



MircoDF

REGOLA DI CARTESIO

9 May 2010

Premessa

Un veloce ripasso su un'importante regola, spesso dimenticata.

Introduzione

Come sappiamo, secondo la regola di **Cartesio**, detto $p(x)$ un polinomio di grado n a coefficienti reali non nulli, considerando le n radici dell'equazione

$$p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

(supposte reali), si avrà che il numero delle radici positive (negative) uguaglia il numero di variazioni (permanenze) dei segni dei coefficienti dell'equazione, scritta secondo l'ordine delle potenze.

Un esempio

Presa come esempio una equazione di quarto grado

$$x^4 - x^3 - 42x^2 + 36x + 216 = 0$$

possiamo notare la presenza di due variazioni e di due permanenze ed essendo tutte le radici reali possiamo quindi dire che ci saranno due soluzioni positive e due negative.

Per controllare, la facciamo risolvere e plottare da Mupad.

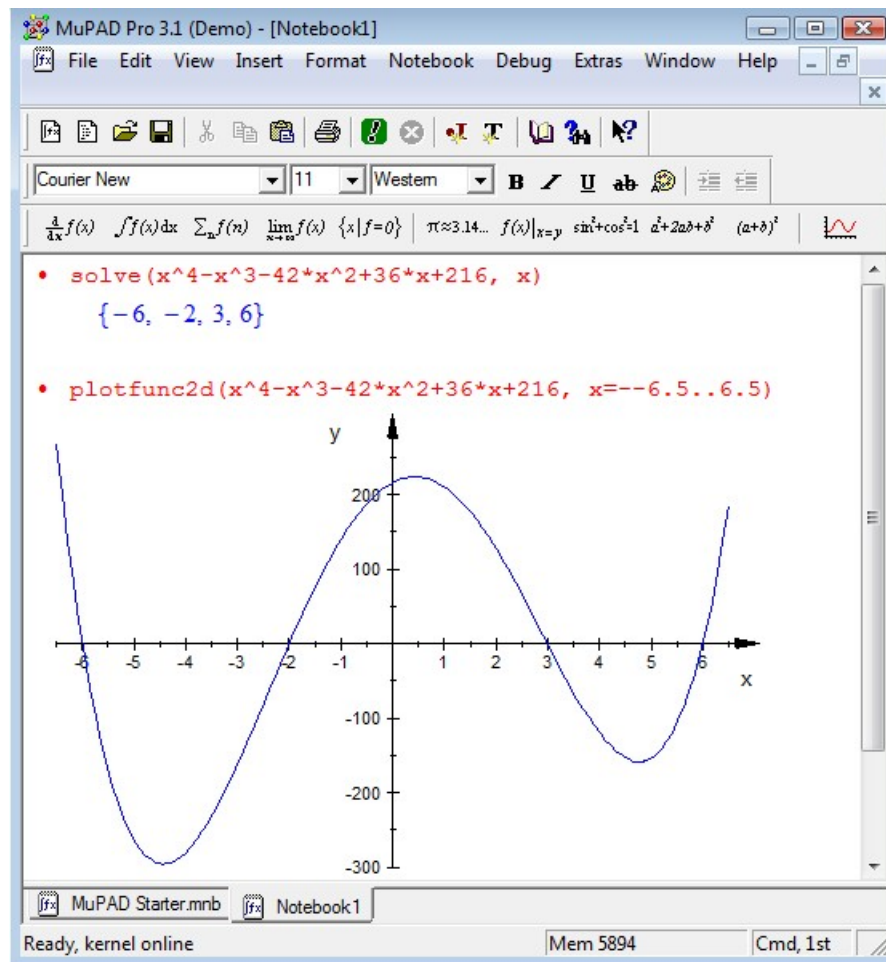


fig.1

Nel seguito di questo articolo faremo comunque riferimento a sole equazioni di secondo grado.

Un esempio parametrico

Per un'equazione di secondo grado anche parametrica è possibile determinare le condizioni del parametro al fine di ottenere radici di segno voluto;

$$(k-1)x^2 - 2(k+3)x + k-3 = 0$$

Prima di tutto calcoliamo per quali valori di **k** il discriminante non è negativo

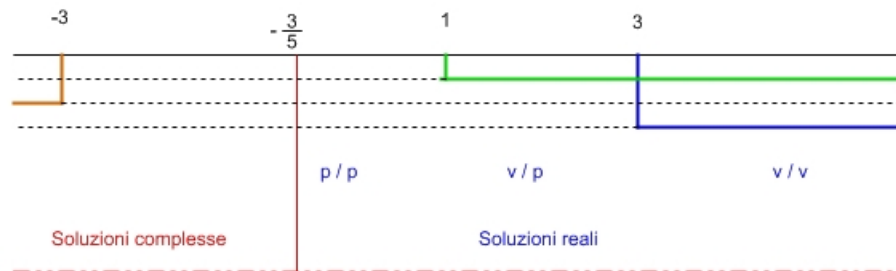
$$\bullet \text{ solve}((2*(k+3))^2 - 4*(k-1)*(k-3) \geq 0, k)$$

$$\left[-\frac{3}{5}, \infty\right)$$

$$\Delta \geq 0 \rightarrow k \geq -\frac{3}{5}$$

verificata questa condizione possiamo passare all'analisi dei segni delle radici attraverso la discussione del segno dei tre coefficienti

$$\begin{cases} k-1 > 0 \\ -2(k+3) > 0 \\ k-3 > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} k > 1 \\ k < -3 \\ k > 3 \end{cases}$$



dalla figura, considerando i diversi intervalli, notiamo che:

$$k < -\frac{3}{5} \rightarrow \text{soluzioni complesse}$$

$$k = -\frac{3}{5} \rightarrow \Delta = 0 \rightarrow x_1 = x_2 < 0$$

$$-\frac{3}{5} < k < 1 \rightarrow 2 \text{ perm.} \rightarrow x_1 \wedge x_2 < 0$$

$$k = 1 \rightarrow 1 \text{ perm.} \rightarrow x < 0$$

$$1 < k < 3 \rightarrow 1 \text{ var. } 1 \text{ perm.} \rightarrow x_1 > 0 \wedge x_2 < 0$$

$$k = 3 \rightarrow x_1 = 0 \wedge x_2 > 0$$

$$k > 3 \rightarrow 2 \text{ var.} \rightarrow x_1 \wedge x_2 > 0$$

Verifichiamo con Mupad le radici generiche

$$\bullet \text{ solve}((k-1)*x^2 - 2*(k+3)*x + k - 3 = 0, x)$$

$$\begin{cases} \left\{-\frac{1}{4}\right\} & \text{if } k = 1 \\ \left\{\frac{k + \sqrt{2 \cdot \sqrt{5 \cdot k + 3} + 3}}{k-1}, \frac{k - \sqrt{2 \cdot \sqrt{5 \cdot k + 3} + 3}}{k-1}\right\} & \text{if } k \neq 1 \end{cases}$$

e con la seguente riga, facciamo tracciare la curva per k che va da -6 a 5,

```
• plotfunc2d((k-1)*x^2-2*(k+3)*x+k-3,x=-3..5,k=-6..5)
```

ottenendo questa animazione

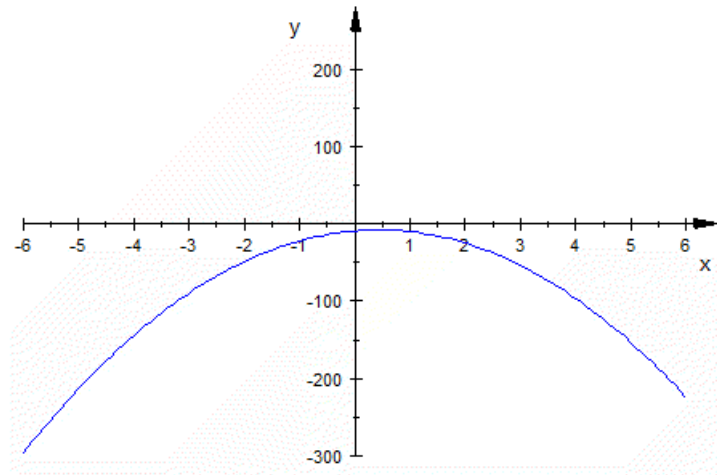


fig.2

Le curve relative ai k notevoli saranno le seguenti

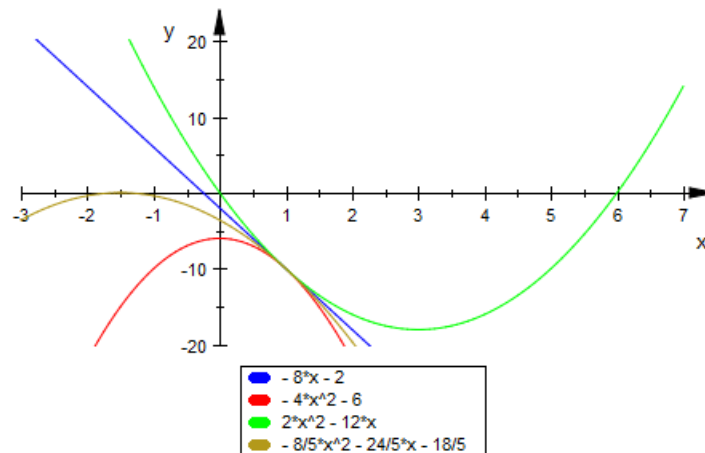


fig.3

Come abbiamo potuto constatare, con l'aiuto di un software matematico, questa semplice regola ci permette di conoscere i segni delle radici senza dover risolvere l'equazione e, in presenza di un parametro, determinarne anche i campi di variabilità associati.

Un cenno storico

Cartesio enuncia la sua regola in [GEOMETRIA](#) nel 1637; con le seguenti righe, in latino naturalmente

D Ex quibus etiam cognoscitur, quot veræ & quot falsæ
Quot ha- beri pos- sint verae radices in qualibet Aequatione.
 radices in unaquaque Aequatione haberi possint. Ni-
 mirum, tot in ea veras haberi posse, quot variationes re-
 periuntur signorum $+$ & $-$; & tot falsas, quot vicibus
 ibidemprehenduntur duo signa $+$, vel duo signa $-$,
 quæ se invicem sequuntur.

che tradotta [2], corrisponde a

"... da ciò si vede pure quante radici vere e quante false possiamo avere in ogni equazione. Senza dubbio ve ne possono essere tante vere quante variazioni di segni incontrati e allo stesso modo tante false quante volte due segni + e due segni - vengono osservati."

Si noti come **Cartesio** chiami "vere" e "false" le radici, facendo riferimento rispettivamente a quelle positive e a quelle negative e anche come con quel "ve ne possono essere" intenda indicarne **solo** un limite superiore.

Bibliografia

- [1] Renato Des Cartes, [Geometriae](#), 1661.
- [2] Silvio Maracchia, [Storia dell'algebra](#), 2009
- [3] Burnside, [The theory of equations](#), 2009
- [4] David Eugene Smith, [The geometry of René Descartes](#), 1954
- [5] Bruce Elwyn Meserve, [Fundamental concepts of algebra](#), 1982
- [6][documento 1](#)
- [7][documento 2](#)

Estratto da "<http://www.electroyou.it/mediawiki/index.php?title=UsersPages:Mircodf:articolo2>"