



paolo carlizza (paolo.carlizza)

CALCOLO DEL CAMPO ELETTROMAGNETICO DA PARTE DI UNA DISTRIBUZIONE DI CARICHE O DI CORRENTI (PARTE 2)

15 November 2013

Come visto siamo riusciti a trovare, mediante l'ausilio della funzione di Green ed i potenziali elettrodinamici A, F e V, U le formule generali che danno il valore del campo em. in un punto, irradiato da una distribuzione spaziale di correnti e di cariche elettriche oscillanti (l'elettrodinamica ci dice che la condizione d'irradiazione e' dovuta al fatto che l'accelerazione della carica e' diversa da zero, oppure per dirla piu' semplicemente e' soggetta ad oscillazioni molto frequenti nel tempo, a patto che la lunghezza d'onda del campo, abbia dimensioni comparabile con l'oggetto irradiante, perche' altrimenti ci troveremmo solo in condizioni quasi-stazionarie, ovvero quelle in cui s'instaura una corrente alternata a bassa frequenza, senza presenza di correnti di spostamento). In questo articolo cerchiamo di mostrare nuovi sviluppi della teoria esposta nella parte 1

Approssimazioni geometriche nello spazio

Senza stare a ripetere le formule, viste nella parte (1), sappiamo che la funzione di Green nell'esponenziale, dipende dal modulo della differenza tra r , variabile di osservazione ed r' , variabile individuante un punto della sorgente generalmente tridimensionale (casi particolari, le aperture di dimensione 2 e le antenne filiformi di dimensione 1). Quindi si puo' scrivere:

$$R = |r - r'| = \sqrt{(r - r') \cdot (r - r')} = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2r' \cdot r} = r \sqrt{1 + \frac{r'^2}{r^2} - 2 \frac{r' \cos \theta'}{r}}$$

dove θ' e' l'angolo formato tra r ed r' .

Se noi prendiamo la funzione $\sqrt{1-x}$, $x = \frac{r'}{r} \ll 1$, come effettivamente e', e la sviluppiamo al secondo ordine con la funzione di Taylor, nel punto $x=0$, otteniamo:

$$\sqrt{1-x} \simeq 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$$

Per cui si ha:

$$R \simeq (r - r' \cos \theta') + \frac{r'^2}{2r}(1 - \cos^2 \theta')$$

Il primo termine predomina a grandi distanze e denota la zona di Fraunhofer, dove il campo decresce come l'inverso della variabile r , mentre il secondo è proprio della zona di Frénel, che si trova a distanze piccole ma non troppo dalla sorgente.

Quindi la funzione di Green diventa:

$$G = \frac{1}{4\pi R} \exp(-jk(r - r' \cdot r_0) + \frac{r'^2}{2r}(1 - \cos^2 \theta'))$$

con r_0 il versore nella direzione r .

Il termine di Frénel contribuisce ad un ulteriore sfasamento, come

$$\Delta\phi = k \frac{r'^2}{2r}(1 - \cos^2 \theta')$$

Quindi si ha:

$$|\Delta\phi| \leq \frac{r'^2}{2r}$$

Se indichiamo con D la massima distanza tra i punti della sorgente o il suo diametro otteniamo

$$|\Delta\phi| \leq \frac{(\frac{D}{2})^2}{2r} = k \frac{D^2}{8r}$$

Se la correzione di fase viene contenuta fino a $\frac{\pi}{8}$, allora si può ritenere di essere in zona Fraunhofer ed il calcolo finale da $r \geq 2 \frac{D^2}{\lambda}$

come anticipato verso la fine della parte (1) di questa trattazione.

Il campo em. nella zona di Fraunhofer

Si tratta di riscrivere la funzione di Green, trascurando il secondo termine di Frénel, e per questo il potenziale vettore diviene:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \int_{\tau} \mathbf{J}_i(r') \frac{\exp(-jk(r - r' \cdot r_0))}{4\pi r} d\tau' = \\ &= \frac{\exp(-jkr)}{4\pi r} \int_{\tau} \mathbf{J}_i(r') \frac{\exp(-jk(r' \cdot r_0))}{1} d\tau' \end{aligned}$$

Dato che siamo a grande distanza si può dire che $R \simeq r$

Rappresentando l'integrale (indipendente da r)

$$\int_{\tau} \mathbf{J}_i(\mathbf{r}') \frac{\exp(-jk(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}_0))}{d\tau'} d\tau'$$

come

$$\mathbf{N}(\theta, \phi) = \mathbf{N}_r(\theta, \phi)\mathbf{r}_0 + \mathbf{N}_\theta(\theta, \phi)\theta_0 + \mathbf{N}_\phi(\theta, \phi)\phi_0,$$

usando le espressioni di E ed H in funzione del potenziale vettore A (vedi parte (1)), e trascurando i termini di $1/r$ di ordine superiore al primo, si ottiene un'espressione generalizzata dei campi in zona Fraunhofer. Chiaramente si saltano i passaggi, dove si calcolano gli operatori nabla, portati in coordinate sferiche. Per approfondire, si guardino i testi specializzati, riportati nella parte (1).

$$\mathbf{E}(r, \theta, \phi) = -jk\zeta \frac{\exp(-jkr)}{4\pi r} (\mathbf{N}_\theta(\theta, \phi)\theta_0 + \mathbf{N}_\phi(\theta, \phi)\phi_0)$$

$$\mathbf{H}(r, \theta, \phi) = -jk \frac{\exp(-jkr)}{4\pi r} (-\mathbf{N}_\phi(\theta, \phi)\theta_0 + \mathbf{N}_\theta(\theta, \phi)\phi_0)$$

la variabile ζ è detta impedenza caratteristica del mezzo ed è pari a $\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$

Si può concludere che in Zona Fraunhofer, che è quella che interessa per gli effetti pratici

- i campi elettrico E e magnetico H decrescono con la distanza come $1/r$
- entrambi i campi possiedono un fattore di propagazione pari a $\exp(-jkr)$
- i due campi sono polarizzati ortogonalmente, appartenenti ad un piano ortogonale alla direzione di propagazione
- i due campi sono legati dalla relazione:

$$\mathbf{H}(r) = \frac{1}{\zeta} \mathbf{r}_0 \times \mathbf{E}(r)$$

Per quanto riguarda l'approssimazione di Frénel, non tratteremo nulla, per il momento. La considereremo per campi em generati da aperture di antenna.

Campi em irradiati da antenne ad apertura

Per poter trattare quest'argomento dobbiamo tornare un attimo indietro alle formule dei campi dipendenti dal potenziale vettore A, che riepiloghiamo per comodità:

$$\mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{A} + \frac{\nabla\nabla \cdot \mathbf{A}}{j\omega\epsilon_c} = -j\omega\mu \left(\mathbf{A} + \frac{\nabla\nabla \cdot \mathbf{A}}{k^2} \right)$$

$$\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}$$

Sappiamo che il potenziale vettore $\mathbf{A}$ dipende dall'integrale di volume delle sorgenti dei prodotto tra la densita' di corrente in un punto e la funzione di Green e quindi basta sostituire questo integrale nelle formule scritta appena sopra. I calcoli sono lunghi e tedious, ed alla fine considerando solo come sorgenti le correnti elettriche si possono trovare le espressioni generali dei campi $\mathbf{E}$ ed $\mathbf{H}$, che sono:

$$\mathbf{E} = -j\omega\mu \int_{\tau} \mathbf{J}_i(\mathbf{r}') \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d\tau + \frac{1}{j\omega\epsilon} \int_{\tau} (\mathbf{J}_i(\mathbf{r}') \cdot \nabla) \nabla \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d\tau$$

$$\mathbf{H} = \int_{\tau} \mathbf{J}_i(\mathbf{r}') \times \nabla \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d\tau$$

Per continuare dobbiamo trasformare gli operatori ∇ in coordinate sferiche e per questo rimandiamo tutte le implicazioni del caso ai testi citati come riferimento e non eseguiremo tutti i passaggi.

Zona di Fraunhofer

Si ottengono finalmente le espressioni generali finali per i campi $\mathbf{E}$ ed $\mathbf{H}$, secondo le forme viste all'inizio dell'articolo, nel caso Fraunhofer, secondo le funzioni $\mathbf{N}_i$, con $i = r, \theta, \phi$, ma visualizzabili in maniera estesa.

Tali espressioni sono:

$$\mathbf{E} = -\frac{j\omega\mu}{4\pi} \frac{\exp(-jkr)}{r} \int_{\tau} (J_{\theta}\theta_0 + J_{\phi}\phi_0) \exp(-j\mathbf{k}\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{r}') d\tau$$

$$\mathbf{H} = \frac{-jk}{4\pi} \frac{\exp(-jkr)}{r} \int_{\tau} (\mathbf{J}_i \times \mathbf{r}_0) \exp(-(j)\mathbf{k}\mathbf{r}_0 \times \mathbf{r}'(d)\tau$$

Come calcolare in zona Fraunhofer, il campo in un punto P nello spazio dovuto ad un funzione d'illuminazione su un'apertura di antenna, che puo' essere rettangolare o circolare, come e' d'uso.

Le ultime due equazioni sono equazioni vettoriali e si possono tradurre ognuna in tre corrispondenti equazioni scalari. In genere l'espressione del campo su una superficie sferica puo' essere scritto come:

In generale si ha l'interesse di determinare una distribuzione di campo em su una superficie coordinata sferica di opportuno raggio, in funzione della distribuzione dell'eccitazione sull'apertura (vedi teorema di equivalenza, dove i campi em diventano correnti o cariche variabili nel tempo); questa funzione e' detta funzione d'illuminazione. Il campo su una superficie sferica di raggio r puo' essere scritto come:

$$\mathbf{F}(\theta, \phi) = \int_{S_{Ap}} f(x', y') \exp[-j(k_x x' + k_y y')] dx' dy'$$

dove $f(x', y')$ e' la funzione d'illuminazione (distribuzione di campo o correnti sull'apertura di antenna ed $\mathbf{F}(\theta, \phi)$) la funzione di distribuzione campo su una superficie sferica a distanza r .

con

$f(x', y')$ e' diversa da zero sull'apertura e zero fuori di essa

$$k_x = k \sin(\theta) \cos(\phi)$$

$$k_y = k \sin(\theta) \sin(\phi)$$

E' la stessa cosa scrivere la formula come

$$\mathbf{F}(k_x, k_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x', y') \exp[-j(k_x x' + k_y y')] dx' dy'$$

La $\mathbf{F}(\theta, \phi)$, che puo' identificarsi con il diagramma di radiazione dell'antenna ad apertura non e' altro che l'anti-trasformata di Fourier spaziale della funzione di illuminazione dell'apertura.

Se s'inverte questa relazione, possiamo determinare da un diagramma di radiazione voluto la distribuzione di correnti. E quindi avremo la corrispondente trasformata di Fourier.

$$f(x', y') = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{F}(k_x, k_y) \exp[j(k_x x' + k_y y')] dk'_x dk'_y$$

Zona di Frésnel

Per quanto riguarda la trattazione, che considera la zona di Frésnel abbiamo visto che:

$$|r - r'| = R = r - r_0 \cdot r' + \frac{1}{2r} [r'^2 - (r_0 \cdot r')^2]$$

Se le direzioni di osservazione non si discostano troppo dall'asse z , ortogonale all'apertura, vale

$$R \simeq r - r_0 \cdot r' + \frac{r'^2}{2r}$$

In zona di Frénel si considerano le diverse funzioni di radiazioni, compresa la variabile r

$$\mathbf{F}(r, \theta, \phi) = \int_{Ap} f(x', y') \exp \left[-j(k'_x + k'_y) - jk \left(\frac{x'^2 + y'^2}{2r} \right) \right] dx' dy'$$

Per il caso di illuminazione uniforme, se l'apertura è un rettangolo di lati $[a, b]$, gli integrali si spezzano in un prodotto

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(r, \theta, \phi) &= F_1 \cdot F_2 = \\ &= \int_{-a/2}^{a/2} \exp \left(jk_x x' - jk \frac{x'^2}{2r} \right) dx' \cdot \int_{-b/2}^{b/2} \exp \left(jk_y y' - jk \frac{y'^2}{2r} \right) dy' \end{aligned}$$

Dopo alcune manipolazioni e ricordando le espressioni in coordinate polari di k_x e k_y , si può scrivere:

$$F_1 = \exp(j\psi_x) \int_{-a/2}^{a/2} \exp \left[-j \frac{k}{2r} (x' - r \sin \theta \cos \phi)^2 \right] dx'$$

con

$$\psi_x = \frac{kr}{2} \sin^2 \theta \cos^2 \theta$$

Si pone

$$\frac{k}{2r} (x' - r \sin \theta \cos \phi)^2 = \frac{\pi}{2} u^2$$

ovvero:

$$u = \sqrt{\frac{2}{\lambda r}} (x' - r \sin \theta \cos \phi)^2 \quad (8)$$

$$du = \sqrt{\frac{2}{\lambda r}} dx'$$

Per questo, per F_1 possiamo passare nell'integrale dalla variabile x a quella u_1 e scrivere:

$$\begin{aligned} F_1(r, \theta, \phi) &= \int_{u_1}^{u_2} \exp \left(j\phi_x - j \frac{\pi}{2} u^2 \right) \sqrt{\frac{\lambda r}{2}} du = \\ &= \exp(j\psi_x) \sqrt{\frac{\lambda r}{2}} \int_{u_1}^{u_2} \exp \left(-j \frac{\pi}{2} u^2 \right) du \end{aligned}$$

in cui u_1 e' il valore della (8) mettendo $-a/2$ al posto di x' ed u_2 e' sempre il valore della (8) per $x'=a/2$.

L'integrale e' uno tipico per la letteratura matematica. Se si considera che $\exp(jx)$ per la formula di Le Moivre e' pari a $\sin(x) + j\cos(x)$, individuiamo le due funzioni

$$C(u) = \int_0^u \cos\left(\frac{\pi}{2}t^2\right) dt$$

$$S(u) = \int_0^u \sin\left(\frac{\pi}{2}t^2\right) dt$$

per trovare infine:

$$F_1(r, \theta, \phi) = \exp\left(-j\frac{\pi}{2}u^2\right) [C(u_2) - C(u_1) - j(S(u_2) - S(u_1))]$$

Analogo e' il discorso per la $F_2(r, \theta, \phi)$, dove ad u_1 corrisponde $-b/2$, ad u_2 $b/2$ e al posto di ϕ_x corrisponde $\phi_y = \frac{kr}{2} \sin^2 \theta \sin^2 \phi$

Le funzioni $C(t)$ ed $S(t)$ sono funzioni integrali in forma tabulare e sono riportati i diagrammi detti, Spirali di Cornu, che identificano due zone a spirali di una curva che, che ha per assi delle ordinate le funzione $S(t)$ e per ascisse la $C(t)$.

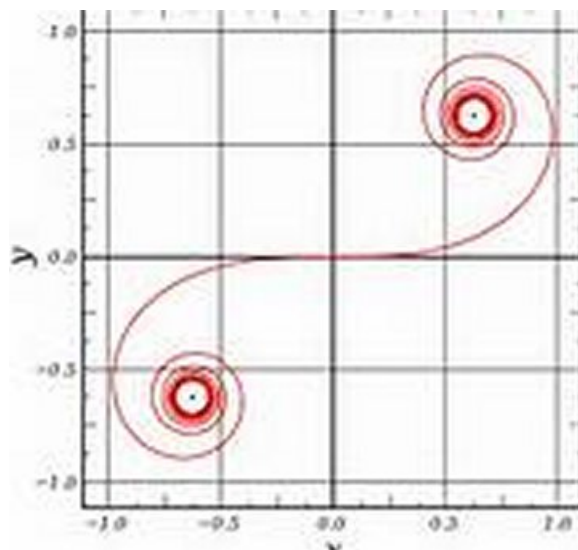


Fig. 3. La doppia spirale di Cornu, che denota i valori di $C(u)$ ed $S(u)$

Questo grafico dimostra, con un po' di debita riflessione che le due funzioni $C(u)eS(u)$ hanno un entrambe andamento oscillante smorzato, che si attesta asintoticamente al valore di 0.5. La $S(u)$ parte leggermente in ritardo, rispetto alla $C(u)$, guardando la direzione delle ascisse, anche se entrambe passano per l'origine. Le loro oscillazioni s'incrociano con una certa periodicità, finché non tendono a 0.5. Quindi la $\mathbf{F}(r, \theta, \phi)$ generale viene ottenuta dal prodotto tra la F_1 e la F_2 .

In questo modo si calcola il campo in zona di Frénel con approssimazione parassiale, ovvero quando le sorgenti sono molto concentrate attorno all'asse di propagazione (vettori $\mathbf{r}$ ed $\mathbf{r}'$, quasi paralleli). Per le condizione non parassiale, le formule si complicano leggermente, comparando un fattore coseno e le differenze delle coordinate punto sorgente e punto di osservazione, ma in sostanza i cambiamenti non sono stravolgenti.

In realtà nella zona di Frénel si hanno campi oscillanti con la distanza r , che si regolarizzano, in zona di Fraunhofer, quando decadono con l'inverso della distanza.

Cliccare su continua per vedere la parte 3.

[continua ...](#)

Estratto da "<http://www.electroyou.it/mediawiki/index.php?title=UsersPages:Paolo.carlizza:calcolo-del-campo-elettromagnetico-da-parte-di-una-distribuzione-di-cariche-o-di-correnti-parte-2>"