



paolo carlizza (paolo.carlizza)

ELEMENTI DI TEORIA DEL CAOS E SVILUPPO DELLE POPOLAZIONI

29 August 2017

Nel secolo scorso, ci fu un certo numero di scienziati che facendo esperimenti su sistemi non lineari, si accorsero, che apparivano delle irregolarità circa i valori ottenuti, che davano evidenza di un comportamento caotico. Tra gli scienziati c'era un certo Lorentz, appassionato di meteorologia, che cominciò a studiare queste irregolarità, attraverso sistemi di equazioni differenziali, ovviamente a più di una variabile incognita.

Egli si accorse che se voleva ripetere un fenomeno studiato matematicamente con questi sistemi di equazioni, inserendo di nuovo condizioni iniziali diverse, ma appartenenti sempre alla soluzione, otteneva andamenti differenti da quelli studiati in precedenza, mentre dovevano rimanere gli stessi.

In primo luogo pensò ad errori dovuti alla strumentazione, che variava i suoi parametri fisici nel tempo, per una qualsivoglia ragione, ma poi si accorse, che nelle condizioni iniziali ripetute aveva inserito un numero di cifre decimali limitato, rispetto agli esperimenti precedenti.

Cio' lo portò a pensare che se andava a studiare un fenomeno con certe condizioni iniziali, e studiando lo stesso con parametri iniziali di pochissimo diversi esso doveva rilevare profonde variazioni di comportamento, al passare del tempo. Egli applicò questi ragionamenti anche alla meteorologia e reputò che piccole perturbazioni in un certo luogo della terra, potessero produrre enormi variazioni dei parametri studiati, in punti molto lontani: questo modo di evoluzione dei fenomeni fu denominato "effetto farfalla".

Quindi si concluse che andamenti di una variabile studiata, piuttosto regolari nei primi istanti di tempo dello studio, potevano all'improvviso scatenare andamenti caotici, dove si perdeva una certa identità di correlazione con gli istanti precedenti.

Cio' denotava che i fenomeni che evolvevano avevano, anche una forte dipendenza dalle condizioni iniziali.

La teoria del caos

La teoria del caos è una disciplina degli ultimi due secoli, che fa parte di una più estesa, detta teoria della complessità. Questa è definita nel modo che segue.

"Lo studio interdisciplinare dei sistemi complessi adattativi e dei fenomeni emergenti ad essi associati. Un sistema può essere visto come complesso, parlando in modo un po' approssimativo, se si tratta di un sistema costituito da un gran numero di parti semplici che sono in grado reciprocamente di scambiarsi stimoli e di interagire sia reciprocamente sia con l'ambiente che

contiene il sistema stesso. Quando un sistema complesso in conseguenza di queste interazioni arriva ad avere le proprietà di adattare autonomamente (cioè senza l'effetto di una forza esogena) la propria struttura interna, si dice adattivo" (Vedi rif. 1). In base a queste interazioni può prodursi o no il caos.

Le soluzioni matematiche, di cui abbiamo trattato superficialmente nell'introduzione in corsivo, usate ed adottate per descrivere la teoria del caos, furono trasportate anche nel campo della biologia e della demografia, soprattutto per teorizzare modelli di crescita cellulari e della popolazione umana in genere, tenendo conto anche di fattori esterni accrescitivi e/o limitanti. Per questo nacque una nuova scienza, detta biologia computazionale. La biologia delle popolazioni aveva bisogno di nuovi paradigmi, e le equazioni differenziali continue per natura erano o troppo complicate, quindi irrisolvibili, o troppo semplici quindi con risultati banali. A queste si sostituirono equazioni discrete, note talvolta come equazioni alle differenze, risolte in maniera ricorsiva. Esse possono essere usate per modellizzare sistemi che evolvono in stati in maniera discontinua. Un esempio semplice può essere quello di voler calcolare il numero di individui negli anni successivi, partendo da un dato anno, dove la dipendenza dell'anno attuale deriva solamente dal numero di individui dell'anno precedente. Quindi un modello matematico, per descrivere quanto detto può essere messo sotto la forma di

$$x_{n+1} = f(x_n),$$

dove il valore di un istante dipende da quello dell'istante precedente, secondo una legge opportuna. Il modello più semplice è la legge lineare, dove c'è un aumento 'malthusiano' di popolazione proporzionale ad un parametro k , ovvero

$$x_{n+1} = k \cdot x_n$$

Questo sviluppo di popolazione è caratterizzato da cibo infinito e senza freni riproduttivi. Questo modello però non è assolutamente reale, perché esiste una molteplicità di fattori frenanti, come le malattie, la scarsità di cibo ad altro. Allora viene proposto un modello non lineare dotato di un fattore frenante, che si esplicita in

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$$

La particolarità di questa equazione, detta logistica è che essa dipende nel suo comportamento dai valori del parametro r . Infatti, per valori bassi l'andamento di tende ad uno stato stazionario, mentre per quelli più alti, comincia ad assumere andamenti strani e caotici.

Per i valori di r fino a 2,7 il comportamento è regolare ed il valore nullo in uscita fornisce l'indicazione che la popolazione è destinata ad estinguersi, per valori compresi tra 2,7 e 3 la popolazione tende a crescere lievemente, mentre per il valore 3 il grafico si biforca. Il sistema inizia ad oscillare tra due valori stabili. In altri termini il numero di individui della popolazione oscilla tra due valori in anni alterni. Aumentando lievemente il parametro ogni biforcazione dà luogo ad un'altra biforcazione: un alternarsi di 4 valori ogni 4 epoche (anni). Continuando ad aumentare tale

valore si riscontra un raddoppiare delle biforcazioni: 2, 4, 8, 16, 32, ma ad un certo punto (“punto di accumulazione”) sembra comparire il caos; i punti oscillano come il rumore in uno schermo di un televisore non sintonizzato, ma di colpo sembrano comparire nuovamente biforcazioni. Ma si scopre ora che vi sono isole di regolarità in un mare di caos. L’Equazione Logistica permette di avvicinarsi e toccare con mano il concetto di caos, poiché l’aumentare del parametro ci conduce, partendo da un universo ordinato e regolare, ad un universo altamente caotico, facendoci saggiare cosa c’è nel mezzo, permettendoci di osservare la comparsa del caos. Nella Fig. 1 è rappresentato il diagramma di quanto appena esposto.

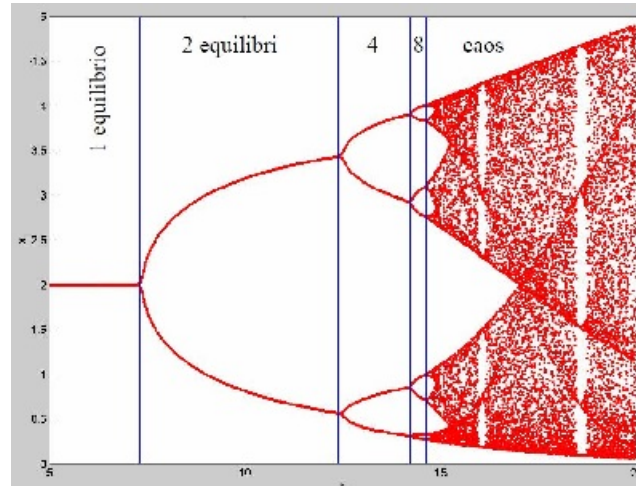


Fig. 1. Grafico relativo all'equazione logistica

In questa parte finale sono inserite alcune semplici linee di codice, per il linguaggio di programmazione matematico-scientifico Matlab, che permettono di ottenere le stesse esperienze raccontate sopra. I parametri sono modificabili ed un semplice “run” mostra i grafici appena descritti. Il codice si divide in due parti: - una prima parte dove si mantiene il parametro r costante, e tramite un ciclo for si calcolano i valori della popolazioni per le varie epoche i , partendo da una data condizione iniziale X . Si sono graficate separatamente le iterazioni pari e le iterazioni dispari. - una seconda parte dove si tiene costante il valore di X e si fa variare il parametro r .

La prima parte di codice permette di avere esperienza dei valori alternanti X della popolazione, a seconda del valore di r scelto. La seconda parte permette invece di printare il classico grafico, trovato dallo scienziato scopritore May dove compaiono le biforcazioni.

```

%prova funzione: MAPPA LOGISTICA, -- CAOS DETERMINISTICO versione 1.0 clc; clear;
% =====
%condizioni iniziali
X=0.1;
r=3.55

x=zeros(1,100);

for i=1:length(x)
X=r*X*(1-X);
x(i)=X;
end

figure(1);
plot(x, '*')
% =====
%al variare del parametro R calcolo le possibili condizioni iniziali

R=0.01:0.01:4;
X=0.9;

for i=1:length(R)
X=R(i)*X*(1-X);
y(i)=X;
end

figure(2);
plot(R,y, '*')
title('raddoppiamenti di periodo della mappa logistica');
xlabel('r');
ylabel('x');

%plot delle iterazioni pari
z=x;
figure(3);
for i=1:length(z)
if mod(i,2)==1; %verifico per gli indici pari
z(i)=0;
end
end
end

```

Fig. 2a. Listato del programma principale Matlab per l'equazione logistica

```

plot(z, '+')
title('dinamica popolazione-iterazioni pari');
xlabel('iterazioni n');
ylabel('xn');

m=x;
figure(4);
for i=1:length(m)
if mod(i,2)==0; %verifico per gli indici dispari
m(i)=0;
end
end

plot(m, '+')
title('dinamica popolazione-iterazioni dispari');
xlabel('iterazioni n');
ylabel('xn');
disp('Joomla Geshi Matlab Code integration by Augusto Angeletti Latini');

```

Fig. 2b. Listato delle subroutine del programma Matlab per l'equazione logistica

Riferimenti e bibliografia

1. C. S. Bartugia, F. Vaio, Complessità e Modelli, 2010, Bollati Boringhieri
2. J. Gleick, CAOS, La nascita di una nuova scienza, 1989 RCS Rizzoli, Milano
3. Enrico De Sanctis, Ph.D. in Information and Communication Engineering at Information Engineering , Electronics and Telecommunications department at “Sapienza” University of Rome, Lavori e pubblicazioni varie e sito internet www.sublimina.it
4. Augusto Angeletti Latini, Listato di programma Matlab per equazione logistica.

Estratto da "<http://www.electroyou.it/mediawiki/index.php?title=UsersPages:Paolo.carlizza:elementi-di-teoria-del-caos-e-sviluppo-delle-popolazioni>"