



Max2433BO

LOGICBIGNAMI (VI)

5 December 2019

La riduzione, o minimizzazione, delle funzioni booleane (prima parte)

In [LogicBignami \(IV\)](#) abbiamo visto, dall'analisi dei *mintermini* o dei *maxtermini*, come sia possibile ricavare la funzione booleana della variabile d'uscita O reattiva ad una qualsiasi tabella della verità.

Le funzioni così ottenute vengono definite in **formato canonico** in quanto ogni termine prodotto logico (nel caso dei *mintermini*) o somma logica (nel caso dei *maxtermini*) contiene sempre tutte le variabili d'ingresso da I_0 a I_n .

Così, ad esempio, le funzioni:

$$O = I_0 I_1 \overline{I_2} + I_0 \overline{I_1} I_2 + \overline{I_0} I_1 I_2$$

e

$$O = (I_0 + I_1 + I_2) \cdot (\overline{I_0} + I_1 + I_2) \cdot (I_0 + \overline{I_1} + I_2) \cdot (I_0 + I_1 + \overline{I_2}) \cdot (\overline{I_0} + \overline{I_1} + \overline{I_2})$$

sono entrambe in **formato canonico** in quanto in tutti i termini sono sempre presenti tutte e tre le variabili I_0 , I_1 , e I_2 seppur diversamente complementate.

Da queste funzioni logiche in **formato canonico** abbiamo visto, nell'articolo precedente riguardanti le porte logiche **EX-OR** e **EX-NOR** ([LogicBignami \(V\)](#)), come sia possibile ricavarne il circuito digitale (in logica **AOI**, **NAND** o **NOR**) che la realizzi.

Non sempre, però, la funzione logica in **formato canonico** trovata è quella che permetterebbe di realizzare un circuito digitale con il minor numero di componenti, e variabili booleane, possibile perchè, come andremo a vedere, spesso, tali funzioni possono essere **ridotte** o **minimizzate**.

Per **riduzione** o **minimizzazione** di una funzione logica si intendono tutta una serie di processi che permettono, alla fine, di trovarne una equivalente, ossia che "copra" i medesimi stati logici di quella originale, operando, però, su un numero ridotto di variabili booleane d'ingresso per singolo prodotto logico (nel caso di funzioni booleane in formato *somma logica di prodotti logici*) o per singola somma logica (nel caso di funzioni booleane in formato *prodotto logico di somme logiche*), ed, eventualmente, anche su un numero ridotto di termini stessi.

I termini che compaiono nelle formule booleane ridotte vengono definiti come:

- **Implicanti** per le funzioni booleane formate da somme logiche di prodotti logici, ossia per denominare i *mintermini* ridotti
- **Implicati** per le funzioni booleane formate da prodotti logici di somme logiche, ossia per denominare i *maxtermini* ridotti.

Più specificatamente gli **implicanti** rappresentano il prodotto logico con il minimo numero possibile di variabili booleane che determinano, nella funzione booleana a cui appartengono tali variabili, uno stato logico 1.

Viceversa gli **implicati** rappresentano la somma logica con il minimo numero possibile di variabili booleane che determina, nella funzione booleana a cui appartengono tali variabili, uno stato logico 0.

Di seguito esamineremo tre sistemi di riduzione di una funzione booleana: il **metodo algebrico**, il **metodo delle mappe o di Karnaugh** e il **metodo della tabulazione o di Quine-McCluskey**.

La riduzione algebrica

La riduzione per via algebrica si avvale delle proprietà e teoremi dell'algebra booleana viste in [LogicBignami \(II\)](#).

Questo sistema è sempre applicabile ma, in alcuni casi, potrebbe risultare difficoltoso trovare il procedimento necessario alla riduzione della funzione booleana data e dire se quella ottenuta sia effettivamente la minima possibile.

Le proprietà e i teoremi dell'algebra booleana, generalmente più utilizzati sono:

Idempotenza

$$f_A(x) \cdot f_A(x) = f_A(x)$$

$$f_A(x) + f_A(x) = f_A(x)$$

Proprietà distributiva

$$f_A(x) \cdot (f_B(x) + f_C(x)) = (f_A(x) \cdot f_B(x)) + (f_A(x) \cdot f_C(x))$$

$$f_A(x) + (f_B(x) \cdot f_C(x)) = (f_A(x) + f_B(x)) \cdot (f_A(x) + f_C(x))$$

Legge dell'assorbimento

$$f_A(x) \cdot (f_A(x) + f_B(x)) = f_A(x)$$

$$f_A(x) + (f_A(x) \cdot f_B(x)) = f_A(x)$$

Elemento neutro

$$f_A(x) \cdot 1 = f_A(x)$$

$$f_A(x) + 0 = f_A(x)$$

Elemento assorbente

$$f_A(x) \cdot 0 = 0$$

$$f_A(x) + 1 = 1$$

Complementarietà

$$f_A(x) \cdot \overline{f_A(x)} = 0$$

$$f_A(x) + \overline{f_A(x)} = 1$$

In pratica si dovranno cercare, nella funzione booleana da ridurre, se esistono dei *mintermini* (o *maxtermini*) che contengano variabili booleane che siano tra loro complementari e se, a questi *mintermini* (o *maxtermini*), sia possibile applicare la *proprietà distributiva* in modo da raccogliere tali variabili rendendole, così, *elementi neutri* e quindi eliminabili dalla composizione del *mintermine* (o *maxtermine*) stesso: anche la presenza di *elementi assorbenti* ci permetterebbe di eliminare completamente un *mintermine* (o *maxtermine*) dalla funzione stessa.

Per meglio comprendere il procedimento da attuare, facciamo un paio di esempi, prendendo in esame i due casi più comuni, e cioè quando si parte da una *tabella della verità*, oppure quando si ha a disposizione, direttamente, la funzione booleana da ridurre, anche se, in questo caso, potremmo risalire, comunque, alla *tabella della verità* che l'ha generata e da lì procedere come il primo caso.

Riduzione algebrica di una funzione booleana data la sua tabella della verità

Consideriamo la seguente *tabella della verità* a quattro variabili

$I_0 I_1 I_2 I_3 O$

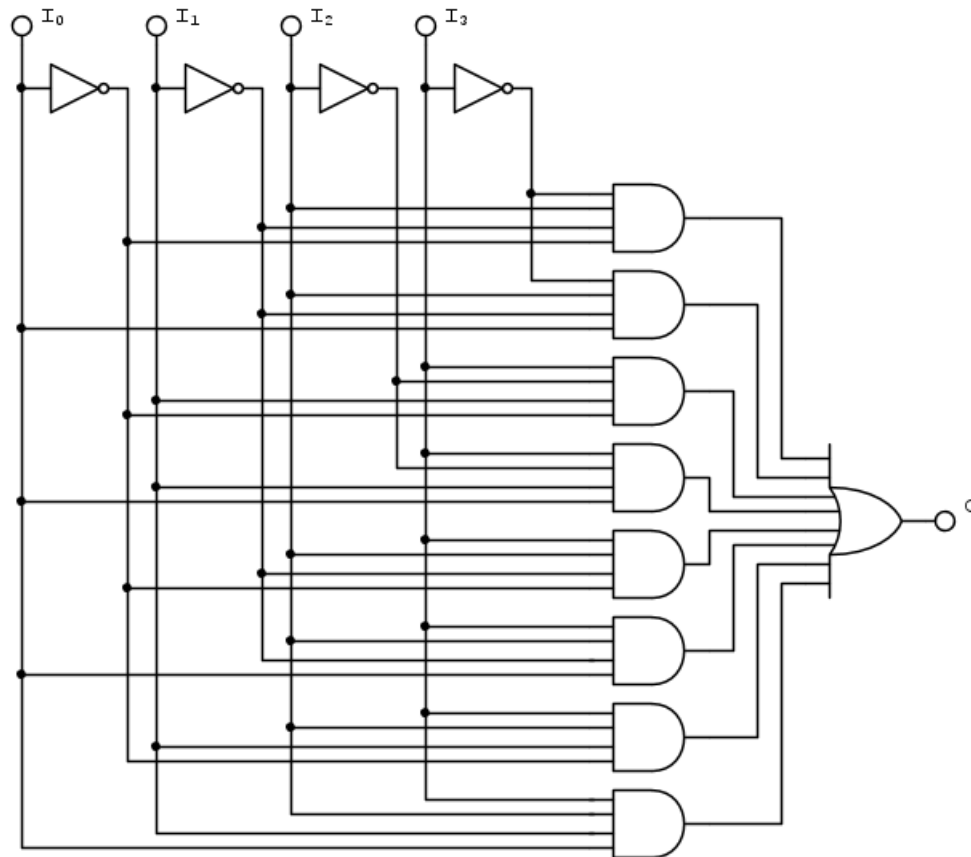
0	0	0	0	0
1	0	0	0	0
0	1	0	0	0
1	1	0	0	0
0	0	1	0	1
1	0	1	0	1
0	1	1	0	0
1	1	1	0	0
0	0	0	1	0
1	0	0	1	0
0	1	0	1	1
1	1	0	1	1
0	0	1	1	1
1	0	1	1	1

0 1 1 1 1
1 1 1 1 1

Da questa, considerando i *mintermini* relativi allo stato logico 1, della variabile d'uscita O , ricaviamo la seguente funzione booleana in **formato canonico**, come somma logica di 8 prodotti logici ognuno composto da quattro variabili booleane:

$$O = \overline{I_0} \overline{I_1} I_2 \overline{I_3} + I_0 \overline{I_1} I_2 \overline{I_3} + \overline{I_0} I_1 \overline{I_2} I_3 + I_0 I_1 \overline{I_2} I_3 + \overline{I_0} \overline{I_1} I_2 I_3 + I_0 \overline{I_1} I_2 I_3 + \overline{I_0} I_1 I_2 I_3 + I_0 I_1 I_2 I_3$$

Se volessimo realizzarla come circuito in logica **AOI** avremmo bisogno di una porta logica **OR** ad 8 ingressi, ai quali andranno collegate 8 porte logiche **AND** a 4 ingressi che manipoleranno, ognuna, le quattro variabili booleane d'ingresso I_0 , I_1 , I_2 e I_3 variamente complementate, ottenendo il seguente schema di collegamento:



Analizziamo, allora, la funzione booleana in **formato canonico**, per vedere se può essere ridotta e, conseguentemente, se è possibile ottenere un circuito più semplice.

Notiamo che le seguenti coppie di *mintermini* presentano parte delle variabili booleane d'ingresso comuni e una variabile, una volta "normale" e una volta complementata:

coppia 1 coppia 2 coppia 3 coppia 4

$$\begin{array}{l} \overline{I_0} \overline{I_1} I_2 \overline{I_3} \overline{I_0} I_1 \overline{I_2} I_3 \overline{I_0} \overline{I_1} I_2 I_3 \overline{I_0} I_1 I_2 I_3 \\ I_0 \overline{I_1} I_2 \overline{I_3} I_0 I_1 \overline{I_2} I_3 I_0 \overline{I_1} I_2 I_3 I_0 I_1 I_2 I_3 \end{array}$$

Dalla prima coppia applicando, in sequenza, la *proprietà distributiva*, la regola della *complementarietà* e la regola dell'*elemento neutro* otteniamo:

$$\overline{I_1} I_2 \overline{I_3} \cdot (\overline{I_0} + I_0) = \overline{I_1} I_2 \overline{I_3} \cdot 1 = \overline{I_1} I_2 \overline{I_3}$$

analogamente per le restanti tre coppie:

$$I_1 \overline{I_2} I_3 \cdot (\overline{I_0} + I_0) = I_1 \overline{I_2} I_3 \cdot 1 = I_1 \overline{I_2} I_3$$

$$\overline{I_1} I_2 I_3 \cdot (\overline{I_0} + I_0) = \overline{I_1} I_2 I_3 \cdot 1 = \overline{I_1} I_2 I_3$$

$$I_1 I_2 I_3 \cdot (\overline{I_0} + I_0) = I_1 I_2 I_3 \cdot 1 = I_1 I_2 I_3$$

La nostra funzione booleana si è quindi così ridotta alla somma logica di 4 *implicanti* composti, ognuno, di tre variabili booleane:

$$O = \overline{I_1} I_2 \overline{I_3} + I_1 \overline{I_2} I_3 + \overline{I_1} I_2 I_3 + I_1 I_2 I_3$$

Anche in questo caso vediamo che esistono coppie di *implicanti* a loro volta riducibili:

coppia 1 coppia 2

$$\begin{array}{l} \overline{I_1} I_2 \overline{I_3} \quad I_1 \overline{I_2} I_3 \\ \overline{I_1} I_2 I_3 \quad I_1 I_2 I_3 \end{array}$$

Applicando le proprietà e le regole precedentemente accennate, otteniamo:

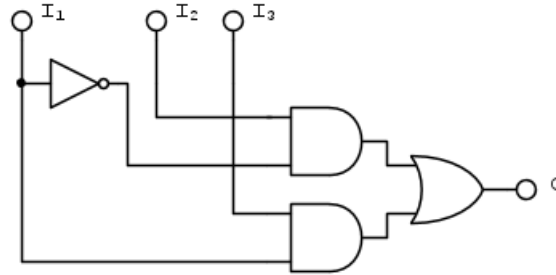
$$\overline{I_1} I_2 \cdot (\overline{I_3} + I_3) = \overline{I_1} I_2 \cdot 1 = \overline{I_1} I_2$$

$$I_1 I_3 \cdot (\overline{I_2} + I_2) = I_1 I_3 \cdot 1 = I_1 I_3$$

Alla fine la nostra funzione booleana dell'uscita si è notevolmente ridotta, ed equivale alla somma logica di 2 soli *implicanti* a 2 variabili booleane:

$$O = \overline{I_1} I_2 + I_1 I_3$$

che può essere realizzata con un circuito molto più semplice: una porta logica **OR** a 2 ingressi, ai quali sono collegate 2 porte logiche **AND** che manipolano, ognuna, solo 2 variabili.



Riduzione algebrica di una funzione booleana data la funzione stessa

Consideriamo la seguente funzione booleana: $O = I_0 I_1 \overline{I_2} + \overline{I_0} I_1 I_2$ e vediamo se sia possibile ridurla.

Escludiamo il fatto di ricavarne la *tabella della verità*, perchè si ricadrebbe nel procedimento appena descritto, e vediamo come operare direttamente alla sua riduzione.

La prima cosa da fare, non essendo in **formato canonico**, è trasformarla in tale forma, e per farlo, in pratica, si devono ripercorrere i passi di riduzione, appena visti, a ritroso.

La funzione booleana considerata "manipola" tre variabili booleane d'ingresso (I_0 , I_1 e I_2) e, come si può notare, abbiamo un *implicante* che ne utilizza solo due: $\overline{I_0} I_1$

Per aggiungere una variabile booleana a questo *implicante* (e trasformarlo, di fatto, in un *mintermine*) dobbiamo ricordare come ciò sia possibile senza modificarne la sua funzione booleana: essendo un prodotto logico, l'unico modo è aggiungere un *elemento neutro* al prodotto logico, e cioè uno stato logico 1:

$$\overline{I_0} I_1 = \overline{I_0} I_1 \cdot 1$$

Visto che a questo *implicante*, per essere trasformato in *mintermine*, manca la variabile booleana I_2 , possiamo ricorrere alla proprietà della *complementarietà* e trasformare quell'1 logico nella somma logica tra la variabile booleana I_2 e il suo complemento:

$$\overline{I_0} I_1 \cdot 1 = \overline{I_0} I_1 \cdot (I_2 + \overline{I_2}) = \overline{I_0} I_1 I_2 + \overline{I_0} I_1 \overline{I_2}$$

Quindi la nostra formula booleana di partenza, in **formato canonico**, diventa:

$$O = I_0 I_1 \overline{I_2} + \overline{I_0} I_1 I_2 + \overline{I_0} I_1 \overline{I_2}$$

In questa funzione booleana si possono notare due coppie di *mintermini* che presentano un gruppo di variabili comune e una variabile "normale" e complementata:

coppia 1 coppia 2

$$I_0 I_1 \overline{I_2} \quad \overline{I_0} I_1 I_2$$

$$\overline{I_0} I_1 \overline{I_2} \quad \overline{I_0} I_1 I_2$$

In pratica abbiamo un *mintermine* ($\overline{I_0} I_1 \overline{I_2}$) che risulta riducibile con entrambi gli altri due, però, così com'è "costruita" la funzione booleana, si può solo effettuare una delle due riduzioni e si tornerebbe ad un formato simile a quello di partenza: un *mintermine* e un *implicante*.

Ad una prima analisi parrebbe, quindi, che la funzione booleana di partenza, sia già ridotta.

In realtà, sfruttando la proprietà dell'**idempotenza**, possiamo aggiungere, alla funzione booleana in **formato canonico** un *mintermine* uguale a $\overline{I_0} I_1 \overline{I_2}$, in modo da poter effettuare la riduzione su entrambe le coppie precedentemente indicate:

$$O = I_0 I_1 \overline{I_2} + \overline{I_0} I_1 I_2 + \overline{I_0} I_1 \overline{I_2} + \overline{I_0} I_1 I_2$$

Quindi, come avevamo già visto, applicando in sequenza la *proprietà distributiva*, la regola della *complementarietà* e la regola dell'*elemento neutro* ad entrambe le coppie, otteniamo:

$$I_1 \overline{I_2} \cdot (I_0 + \overline{I_0}) = I_1 \overline{I_2} \cdot 1 = I_1 \overline{I_2}$$

$$\overline{I_0} I_1 \cdot (I_2 + \overline{I_2}) = \overline{I_0} I_1 \cdot 1 = \overline{I_0} I_1$$

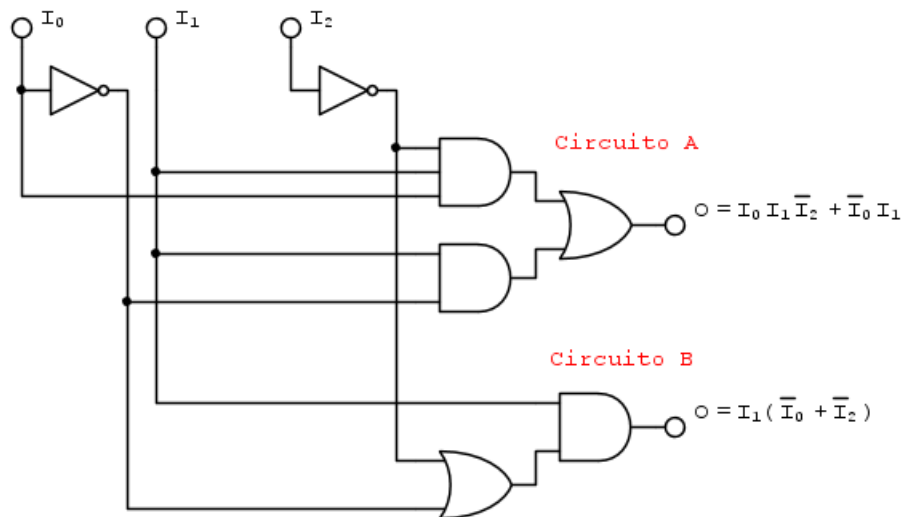
da cui si ricava la funzione booleana ridotta in somma logica di 2 *implicanti* a 2 variabili booleane:

$$O = I_1 \overline{I_2} + \overline{I_0} I_1$$

Come si vede, entrambi gli *implicanti* hanno la variabile I_1 in comune, per cui, applicando ancora una volta la **proprietà distributiva**, otteniamo la funzione booleana ridotta:

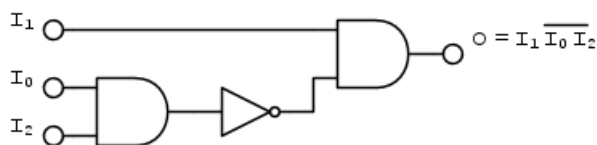
$$O = I_1 \cdot (\overline{I_2} + \overline{I_0})$$

In questo modo siamo passati dal realizzare la funzione booleana di partenza, con il circuito A, a quello della stessa, ma ridotta, con il circuito B.

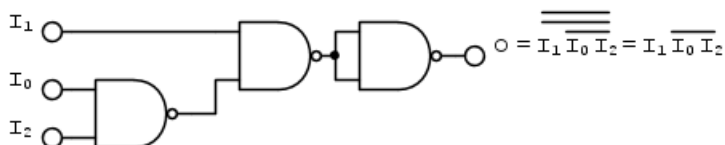


Ma guardiamo ancora un attimo la funzione booleana ridotta: $O = I_1 \cdot (\bar{I}_2 + \bar{I}_0)$.

Ricordando le *Leggi di De Morgan*, la somma logica $\bar{I}_2 + \bar{I}_0$ la possiamo trasformare nel prodotto logico $\bar{I}_2 \bar{I}_0$ e in questo modo otteniamo la funzione booleana $O = I_1 \bar{I}_2 \bar{I}_0$, che, in pratica ci risparmierebbe una porta **NOT**.



A questo punto, volendo evitare di utilizzare due tipologie di porte logiche differenti, visto che abbiamo solo prodotti logici, e uno di questi è complementato, possiamo pensare di realizzare il tutto in logica **NAND** utilizzando sempre tre sole porte logiche:



Con quest'ultimo caso concludiamo la presentazione della **riduzione algebrica** di una funzione booleana, prossimamente analizzeremo come procedere per via "grafica" tramite le **mappe di Karnaugh**.

[LogicBignami - Indice articoli correlati](#)

Estratto da "<https://www.electroyou.it/mediawiki/index.php?title=UsersPages:Max2433bo:logicbignami-vi>"