0 1 0 1
1 0 1 0 1
0 1 1 0 1
1 1 1 0 1
0 0 0 1 1
1 0 0 1 1
0 1 0 1 1
1 1 0 1 1
0 0 1 1 1
1 0 1 1 1
0 1 1 1 1
1 1 1 1 1

```

Gli stati logici della variabile d'uscita: Mintermini e Maxitermini

Avendo visto come viene realizzata la struttura delle possibili combinazioni delle variabili d'ingresso I_n in una tabella della verità, vediamo, adesso, alcune caratteristiche della struttura degli stati logici associati alla variabile d'uscita O , che ci permetteranno, poi, di ricavare la funzione booleana dell'uscita stessa.

Mintermine (o Minterm)

E' una funzione booleana associata ad ogni combinazione delle variabili d'ingresso: equivale al prodotto logico di queste variabili, complementate se corrispondenti ad uno stato logico 0 altrimenti non complementate, in modo da fornire, come risultato, sempre uno stato logico 1.

Ad esempio, considerando una tabella della verità a tre variabili, avremo i seguenti **mintermini** (m_n):

$I_0 I_1 I_2$ Mintermini Indicatore Mintermini

0 0 0	$\overline{I_0} \overline{I_1} \overline{I_2}$	m_0
1 0 0	$I_0 \overline{I_1} \overline{I_2}$	m_1
0 1 0	$\overline{I_0} I_1 \overline{I_2}$	m_2
1 1 0	$I_0 I_1 \overline{I_2}$	m_3
0 0 1	$\overline{I_0} \overline{I_1} I_2$	m_4
1 0 1	$I_0 \overline{I_1} I_2$	m_5
0 1 1	$\overline{I_0} I_1 I_2$	m_6
1 1 1	$I_0 I_1 I_2$	m_7

Nota: Nel prodotto logico, il simbolo $\cdot$ può essere omesso (in pratica viene sottinteso), così, ad esempio la scrittura $I_0 I_1 I_2$ è equivalente a $I_0 \cdot I_1 \cdot I_2$

Sono detti **mintermini** perchè, per una data combinazione delle variabili booleane d'ingresso, solo uno, cioè il minimo dei 2^n prodotti logici, determinerà uno stato logico 1: infatti, se analizziamo la tabella della verità precedente, e consideriamo, ad esempio, il caso in cui $I_0 = I_1 = 0$ e $I_2 = 1$ vediamo che solo il **mintermine** m_4 sarà allo stato logico 1.

Tramite i **mintermini** la funzione logica relativa alla variabile booleana d'uscita O di una tabella della verità di n variabili d'ingresso I_n , viene espressa come somma logica di prodotti logici.

In particolare, definendo o_x lo stato logico che assume la variabile booleana d'uscita O alla "posizione" x (con $0 < x < 2^{n-1}$), la funzione booleana d'uscita O è la somma logica del prodotto logico tra lo stato assunto dall'uscita e il relativo **mintermine**:

$$O = \sum_{x=0}^{2^n-1} o_x m_x$$

Facciamo un esempio pratico con la seguente tabella della verità a cui associamo degli stati logici arbitrari alla variabile booleana d'uscita O .

$I_0 I_1 I_2 O$ Mintermini Indicatore Mintermini

0 0 0 0	$\overline{I_0} \overline{I_1} \overline{I_2}$	m_0
1 0 0 0	$I_0 \overline{I_1} \overline{I_2}$	m_1
0 1 0 0	$\overline{I_0} I_1 \overline{I_2}$	m_2
1 1 0 0	$I_0 I_1 \overline{I_2}$	m_3
0 0 1 0	$\overline{I_0} \overline{I_1} I_2$	m_4
1 0 1 0	$I_0 \overline{I_1} I_2$	m_5
0 1 1 0	$\overline{I_0} I_1 I_2$	m_6
1 1 1 0	$I_0 I_1 I_2$	m_7

Dalla summenzionata formula avremo che la funzione logica d'uscita O sarà:

$$O = \sum_{x=0}^{2^n-1} o_x m_x = 0 \cdot m_0 + 0 \cdot m_1 + 0 \cdot m_2 + 1 \cdot m_3 + 0 \cdot m_4 + 1 \cdot m_5 + 1 \cdot m_6 + 0 \cdot m_7$$

ricordando che lo stato logico 1 è *elemento neutro* per il prodotto logico e lo stato logico 0 è, invece, *elemento assorbente*, avremo

$$O = m_3 + m_5 + m_6 = I_0 I_1 \overline{I_2} + I_0 \overline{I_1} I_2 + \overline{I_0} I_1 I_2$$

Nella pratica, per ricavare la funzione logica d'uscita O , basta eseguire la somma logica dei **mintermini** corrispondenti agli stati logici 1 della variabile d'uscita stessa.

Maxtermine (o Maxterm)

E' una funzione booleana associata ad ogni combinazione delle variabili d'ingresso: equivale alla somma logica di queste variabili, complementate se corrispondenti ad uno stato logico 1 altrimenti non complementate, in modo da fornire, come risultato, sempre uno stato logico 0.

Ad esempio, considerando sempre una tabella della verità a tre variabili, avremo i seguenti **maxtermini** (M_n):

$I_0 I_1 I_2$ Maxtermini Indicatore Maxtermini

0 0 0	$I_0 + I_1 + I_2$	M_0
1 0 0	$\overline{I_0} + I_1 + I_2$	M_1
0 1 0	$I_0 + \overline{I_1} + I_2$	M_2
1 1 0	$\overline{I_0} + \overline{I_1} + I_2$	M_3
0 0 1	$I_0 + I_1 + \overline{I_2}$	M_4
1 0 1	$\overline{I_0} + I_1 + \overline{I_2}$	M_5
0 1 1	$I_0 + \overline{I_1} + \overline{I_2}$	M_6
1 1 1	$\overline{I_0} + \overline{I_1} + \overline{I_2}$	M_7

Sono detti **maxtermini** perchè, per una data combinazione delle variabili booleane d'ingresso, tutte le somme logiche, tranne una, cioè il massimo delle 2^n combinazioni, determineranno uno stato logico 1: infatti, se analizziamo la tabella della verità precedente, e consideriamo, ad esempio, il caso in cui $I_0 = I_1 = 0$ e $I_2 = 1$ vediamo tutti i **maxtermini**, tranne M_4 , sono allo stato logico 1.

Tramite i **maxtemini** la funzione logica relativa alla variabile booleana d'uscita O di una tabella della verità di n variabili d'ingresso I_n , viene espressa come prodotto logico di somme logiche.

In particolare, definendo o_x lo stato logico che assume la variabile booleana d'uscita O alla "posizione" x (con $0 < x < 2^{n-1}$), la funzione booleana d'uscita O è il prodotto logico della somma logica tra lo stato assunto dall'uscita e il relativo **maxitermine**:

$$O = \prod_{x=0}^{2^n-1} (o_x + M_x)$$

Utilizzando la stessa sequenza di stati logici d'uscita usata nella tabella con i **mintermini**, avremo:

$I_0 I_1 I_2 O$ Maxtermini Indicatore Maxtermini

0	0	0	0	$I_0 + I_1 + I_2$	M_0
1	0	0	0	$\overline{I_0} + I_1 + I_2$	M_1
0	1	0	0	$I_0 + \overline{I_1} + I_2$	M_2
1	1	0	1	$\overline{I_0} + \overline{I_1} + I_2$	M_3
0	0	1	0	$I_0 + I_1 + \overline{I_2}$	M_4
1	0	1	1	$\overline{I_0} + I_1 + \overline{I_2}$	M_5
0	1	1	1	$I_0 + \overline{I_1} + \overline{I_2}$	M_6
1	1	1	0	$\overline{I_0} + \overline{I_1} + \overline{I_2}$	M_7

Dalla formula appena citata avremo che la funzione logica dell'uscita O sarà pari a:

$$O = \prod_{x=0}^{2^n-1} (o_x + M_x) = (0 + M_0) \cdot (0 + M_1) \cdot (0 + M_2) \cdot (1 + M_3) \cdot (0 + M_4) \cdot (1 + M_5) \cdot (1 + M_6) \cdot (0 + M_7)$$

Ricordando che lo stato logico 0 è *elemento neutro* per la somma logica e lo stato logico 1, invece, è *elemento assorbente* per la somma logica, avremo

$$O = \prod_{x=0}^{2^n-1} (o_x + M_x) = M_0 \cdot M_1 \cdot M_2 \cdot M_4 \cdot M_7 = (I_0 + I_1 + I_2) \cdot (\overline{I_0} + I_1 + I_2) \cdot (I_0 + \overline{I_1} + I_2) \cdot (I_0 + I_1 + \overline{I_2}) \cdot (\overline{I_0} + \overline{I_1} + \overline{I_2})$$

Nella pratica, per ricavare la funzione logica d'uscita O , basta eseguire il prodotto logico dei **maxtermini** corrispondenti agli stati logici 0 della variabile d'uscita stessa.

In definitiva la funzione logica della variabile d'uscita O può essere rappresentata, indifferentemente, sotto forma di somme logiche di prodotti logici, se si analizzano i **mintermini** oppure sotto forma di prodotti logici di somme logiche se si analizzano i **maxtermini**.

Nel prossimo articolo analizzeremo i metodi per ridurre, se possibile, le funzioni logiche così ricavate.

[LogicBignami - Indice articoli correlati](#)

Estratto da "<https://www.electroyou.it/mediawiki/index.php?title=UsersPages:Max2433bo:logicbignami-iv>"